

Неравенства между нормами частных производных и приложение в аэродинамической задаче Ньютона

А. Ю. Плахов*

НИТУ МИСИС
4 сентября 2024 г.

Мы рассматриваем следующую задачу. Пусть Ω — компактное выпуклое множество на плоскости с непустой внутренностью. Требуется определить, конечна или бесконечна величина

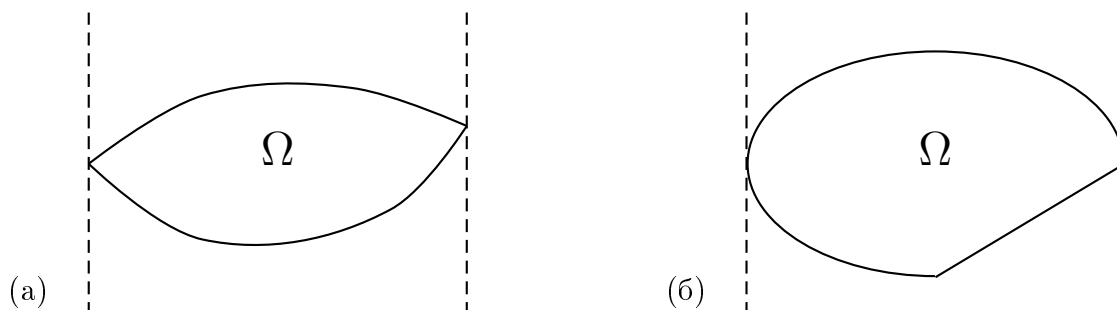
$$K = \sup_{\substack{u \in \mathcal{U}_\Omega \\ u \neq 0}} \frac{\int_\Omega u_x^2 dx dy}{\int_\Omega u_y^2 dx dy}, \quad (1)$$

где \mathcal{U}_Ω есть класс непрерывных вогнутых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с ограниченным градиентом, удовлетворяющих условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ответ в этой задаче зависит от геометрии выпуклого множества Ω и дается теоремой 1, которую предваряем следующим определением.

Рассмотрим касательный угол к Ω с вершиной в особой точке границы $\partial\Omega$. Прямая, проходящая через вершину этого угла и не содержащая его сторон, называется *угловой опорной прямой*. На фигуре (а) обе вертикальные опорные прямые к Ω являются угловыми, а на фигуре (б) — не являются: левая прямая служит касательной, а правая — полукасательной.



*Center for R&D in Maths and Appl., Департамент математики, Университет Авейро, Португалия; Институт проблем передачи информации РАН, Москва, plakhov@ua.pt

Теорема 1. (а) Если по крайней мере одна вертикальная (параллельная оси y) опорная прямая не является угловой, то отношение в (1) бесконечно, т. е. $K = \infty$.

(б) Если обе вертикальные опорные прямые являются угловыми, то отношение в (1) конечно, т. е. $K < \infty$.

Оказывается, этот результат находит свое приложение в аэродинамической задаче Ньютона. А именно, рассмотрим следующий вариант этой задачи. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция. Требуется минимизировать значение функционала

$$\int_{\Omega} f(\nabla u(x, y)) dx dy \quad (2)$$

в классе функций $u \in \mathcal{U}_{\Omega}$. Мы изучаем вопрос, является ли тождественный ноль $u \equiv 0$ локальным минимумом этого функционала в C^1 -норме.

Ответ на этот вопрос дает теорема 1. Пункты (а) и (б) в ней довольно просты, а пункт (в) следует из теоремы 1.

Напомним, что $f''(x, y)$ — это квадратичная форма (матрица 2×2), $f''(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$.

Теорема 2. (а) Если квадратичная форма $f''(0, 0)$ положительно определена, то функция $u \equiv 0$ есть локальный минимум функционала (2).

(б) Если $f''(0, 0)$ отрицательно определена, то $u \equiv 0$ — не локальный минимум (на самом деле локальный максимум).

(в) Пусть $f''(0, 0)$ знакоопределенная. Обозначим $a < 0$ и $b > 0$ ее собственные значения. Следует различать два случая.

(i) Если хотя бы одна опорная прямая, параллельная положительному собственному направлению (то есть направлению, соответствующему положительному собственному значению) формы $f''(0, 0)$ не является угловой, то функция $u \equiv 0$ — не локальный минимум.

(ii) Если обе опорные прямые, параллельные положительному собственному направлению, не являются угловыми, то при $b/|a| < K$ функция $u \equiv 0$ не является локальным минимумом, а при $b/|a| > K$ — является, где величина K определяется формулой (1). Заметим, что, согласно пункту (б) теоремы 1, $K < \infty$.

Эта работа выполнена совместно с В. Ю. Протасовым.

Список литературы

- [1] A. Plakhov and V. Protasov. *Local minima in Newton's aerodynamical problem and inequalities between norms of partial derivatives*. arXiv:2405.05415 [math.OA]