

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

На правах рукописи

Ионцев Михаил Анатольевич

Фазовые переходы в ансамбле джозефсоновских контактов, взаимодействующих с
электромагнитным полем в резонансной полости

01.04.07 Физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Мухин Сергей Иванович
Научный консультант: к. ф.-м. н., с.н.с. Фистуль Михаил Викторович

Москва, 2019

Содержание

Введение	4
1 Постановка задачи и описание системы	8
1.1 Обзор литературы	8
1.1.1 Исследование лагранжиана системы и преобразование Лежандра	18
1.1.2 Сведение гамильтониана джозефсоновского контакта к гамильтониану двухуровневой системы	19
1.1.3 Исследование взаимодействия и выведение гамильтониана системы «трансмиссионная линия – двухуровневая система»	28
1.1.4 Решение стационарного уравнения Шредингера	30
1.1.5 Вычисление термодинамических характеристик системы с зарядовыми кубитами	32
1.1.5.1 Решение задачи с параметром порядка, независимым от времени	33
1.1.5.2 Решение задачи с параметром порядка, зависящим от времени	46
1.2 Изучение системы с потоковыми кубитами	58
1.2.1 Механическое описание потокового кубита	60
1.2.2 Определение критических параметров, при которых w -потенциал преобразуется в двухямный	63
1.2.3 Механическое описание резонатора с потоковыми кубитами	65
1.2.4 Решение уравнения Шредингера системы с потоковыми кубитами	71
1.3 Сравнение систем с потоковыми и зарядовыми кубитами	75
2 Изучение дисперсионных соотношений.	76
2.1 Волновое уравнение системы.	76
2.2 Изучение дисперсионных соотношений в системе ДУС в резонаторе	81
3. Изучение коэффициента проходимости для разных систем.	95
Выводы	114
Список использованных источников	117

Введение

В данной работе исследуется поведение ансамбля двухуровневых систем. Исследование включает в себя рассмотрение поведения термодинамических потенциалов: свободной энергии (потенциал Гельмгольца), энтропии и теплоёмкости, изучение фазового перехода, определение его рода, в работе исследуется коэффициент прохождения электромагнитной волны через резонатор с двухуровневыми системами, а также составляются дисперсионные соотношения. В данной работе описывается новое состояние взаимодействующей фермионной системы: ансамбль двухуровневых систем, взаимодействие между которыми описывается полем Хаббарда-Стратоновича. Состояния системы, описываются с помощью параметра — конденсированного квантового параметра порядка (КПП), являющегося функцией мацубаровского времени (то есть зависит от комплексного времени. Возможно, КПП может позволить более ясно описать состояния проводников в явлениях сверхпроводимости, а также их поведение вблизи критических параметров: температуры и напряженности магнитного поля. Описание основывается на точном самосогласованном решении, которое определяет поле Хаббарда-Стратоновича; это поле минимизирует евклидово действие взаимодействующих фермионных (состоящих из электронов) систем при конечной и нулевой температурах.

В работе исследованы дисперсионные соотношения как в линейном режиме, когда двухуровневые системы воспринимают изменение амплитуды электромагнитной волны, и нелинейном — когда учитывается изменение электромагнитной волны. Во всех режимах изучен коэффициент прохождения.

Актуальность работы.

Актуальность и новизна этого исследования заключаются в том, что фермионное евклидово действие вычисляется с помощью квазиклассического поля Хаббарда-Стратоновича и определяется как квантовый параметр порядка (далее —

КПП), который является мацубаровского времени. Особенностью КПП является то, что он непосредственно «невидим», однако весьма сильно и глубоко влияет на измеримые свойства фермионной системы. Как следствие из точного решения, КПП сильно ренормализует «массу» фермионных степеней свободы. Новое сохраняющееся квантовое число, имеющееся в данной системе с квантовым параметром порядка, не энергия, а индекс Флоке, связанный с. так называемой, квазиэнергией. Последняя аналогична квазиимпульсу в пространственно-периодических потенциалах. Отметим также важную особенность, что в случае наличия КПП, количество частиц сохраняется на любом промежутке времени мацубаровской временной оси.

Целью данной работы является описание термодинамики и кинетики взаимодействия двухуровневых систем с электромагнитным полем, в частности **задачами:** изучение температуры фазового перехода, законов дисперсии электромагнитных волн в системе дисперсионных соотношений и коэффициентов прохождения через подключенный волновод.

Степень разработанности. Исследования в данной сфере проводились следующими учеными: Дроздовым М.И., Корневым В.К., Мухиным С.И., Фистулем М.В. Их работы в значительной мере способствовали успешному проведению исследования как методологически, так и содержательно. Данная диссертация представляет собой развитие ряда фундаментальных идей, заложенных в их трудах.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Показано, что системы зарядовых и потоковых кубитов являются математически эквивалентными друг другу, физическое описание различается в том, что параметром порядка в системе с зарядовыми кубитами является обобщенная координата осциллятора (амплитуда фотонного поля), а в системе с потоковыми кубитами таким параметром является обобщенный импульс осциллятора (импульс фотонного поля). Математическая эквивалентность

объясняется тем, что уравнения движения (правила коммутации операторов этих степеней свободы) систем одинаковы с точностью до замены $P \rightarrow Q$.

2. В случае с аномальной дисперсией в системе наблюдаются солитоны, сохраняющие неизменной свою форму в пространстве в процессе распространения, а также оптические солитоны как с постоянной формой, так и периодически изменяющие ее.

3. В случае с нормальной дисперсией также наблюдаются как обычные постоянные гауссо-образные солитоны, так и оптические: черные (при которых прозрачность системы становится равной нулю) и серые (частично «запирающие» прохождение).

4. Как в случае одного кубита, так и в случае ансамбля кубитов, было обнаружено резонансное подавление D , а именно: коэффициент прохождения резко падал до нулевых значений. Однако коэффициент прохождения отличался от нуля при резонансе в аналогичных условиях в ансамбле кубитов, сильно взаимодействующих с электромагнитным полем.

5. В пределе высокой мощности применяемых электромагнитных волн высокое значение коэффициента прохождения восстанавливается, его значение стремится к единице. Сильные вариации коэффициента передачи D в зависимости от частоты и мощности электромагнитных волн могут быть использованы в электронных устройствах с квантовыми электромагнитными цепями.

Научная новизна:

Впервые были исследованы дисперсионные соотношения электромагнитного сигнала как в линейном, так и нелинейном режимах взаимодействия двухуровневых систем потоковых, зарядовых и трансмонных кубитов с электромагнитным полем.

Впервые был исследован и получен в аналитическом виде коэффициент прохождения для всех режимов взаимодействия, обнаружены механизмы запирания и их зависимость от частоты и мощности электромагнитных волн.

Впервые были обнаружены черные и серые виды оптических солитонов в системах подобного типа.

Методология и методы диссертационного исследования. В процессе исследования использовались методы теоретической физики, математик и формальной логики.

Теоретическая и практическая значимость.

Во-первых, данная работа позволяет разрабатывать новые метаматериалы с настраиваемыми показателями преломления. Проведено исследование систем, состоящих из резонатора с потоковыми кубитами и резонатора с зарядовыми кубитами. Проведено сравнение термодинамических характеристик этих систем, описаны фазовые переходы, происходящие в этих системах. Положительная определенность энтропии и теплоемкости, а также их значений в критической точке, позволяют судить о том, что все выкладки были проделаны верно. Исходя из того, что термодинамические потенциалы имеют совершенно определенные значения в точке фазового перехода, можно заключить то, что наблюдается фазовый переход второго рода.

Во-вторых, научная значимость работы заключается в том, что исследования подобного рода связаны с проектированием сверхпроводящих метаматериалов на основе ансамблей Джозефсоновских контактов, играющих роль потоковых кубитов в квантовом компьютере.

Степень достоверности и апробация результатов.

Основные результаты работ докладываюсь на следующих конференциях: Международной конференции-конкурсе молодых физиков 05.03.2018г., семинарах, проводимых на кафедре Теоретической физики и квантовых технологий. Диссертация выполнена при поддержке гранта K2-2016-019. Основные материалы диссертационной работы изложены в статьях опубликованных в журналах международной реферативной базы данных Web of Science и Scopus. О степени достоверности свидетельствует также присвоение

степени «Исследователь. Преподаватель Исследователь» в 2019 году в НИТУ «МИСиС» по направлению подготовки 03.06.01 Физика и астрономия, в процессе защиты обсуждались и результаты, которые представлены в настоящей диссертации.

1 Постановка задачи и описание системы

1.1 Изучение системы с зарядовыми кубитами

В работе исследуются две системы, одна с потоковыми, другая с зарядовыми кубитами. Начнем с решения задачи для зарядовых кубитов. Целью исследования является получение термодинамических характеристик системы, исследование фазового перехода на плоскости «параметр порядка-температура».

Итак, система состоит из трансмиссионной линии и зарядовых кубитов и может быть описана с помощью следующей схемы.

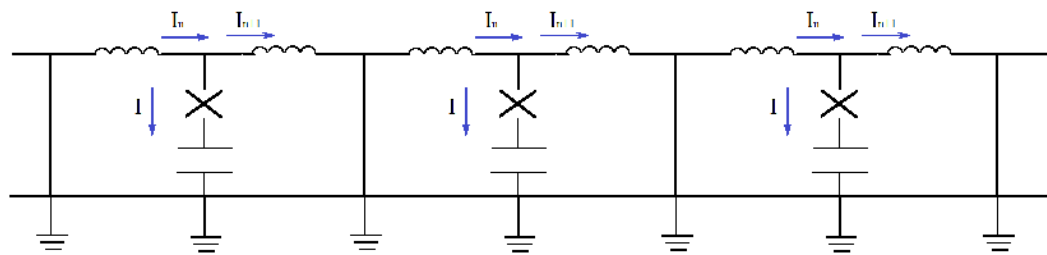


Рисунок 2 – Система резонатор с зарядовыми кубитами

Зарядовый кубит здесь представлен в виде джозефсоновского контакта первого рода, на схеме обозначен с помощью креста. Приведем ниже важные характеристики контакта Джозефсона. Первый — джозефсоновская энергия, которая определяет характерную энергию джозефсоновской связи и имеет вид:

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e}, \quad (1)$$

где

I_c — максимальное значение бездиссипативного тока через контакт, при повышении которого наряду с сверхпроводящим током появляется диссипативная компонента тока квазичастиц и на контакте возникает напряжение;

$j_c = \frac{|\alpha|\hbar e}{\beta m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$, ψ — волновая функция сверхпроводящих электронов (параметры α и β являются коэффициентами в разложении в ряд Тейлора свободной энергии сверхпроводника соответственно при квадратичном и биквадратичном членах), m — масса куперовской пары.

Второй параметр — зарядовая (кулоновская энергия) E_{Cj} . На обкладках туннельного контакта емкостью C_j накапливается заряд $Q = CV$ с соответствующей электростатической энергией $\frac{Q^2}{2C_j}$. Характерная зарядовая энергия (на одну куперовскую пару) составляет

$$E_{Cj} = \frac{(2e)^2}{2C_j}. \quad (2)$$

Джозефсоновский контакт является нелинейным индуктивным элементом. Из определения индуктивности $V = L \frac{dI}{dt}$, а также из зависимостей $V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}$ и $I = I_c \sin \varphi$, получим

$$L_j = \frac{\hbar}{2eI_c \cos \varphi}. \quad (3)$$

Джозефсоновская индуктивность зависит нелинейно от фазы, что является необходимым условием для реализации кубитов на основе Джозефсоновских контактов.

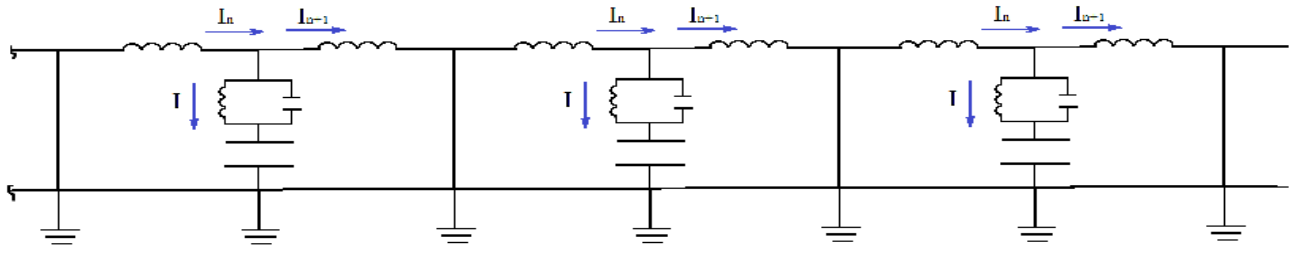


Рисунок 3 – Преобразованная схема

Данные характеристики контакта позволяет заменить его схематически на контур с конденсатором и индуктивностью джозефсоновского контакта так, как это показано на рисунке.

Для того, чтобы исследовать термодинамические характеристики системы, необходимо получить выражение для статистической суммы, которая характеризует данную систему. Статистическая сумма может быть получена, если известны энергии системы во всех стационарных состояниях. Для этого в свою очередь необходимо знать вид гамильтониана, который может быть получен путем преобразований Лежандра из лагранжиана, восстановленного путем интегрирования уравнений движения элементов системы.

Таким образом основная задача состоит в получении уравнений движения, которыми в данном случае являются уравнения Кирхгофа. Запишем уравнения Кирхгофа, которые описывают токи в системе:

Ток, текущий по трансмиссионной линии, заходит на контур, описывающий джозефсоновский контакт, ток на котором равен I . Сумма токов, входящих и выходящих из узла, должна быть равны нулю, согласно закону сохранения заряда:

$$I_{n+1} - I_n = I. \quad (4)$$

В свою очередь ток через джозефсоновский контакт имеет значение $I_c \sin \varphi_n + C_j \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2}$, где первое слагаемое представляет собой индуктивный вклад, а

второе – емкостной, поэтому имеет (отметим, что всюду далее полагается, что $e = 1, \hbar = 1$)

$$I = I_c \sin \varphi_n + C_j \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2}, \quad (5)$$

где

$$I = C \frac{dV_n}{dt}. \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6), получим:

$$I_{n+1} - I_n = I_c \sin \varphi_n + C_j \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2}, \quad (7)$$

$$I_{n+1} - I_n = C \frac{dV_n}{dt}. \quad (8)$$

Приводя уравнения движения к одному индексу получим,

$$L\dot{I}_n = V_n + C_j \frac{d\varphi_n}{dt} + \mu_n - V_{n-1} - C_j \frac{d\varphi_{n-1}}{dt} - \mu_{n-1}. \quad (9)$$

где μ_n — напряжение, которое фиксирует заряд на конденсаторе джозефсоновского контакта.

Получив уравнение движения рассмотрим лагранжиан системы. Очевидно, что он является функцией от $\dot{Q}, Q, \dot{\varphi}_n, \varphi_n, t$. Однако явная зависимость от времени исключается. В связи с этим получается, что всего $2(n+1)$ степеней свободы в системе.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{Q}, Q, \dot{\varphi}_n, \varphi_n, t). \quad (10)$$

Из классической механики известно, что равнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_n} = 0. \quad (12)$$

Производя дальнейшие преобразования над уравнениями движения, проинтегрируем их. Итак, имеется

$$I_{n+1} - I_n = C \frac{dV_n}{dt}, \quad (13)$$

$$I_n - I_{n-1} = C \frac{dV_{n-1}}{dt}. \quad (14)$$

Складывая эти два уравнения, получим

$$I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1} = C \left(\frac{dV_n}{dt} - \frac{dV_{n-1}}{dt} \right). \quad (15)$$

Дифференцируя уравнение (14), получим

$$L\ddot{I}_n = C \left(\frac{dV_n}{dt} - \frac{dV_{n-1}}{dt} \right) + \frac{CJ\hbar}{e} \left(\frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} - \frac{d^2 \varphi_{n-1}}{dt^2} \right). \quad (16)$$

Так как фиксирующее напряжение устанавливается внешним источником напряжения, то оно не зависит от времени.

Подставляя далее уравнение (16), получим

$$L\ddot{I}_n = I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1} + \frac{C_J\hbar}{e} \left(\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} - \frac{d^2\varphi_{n-1}}{dt^2} \right). \quad (17)$$

Напомним, что ток, текущий по трансмиссионной линии равен производной заряда, текущего по этой линии по времени, а именно

$$I_n = \frac{dQ_n}{dt}. \quad (18)$$

Подставляя уравнение (17) в уравнение (18), получим следующее

$$L\ddot{Q}_n = \dot{Q}_{n+1} - 2\dot{Q}_n + \dot{Q}_{n-1} + \frac{C_J\hbar}{e} \left(\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} - \frac{d^2\varphi_{n-1}}{dt^2} \right). \quad (19)$$

Преобразуя уравнение (110), получим, что

$$\dot{Q}_{n+1} - \dot{Q}_n = I_c \sin\varphi_n + \frac{C_J\hbar}{e} \frac{d^2\varphi_n}{dt^2}. \quad (20)$$

Легко заметить, что в уравнении (20) слева и справа стоят полные производные по времени, снимая их следует помнить, что необходимо восстановить константу, равную фиксирующему напряжению, то есть

$$\frac{d}{dt}(L\ddot{Q}_n) = \frac{d}{dt} \left(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1} + \frac{C_J\hbar}{e} \left(\frac{d\varphi_n}{dt} - \frac{d\varphi_{n-1}}{dt} \right) + a(\mu_n - \mu_{n-1}) \right), \quad (21)$$

$$L\ddot{Q}_n = Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1} + \frac{C_J\hbar}{e} \left(\frac{d\varphi_n}{dt} - \frac{d\varphi_{n-1}}{dt} \right) + a(\mu_n - \mu_{n-1}). \quad (22)$$

Интегрируя это уравнение движения, получим следующее значение для части лагранжиана:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{C_J \hbar}{2e} (\dot{\varphi}_n - \mu_n)^2 - E_J (1 - \cos \varphi_n) - \varphi_n (\dot{Q}_{n+1} - \dot{Q}_n). \quad (23)$$

Интегрирую же теперь второе уравнение движения

$$CL\ddot{Q}_n = Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1} + \frac{C_J \hbar}{e} (\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_{n-1}) + C_J (\mu_n - \mu_{n-1}), \quad (24)$$

можно получить вторую часть лагранжиана системы, а именно

$$\mathcal{L}_2 = \frac{L\dot{Q}_n^2}{2} - \left(\frac{1}{2C} \sum_n (Q_{n+1} - Q_n)^2 + Q_n \frac{\hbar}{e} (\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_{n-1}) + Q_n (\mu_n - \mu_{n-1}) \right). \quad (25)$$

Обратим теперь внимание на индексы, так как Джозефсоновских контактов в системе i штук, а ячеек, которые описывали элементы уравнения Кирхгофа n , то если вторых больше, значит, есть пустые элементы, что приводит к тому, что следующие произведения будут иметь вид:

$$Q_n (\mu_n - \mu_{n-1}) = Q_i \mu_i, \quad (26)$$

$$Q_n (\dot{\varphi}_n - \dot{\varphi}_{n-1}) = Q_i \dot{\varphi}_i. \quad (27)$$

Таким образом, учитывая (131) и (132), получим следующее выражение для второй части лагранжиана всей системы:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{L\dot{Q}_i^2}{2} - \left(\frac{1}{2C} \sum_i (Q_{i+1} - Q_i)^2 + Q_i \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}_i + Q_i \mu_i \right). \quad (28)$$

Принимая во внимание то, что

$$Q_i = Q(t) \cos(kx_n), \quad (29)$$

а также тождество $\frac{1}{2C} \sum_i (Q_{i+1} - Q_i)^2 = \frac{k_i^2 c^2}{2} Q^2$, с необходимостью получаем следующее:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{L\dot{Q}^2}{2} - \left(\frac{k_i^2 c^2}{2} Q^2 + Q\dot{\varphi}_i \frac{\hbar \cos(kx_n)}{e} + \mu_i Q \cos(kx_n) \right), \quad (30)$$

где $m = \frac{Ll}{2}$ масса, или мера инертности трансмиссионной линии.

В итоге получаем выражение для второй части лагранжиана в виде:

$$\mathcal{L}_2 = m \frac{\dot{Q}^2}{2} - m \frac{k_i^2 c^2}{2} Q^2 - \left(Q\dot{\varphi}_i \frac{\hbar \cos(kx_n)}{e} + \mu_i Q \cos(kx_n) \right). \quad (31)$$

Приведение подобных и вынесение общих членов за скобки приводит к следующему:

$$\mathcal{L}_2 = m \left(\frac{\dot{Q}^2}{2} - \frac{k_i^2 c^2}{2} Q^2 \right) - \left(Q\dot{\varphi}_i \frac{\hbar \cos(kx_n)}{e} + \mu_i Q \cos(kx_n) \right). \quad (32)$$

Далее полагается, что $\cos(k_i x) = \text{const}$ в данной системе, так как изменения фазы электромагнитной волны на масштабах системы незначительны. Также предполагается, что частота фотона $\omega_0 = ck$ в трансмиссионной линии много выше частоты собственных колебаний контактов Джозефсона.

Обратимся теперь к построению лагранжиана всей системы, имеется:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{C_J}{2} \left(\frac{\hbar}{e} \dot{\varphi}_i + \mu_i \right)^2 - E_J (1 - \cos \varphi_i). \quad (33)$$

Комбинируя уравнения (32) и (33), получим в итоге:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{Q}^2 - \omega_0^2 Q^2) + \frac{C_J}{2} \left(\frac{\hbar}{e} \dot{\phi}_i + \mu_i \right)^2 - \dot{\phi}_i Q \frac{\hbar \cos(kx_n)}{e} - E_J(1 - \cos \phi_i) - \mu_i Q \cos(kx_n). \quad (34)$$

где плазменная частота джозефсоновского контакта равна:

$$\omega_p = \left(\frac{2\pi I_c}{C\Phi_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (35)$$

Осуществив необходимые преобразования в уравнении (35) получим:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{Q}^2 - \omega_0^2 Q^2) + \sum_i \left(\frac{E_{Cj}}{2\omega_p^2} \left(\frac{\hbar}{e} \dot{\phi}_i + \mu_i \right)^2 - E_J(1 - \cos \phi_i) \right) - Q \cos(kx_n) \sum_i \left(\dot{\phi}_i \frac{\hbar}{e} + \mu_i \right). \quad (36)$$

1.1.1 Исследование лагранжиана системы и преобразование Лежандра

Изучим подробнее полученный лагранжиан, который состоит из трех частей, а именно: фотонной или той, которая описывает поведение трансмиссионной линии (осциллятора); той, что описывает поведение двухуровневых систем и их взаимодействия с трансмиссионной линией (осциллятором).

Рассмотрим фотонную часть, которая имеет вид:

$$\mathcal{L}_{ph} = \frac{m}{2}(\dot{Q}^2 - \omega_0^2 Q^2). \quad (37)$$

Перейдём теперь к гамильтониану, следуя программе исследования, для этого необходимо получить выражение для обобщенного импульса, используя преобразования Лежандра и формализм Гамильтониана. Итак, имеем:

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} . \quad (38)$$

Подставляя значение лагранжиана для фотонной части, получим

$$P = m\dot{Q} . \quad (39)$$

Отметим здесь же, что обобщенная скорость имеет следующий вид:

$$\dot{Q} = \frac{P}{m} . \quad (40)$$

Из классической механики, известно, что лагранжиан и гамильтониан связаны следующим образом

$$H_{ph} = P\dot{Q} - \mathcal{L}_{ph} . \quad (41)$$

Осуществляя подстановку, получим

$$H_{ph} = \frac{P^2}{m} - \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} Q^2 . \quad (42)$$

В окончательном виде гамильтониан имеет следующий вид, который по своей структуре имеет природу свободного осциллятора с параболическим потенциалом,

$$H_{ph} = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} Q^2 . \quad (43)$$

Осуществим квантование гамильтониана (43), где введены следующие обозначения: $m = \frac{lL_0}{2}$, $\omega_0 = ck_n$.

Очевидно, что этот гамильтониан описывает гармонический осциллятор. И если теперь ввести операторы $\hat{P}, \hat{Q}$, то можно переписать гамильтониан с помощью операторов рождения и уничтожения для бозонов:

$$\hat{b}^+ = \frac{(\hat{P} + im\omega_0\hat{Q})}{\sqrt{2\hbar\omega_0m}}, \quad \hat{b} = \frac{(\hat{P} - im\omega_0\hat{Q})}{\sqrt{2\hbar\omega_0m}}. \quad (44)$$

Коммутационные соотношения имеют вид: $[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$.

Итак, гамильтониан проквантован и принимает следующий вид:

$$\hat{H}_{ph} = \hbar\omega_0 \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right). \quad (45)$$

Обратимся теперь ко второй части лагранжиана, а именно к той, что описывает поведение Джозефсоновских контактов:

$$\mathcal{L}_J = \sum_i \left(\frac{E_{Cj}}{2\omega_p^2} \left(\frac{\hbar}{e} \dot{\varphi}_i + \mu_i \right)^2 - E_j (1 - \cos \varphi_i) \right). \quad (46)$$

Проделявая те же преобразования, что были осуществлены с лагранжианом трансмиссионной линии, получим

$$H_J = \sum_i \left(\frac{E_{Cj}}{2\omega_p^2} \sum_i (\hat{p}_i + \mu_i)^2 + E_j (1 - \cos \varphi_i) \right). \quad (47)$$

1.1.2 Сведение гамильтониана джозефсоновского контакта к гамильтониану двухуровневой системы

Так как целью нашего изучения являются двухуровневые системы в конденсате фотонов, то гамильтониан джозефсоновских контактов необходимо свести к гамильтониану двухуровневых систем, осуществив его квантование.

Вышеописанная операция может быть осуществлена с помощью теории возмущений. Итак, рассмотрим сначала гамильтониан совокупности свободных джозефсоновских контактов:

$$\hat{H} = \frac{E_{Cj}}{2\omega_p^2} \sum_i (\hat{p}_i + \mu_i)^2. \quad (48)$$

Обобщённый импульс имеет вид:

$$\hat{p}_i = -i\omega_{Cj} \frac{d}{d\varphi_i}. \quad (49)$$

Стационарное уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2\omega_p^2} (\hat{p}_i + \mu_i)^2 \psi_i^{(0)}(\varphi_i) = E \psi_i^{(0)}(\varphi_i). \quad (50)$$

Перед тем как решать данное уравнение, избавимся от коэффициента в скобке, с помощью представления решения в виде произведения двух функций

$$\hat{f}_i^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{i\varphi_i \mu_i}{\omega_{cj}}\right) F_i^{(0)}:$$

$$\frac{E_{cj}}{2\omega_p^2} \hat{p}_i^2 F_i^{(0)}(\varphi_i) = E F_i^{(0)}(\varphi_i). \quad (51)$$

Подставляя в это уравнение выражение для обобщенного импульса, получим:

$$-\frac{E_{cj}}{2} \left(\frac{\omega_{cj}}{\omega_p}\right)^2 \frac{d^2 F_i^{(0)}(\varphi_i)}{d\varphi_i^2} = E F_i^{(0)}(\varphi_i). \quad (52)$$

Собственные функции гамильтониана будут иметь вид:

$$F_i^{(0)}(\varphi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi_i). \quad (53)$$

А решение исходного уравнения Шредингера будет иметь следующий вид:

$$\hat{f}_i^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i\varphi_i \left(m - \frac{\mu_i}{\omega_{cj}}\right)\right). \quad (54)$$

Собственные же значения функции будут иметь вид:

$$E = \frac{E_{cj}}{2\omega_p^2} \sum_i \left(\omega_{cj} m_i + \mu_i\right)^2. \quad (55)$$

Значения энергии для одного джозефсоновского контакта будет иметь вид:

$$E_i = \frac{E_{Cj}}{2\omega_p^2} (\omega_{Cj} m_i + \mu_i)^2, \quad (56)$$

где $\frac{1}{2} \frac{E_{Cj}}{\omega_p^2} = b$.

Выберем два уровня энергии с ближайшими значениями энергии, то есть такие, у которых номера $m=1$ и $m=0$. Это необходимо для того, чтобы построить двухуровневую систему на основе зарядового кубита. Легко заметить, что энергия зависит от числа m параболически, что говорит о том, что параболы с разными номерами будут пересекаться в определенных точках. Найдем такую точку пересечения для парабол с номерами $m=1$ и $m=0$.

Итак, парабола имеет вид:

$$E_i^{[0]} = b(\omega_{Cj} m_i + \mu_i)^2. \quad (57)$$

Парабола с $m_0 = 0$ имеет вид $E_0^{[0]} = b\mu_F^2$, а со значением $m_1 = 1$ — $E_{n+1}^{[0]} = b(\omega_{Cj} + \mu_F)^2$, приравнивая данные параболы, получается уравнение:

$$b\mu_F^2 = b(\omega_{Cj} + \mu_F)^2. \quad (58)$$

Из которого можно найти значение μ_F , то есть фиксированное значение регулируемого внешнего напряжения, при котором возможно построение двухуровневой системы. Раскрывая скобки в уравнении (58), получим:

$$\mu_F^2 = \omega_{Cj}^2 + 2\omega_{Cj}\mu_F + \mu_F^2. \quad (59)$$

Окончательно получается:

$$\mu_F = \frac{\omega_{Cj}}{2}. \quad (60)$$

Подставляя данное значение фиксированного напряжения в значение для энергии, получим:

$$E_0^{[f]} = \frac{E_{Cj}}{8} \left(\frac{\omega_{Cj}}{\omega_p} \right)^2. \quad (61)$$

Заметим, что в избранной системе отсчета $\omega_{Cj} = E_{Cj}/2$, то есть двухуровневая система может быть построена при таком значении напряжения, которое равно $E_{Cj}/4q$, где q — заряд на обложке конденсатора.

Результате были получены значения энергии и напряжения, при которых возможно построение двухуровневой системы рис. 15.

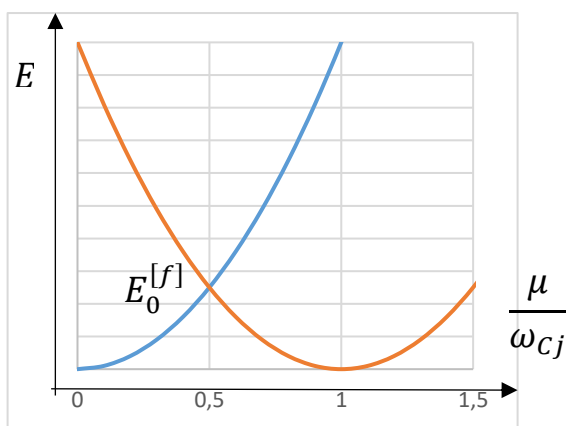


Рисунок 4 – Точка нахождения первой двухуровневой системе — точка пересечения парабол

В точке пересечения парабол находится уровень, который дважды вырожден, так как одному значению фиксированного напряжения соответствует два совершенно тождественных уровня энергии. Это вырождение можно снять, возмущив систему. В том случае, если возмущение будет невеликим, то можно воспользоваться теорией возмущений и вычислить значения энергии каждого невырожденного уровня.

Далее будет рассматривается система, в которой исключено взаимодействие между двухуровневыми системами, поэтому в целях упрощения математических выкладок, будут произведены вычисления для одной двухуровневой системы, эти результаты также будут справедливы и для нескольких систем, которые не взаимодействуют между собой.

Потенциал возмущения имеет вид:

$$\hat{H}_{int} = E_j(1 - \cos \varphi). \quad (62)$$

Собственные функции, описывающие систему в вырожденных состояниях до возмущения, имеют вид:

$$f_i^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i\varphi_i \left(m - \frac{\mu_i}{\omega_{cj}}\right)\right). \quad (63)$$

Положим, что в системе есть два близких уровня с $m = 1$ и $m = 0$, а все остальные лежат далеко. Целесообразно искать решение уравнения в виде:

$$f(\varphi) = c f_0^{(0)}(\varphi) + d f_1^{(0)}(\varphi). \quad (64)$$

Уравнение Шредингера тогда имеет вид:

$$\hat{H}f = Ef, \quad (65)$$

где гамильтониан системы состоит из гамильтониана свободной системы и возмущения:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}. \quad (66)$$

Если подставить значения гамильтонианов, то получим:

$$\hat{H} = \sum_i \left[\frac{E_{cj}}{2\omega_p^2} (\hat{\phi}_i + \mu_i)^2 + E_j (1 - \cos \varphi) \right], \quad (67)$$

Умножим скалярно уравнение на $\hat{\phi}_0^{(0)}$, а затем на $\hat{\phi}_1^{(0)}$. В итоге, получим

$$\begin{cases} cH_{00} + dH_{01} = cE; \\ cH_{10} + dH_{11} = dE. \end{cases} \quad (68)$$

Где введены обозначения

$$H_{mn} = \langle \hat{\phi}_m^{(0)} | \hat{H} | \hat{\phi}_n^{(0)} \rangle = \frac{E_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi m) [\hat{H}_0 + \hat{H}_{int}] \exp(-i\varphi n) d\varphi = E_n^{(0)} \delta_{mn} + \tilde{E}_{mn}, \quad (69)$$

$$\tilde{E}_{mn} = \frac{E_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi m) \hat{H}_{int} \exp(-i\varphi n) d\varphi, \quad (70)$$

$$E_n^{(0)} = \frac{E_{cj}}{8} \left(\frac{\omega_{cj}}{\omega_p} \right)^2, \quad (71)$$

Чтобы система уравнений имела отличные от нуля решения, её детерминант должен быть равен нулю, а именно

$$\det(A) = \begin{vmatrix} H_{00} - E & H_{01} \\ H_{10} & H_{11} - E \end{vmatrix} = 0. \quad (72)$$

Раскрывая детерминант, получаем следующее квадратное уравнение, из которого можно найти значения энергии каждого невырожденного уровня в двухуровневой системе:

$$E^2 - (H_{00} + H_{11})E + (H_{00}H_{11} - H_{10}H_{01}) = 0. \quad (73)$$

Корни данного уравнения имеют следующие значения:

$$E_1 = \frac{1}{2} \left\{ (H_{00} + H_{11}) + \sqrt{(H_{00} - H_{11})^2 + 4|H_{01}|^2} \right\}, \quad (74)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left\{ (H_{00} + H_{11}) - \sqrt{(H_{00} - H_{11})^2 + 4|H_{01}|^2} \right\}. \quad (75)$$

Таким образом двухуровневая система была получена. Теперь следует подставить значения, средних значений гамильтонианов, чтобы перейти к явному виду системы.

Очевидно, что всегда будут справедливы следующие соотношения:

$$H_{mn} = E_n^{(0)} \delta_{mn} + \tilde{E}_{mn}, \quad (76)$$

$$H_{00} = E_0^{(0)} \delta_{00} + \tilde{E}_{00}, \quad (77)$$

$$\tilde{E}_{mn} = \begin{cases} 0, & m - n \neq 1; \\ \frac{E_j}{2}, & m - n = \pm 1. \end{cases} \quad (78)$$

Точные значения имеют следующий вид:

$$\tilde{E}_{01} = \tilde{E}_{10} = \frac{E_j}{2}, \quad (79)$$

$$H_{00} = H_{11} = \frac{E_{Cj}}{8} \left(\frac{\omega_{Cj}}{\omega_p} \right)^2, \quad (80)$$

$$H_{01} = H_{10} = \frac{E_j}{2}. \quad (81)$$

В итоге, выражения для уровней будут иметь окончательный вид:

$$E_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_{Cj}}{4} \left(\frac{\omega_{Cj} \mp \sigma}{\omega_p} \right)^2 + \sqrt{0 + 4 \left| \frac{E_j}{2} \right|^2} \right\}, \quad (82)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_{Cj}}{4} \left(\frac{\omega_{Cj} \mp \sigma}{\omega_p} \right)^2 - \sqrt{0 + 4 \left| \frac{E_j}{2} \right|^2} \right\}. \quad (83)$$

В уравнениях (82) и (83) выше введен дополнительный параметр σ , который обозначает естественные флуктуации или задаваемый разброс значений фиксируемого напряжения. Здесь и далее задача будет рассматриваться с его значением равным нулю. Введем также обозначения:

$$\frac{E_{Cj}}{8} \left(\frac{\omega_{Cj} \mp \sigma}{\omega_p} \right)^2 + \frac{E_j}{2} = \varepsilon_{Cj} + \varepsilon_j, \quad (84)$$

$$\frac{E_{Cj}}{8} \left(\frac{\omega_{Cj} \mp \sigma}{\omega_p} \right)^2 - \frac{E_j}{2} = \varepsilon_{Cj} - \varepsilon_j. \quad (85)$$

В итоге гамильтониан двухуровневой системы, которая не взаимодействует с внешним фотонным полем, имеет следующий вид:

$$H_{TLS} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{Cj} + \varepsilon_j & 0 \\ 0 & \varepsilon_{Cj} - \varepsilon_j \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Для дальнейших вычислений укажем значения коэффициентов в функциях, описывающих состояние системы в верхнем и нижнем уровнях двухуровневой системы:

$$f_{\pm}(\varphi) = c_{\pm} f_0^{(0)}(\varphi) + d_{\pm} f_1^{(0)}(\varphi), \quad (87)$$

$$f_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(c_{\pm} + d_{\pm} \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \right). \quad (88)$$

Учитывая то, что функции должны быть ортогональными, а также условие нормировки, получим

$$c_+ c_- + d_+ d_- = 0, \quad (89)$$

$$|c_+|^2 + |d_+|^2 = 1, \quad (90)$$

$$|c_-|^2 + |d_-|^2 = 1. \quad (91)$$

Решая эти уравнения, получим:

$$c_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, d_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (92)$$

Подставляя значения коэффициентов в выражения для функций состояния, получим:

$$f_+(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(1 + \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \right), \quad (93)$$

$$f_{-}(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right) \right). \quad (94)$$

Итак, было снято вырождение и получена двухуровневая система, которая изображена на рис. 16.

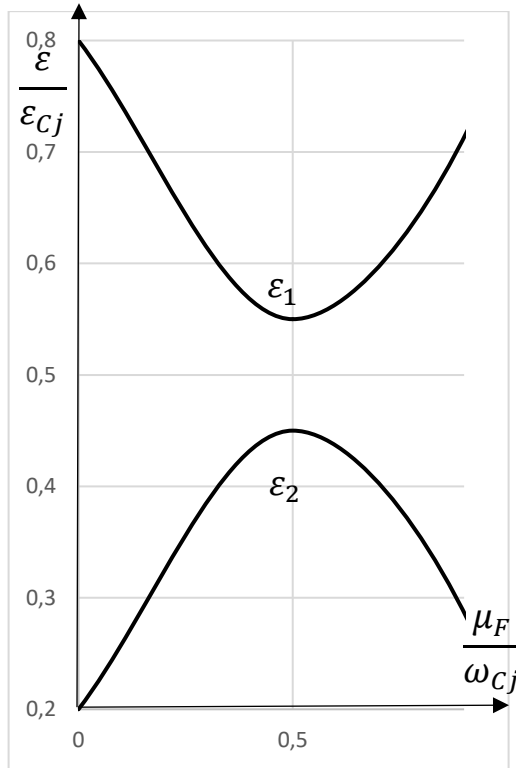


Рисунок 5 – Двухуровневая система

1.1.3 Исследование взаимодействия и выведение гамильтониана системы «трансмиссионная линия – двухуровневая система»

Получив значения гамильтониана для фотонного поля и двухуровневой системы, перейдем к исследованию их взаимодействия. Гамильтониан взаимодействия имеет вид:

$$H_{int} = Q \frac{\sqrt{mE_{cj}}}{\omega_p} \omega_0 \sum_i (\hat{\phi} + \mu_F). \quad (95)$$

Введем далее следующее обозначение для удобства расчетов:

$$\frac{\omega_0 \sqrt{mE_{cj}}}{\omega_p} = \tilde{\gamma}. \quad (96)$$

С учётом формулы (98) получим:

$$H_{int} = Q \tilde{\gamma} \sum_i \left(-i \omega_{cj} \frac{d}{d\varphi} + \mu_F \right). \quad (97)$$

Учитывая то, что теперь фотонный конденсат и двухуровневые системы взаимодействуют, необходимо вычислить члены матрицы гамильтониана (203) в базисе (96) и (97). Очевидно, что членов всего будет 4, так как матрица размера 2×2 .

Итак, первый член матрицы равен:

$$H_{int+-} = \langle f_+^* | Q \tilde{\gamma} \sum_i \left(-i \omega_{cj} \frac{d}{d\varphi} + \mu_F \right) | f_- \rangle = \frac{1}{2} Q \tilde{\gamma} \omega_{cj}. \quad (98)$$

Второй недиагональный член матрицы имеет вид:

$$H_{int-+} = \langle f_-^* | Q \tilde{\gamma} \sum_i \left(-i \omega_{cj} \frac{d}{d\varphi} + \mu_F \right) | f_+ \rangle = \frac{1}{2} Q \tilde{\gamma} \omega_{cj}. \quad (99)$$

Первый диагональный элемент матрицы равен:

$$H_{int++} = \langle f_+^* | Q \tilde{\gamma} \sum_i \left(-i \omega_{cj} \frac{d}{d\varphi} + \mu_F \right) | f_+ \rangle = Q \tilde{\gamma} \left(-\frac{\omega_{cj}}{2} + \mu_F \right) = 0. \quad (100)$$

Второй диагональный элемент матрицы имеет вид:

$$H_{int--} = \langle f_-^* | Q \tilde{\gamma} \Sigma_i \left(-i \omega_{cj} \frac{d}{d\varphi} + \mu_F \right) | f_- \rangle = Q \tilde{\gamma} \left(-\frac{\omega_{cj}}{2} + \mu_F \right) = 0. \quad (101)$$

Введем далее следующее обозначение для удобства осуществления математических расчетов:

$$\frac{\omega_0 \sqrt{m E_{cj}}}{\omega_p} \omega_{cj} = \gamma. \quad (102)$$

В итоге, матрица гамильтониана двухуровневой системы, которая взаимодействует с фотонным полем принимает вид:

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{cj} + \varepsilon_j & \frac{1}{2} Q \gamma \\ \frac{1}{2} Q \gamma & \varepsilon_{cj} - \varepsilon_j \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Волновая функция такой системы имеет вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}. \quad (104)$$

1.1.4 Решение стационарного уравнения Шредингера

Стационарное уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{cj} + \varepsilon_j & \frac{1}{2} Q \gamma \\ \frac{1}{2} Q \gamma & \varepsilon_{cj} - \varepsilon_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}. \quad (105)$$

Если перенести правую часть влево, то получим:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{cj} + \varepsilon_j - E & \frac{1}{2} Q\gamma \\ \frac{1}{2} Q\gamma & \varepsilon_{cj} - \varepsilon_j - E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix} = 0 . \quad (106)$$

Данная система уравнений разрешима и имеет решения только, если её детерминант равен нулю. Приравнявая нулю детерминант, получаем квадратное уравнение на собственные значения энергии:

$$(\varepsilon_{cj} + \varepsilon_j - E)(\varepsilon_{cj} - \varepsilon_j - E) = \frac{1}{4} Q^2 \gamma^2 . \quad (107)$$

Приводя подобные и перенося все члены в одну стороны, получим:

$$E^2 - 2E\varepsilon_{cj} + \varepsilon_{cj}^2 - \varepsilon_j^2 - \frac{1}{4} Q^2 \gamma^2 = 0 . \quad (108)$$

Детерминант уравнения имеет следующий вид:

$$\mathcal{D} = 4\varepsilon_{cj}^2 - 4\varepsilon_{cj}^2 + 4\varepsilon_j^2 + Q^2 \gamma^2 = Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2 . \quad (109)$$

Решая уравнения, получим следующие корни:

$$E_{\pm} = \varepsilon_{cj} \pm \sqrt{\frac{1}{4}Q^2\gamma^2 + \varepsilon_j^2} . \quad (110)$$

1.1.5 Вычисление термодинамических характеристик системы с зарядовыми кубитами

Всюду далее в расчетах полагается, что $k_B = 1$ (110). В соответствии с алгоритмом решения задачи, после определения значения уровней энергии двухуровневой системы, следует перейти к определению статистической суммы. В обзоре литературы был указан способ расчета статистической суммы, повторим ниже результат проведенного расчета:

$$Z = \int DQD\{\varphi_i\} \exp(-S(Q, \varphi_i)). \quad (111)$$

Здесь статистическая сумма представлена в виде континуального интеграла по всем степеням свободы лагранжиана. Функция, стоящая в аргументе экспоненты, является эффективным действием всей системы, которое представляется аддитивно из действия фотонного поля и двухуровневых систем, которые взаимодействуют с этим полем, то есть вклад от взаимодействия уже учтен в действии двухуровневых систем.

$$S(Q, \varphi_i) = S_{TLS} + S_{ph}. \quad (112)$$

Отметим, что из статистики справедлива также зависимость эвклидова действия и статистической суммы:

$$S_{TLS} = -T \ln Z_{TLS} . \quad (113)$$

Вычисляя статистическую сумму всех N двухуровневых систем, получим:

$$Z_{TLS} = \sum_{i=1}^N 2 \exp\left(\frac{\varepsilon_{Cji}}{T}\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T}\right). \quad (114)$$

Эффективное действие всей системы имеет следующий вид, если учесть все вышеизложенные выкладки:

$$S_{eff}(Q) = \int_0^{\frac{1}{T}} \partial \tau \left\{ \frac{m}{2} (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2) - T \left(N \ln(2) + N \frac{\varepsilon_{Cji}}{T} + \sum_{i=1}^N \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\} \right] \right) \right\}. \quad (115)$$

Далее исследование пойдет по двум принципиальным путям. В первом случае, будет полагаться, что амплитуда тока, текущего по трансмиссионной линии не зависит от времени, то есть классический случай. Во втором случае, положено, что амплитуда тока и амплитуда заряда зависят от времени. Однако, данные функции являются периодическими и поэтому при усреднении их по отрезку времени, равному периоду данных функций, они будут равняться нулю. Такие функции называются скрытыми параметрами порядка.

1.1.5.1 Решение задачи с параметром порядка, независящим от времени

Рассмотрим первый случай, когда: $\dot{Q} = 0$. Исходя из общих условий, положим, что константа интегрирования равна нулю, то есть: $Q = const$.

Для того, чтобы определить, как ведет себя параметр порядка в зависимости от других параметров системы, а именно от температуры, необходимо решить

уравнение самосогласования, которое представлено в виде вариационной производной эффективного действия системы по амплитуде заряда в трансмиссионной линии.

Решением $\frac{\partial S_{eff}(Q)}{\partial Q} = 0$ уравнения будут являться экстремальные функции амплитуды заряда, которые минимизируют действие, то есть, в соответствии с теоремой Гамильтона, определяют тот параметр порядка, который соответствует, в итоге, уравнениям движения. Подставив в уравнения вид действия, получим:

$$\frac{\partial}{\partial Q} \frac{m\omega_0^2 Q^2}{2T} = \frac{\partial}{\partial Q} \left(N \ln(2) + N \frac{\varepsilon_{Cji}}{T} + \sum_{i=1}^N \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\} \right] \right). \quad (116)$$

Поварьировав левую часть уравнения, получим:

$$\frac{m\omega_0^2 Q}{T} = \frac{\partial}{\partial Q} \sum_{i=1}^N \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\} \right]. \quad (117)$$

Вариация правой части имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial Q} \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\} \right] = \frac{\gamma_i^2 Q}{4 \sqrt{\frac{1}{4} Q^2 \gamma_i^2 + \varepsilon_{ji}^2}} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\}. \quad (118)$$

Проварьированное уравнение имеет вид:

$$\frac{m\omega_0^2 Q}{T} = \sum_{i=1}^N \frac{Q \gamma_i^2}{4T \sqrt{\frac{1}{4} Q^2 \gamma_i^2 + \varepsilon_{ji}^2}} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2 \gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\}. \quad (119)$$

Производя необходимые преобразования, получим:

$$m\omega_0^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i^2}{4\sqrt{\frac{1}{4}Q^2\gamma_i^2 + \varepsilon_{ji}^2}} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2\gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\}. \quad (120)$$

Данное уравнение справедливо для ансамбля двухуровневых систем, которые отличаются энергетическими и прочими внутренними параметрами, такими, как индуктивности, емкость, величина критического тока. Положим ниже, что все системы идентичны, данное упрощение, конечно же, не соответствует реальной действительности, однако помогает произвести приблизительный расчет, который с высокой степенью точности справедлив и для неидентичных систем в том случае, когда они похожи друг на друга до степени смешения. Так как частиц в системе N , и они идентичны, сумму можно записать в виде:

$$m\omega_0^2 = \frac{N\gamma^2}{2\sqrt{Q^2\gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2\gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\}. \quad (121)$$

Из полученного уравнения самосогласования можно определить зависимость амплитуды заряда от температуры. Определим температуру, при которой амплитуда заряда исчезает, то есть становится равной нулю: $Q = 0$. Подставляя данное значение в уравнение самосогласования, получим:

$$m\omega_0^2 = \frac{N\gamma^2}{4\varepsilon_j} \tanh \left\{ \frac{\varepsilon_j}{T} \right\}. \quad (122)$$

Введем далее обозначение для удобства математических расчетов:

$$\frac{\gamma^2}{2m\omega_0^2} = U . \quad (123)$$

Напомним, что плазменная энергия одного джозефсоновского контакта имеет следующий вид:

$$\omega_p^2 = 2E_{Cj}E_j . \quad (124)$$

Таким образом, потенциальная энергия взаимного взаимодействия поля и контактов имеет следующий вид:

$$U = \frac{E_{Cj}}{2\omega_p^2} \omega_{Cj}^2 = \frac{E_{Cj}^3}{2\omega_p^2} = \frac{E_{Cj}^3}{4E_{Cj}E_j} = \frac{E_{Cj}^2}{4E_j} . \quad (125)$$

Из уравнения самосогласования следует, что температура, при которой амплитуда тока становится равной нулю, имеет следующий вид:

$$T_c = \frac{\varepsilon_j}{\operatorname{arctanh}\left(\frac{2\varepsilon_j}{NU}\right)} . \quad (126)$$

Подставляя обозначения, введенные выше, получим:

$$T_c = \frac{E_j}{2\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{N}\left(\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right)^2\right)} . \quad (127)$$

Напомним здесь, что энергетические характеристики зарядового кубита имеют следующий вид:

$$E_{Cj} = \frac{(2|e|)^2}{2C_j}, E_j = \frac{I_c}{2|e|\hbar}. \quad (128)$$

Рассмотрим два предельных соотношения. В том, случае, когда энергия кулоновского взаимодействия намного превышает джозефсоновской связи для одной системы, то имеем:

$$\frac{4}{N} \left(\frac{E_j}{E_{Cj}} \right)^2 \gg 1. \quad (129)$$

В данном случае критическая температура имеет вид:

$$T_c = \frac{E_j}{2}. \quad (130)$$

Отметим, что в данном случае критическая температура не зависит от количества двухуровневых систем.

Рассмотрим обратный случае, то есть вариант, когда сила джозефсоновской связи сильна для одной системы, тогда имеем:

$$\frac{4}{N} \left(\frac{E_j}{E_{Cj}} \right)^2 \ll 1. \quad (131)$$

Уравнение на критическую температуру не имеет точного решения, однако, можно воспользоваться разложением в ряд:

$$\operatorname{arctanh} \left(\frac{4}{N} \left(\frac{E_j}{E_{Cj}} \right)^2 \right) \approx \frac{4}{N} \left(\frac{E_j}{E_{Cj}} \right)^2. \quad (132)$$

В таком случае критическая температура будет иметь следующий вид:

$$T_c \cong \frac{E_j}{2} \frac{1}{\frac{4}{N} \left(\frac{E_j}{E_{Cj}} \right)^2} = \frac{NE_{Cj}^2}{8E_j}. \quad (133)$$

В данном случае видно, что критическая температура растет с ростом количества частиц в системе, однако этот рост не безграничен, так как он зависит от плотности двухуровневых систем во всем термостате и ограничивается сверху этой величиной. Это будет ярко продемонстрировано на примере потоковых кубитов.

Определив критическую температуру, определим далее то, как ведет себя амплитуда заряда вблизи критической температуры и какое максимальное значение она может иметь. Для этого необходимо рассмотреть уравнение самосогласования, которое является трансцендентным:

$$\frac{2\varepsilon_j}{NU} \sqrt{1 + \left(\frac{QY}{2\varepsilon_j} \right)^2} = \tanh \left\{ \frac{\varepsilon_j}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{QY}{2\varepsilon_j} \right)^2} \right\}. \quad (134)$$

Очевидно, что вблизи критической температуры амплитуда становится малой величиной, поэтому возможно использовать разложение в ряд по малому параметру. Так, левая часть может быть преобразована, в итоге имеем:

$$\frac{2\varepsilon_j}{NU} = \tanh \left\{ \frac{\varepsilon_j}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{QY}{2\varepsilon_j} \right)^2} \right\}. \quad (135)$$

Учитывая определение критической температуры, получаем следующее выражение:

$$\frac{Q\gamma}{E_j} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{T_c}{T}\right)}. \quad (136)$$

Введем далее для удобства произведения математических расчётов следующее обозначение: $Q\gamma = M$. Тогда температурная зависимость будет иметь следующий вид:

$$\frac{M}{E_j} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{T_c}{T}\right)}. \quad (137)$$

Как было указано выше, задачей исследовательской работы является определение термодинамических параметров системы. Это достижимо, используя соотношения из статистической физики. Имеется следующая статистическая сумма системы:

$$Z = \text{const} + \exp \left(-N \left\{ \frac{M^2}{4UT} + \frac{\varepsilon_{Cj}}{T} \right\} \right) \cosh^N \left\{ \frac{\sqrt{M^2 + E_j^2}}{2T} \right\}. \quad (138)$$

Свободная энергия Гельмгольца имеет вид:

$$F = -T \ln Z. \quad (139)$$

Положим, что свободный член имеет вид:

$$F_0 = -T \ln \text{const}. \quad (140)$$

Тогда

$$F = F_0 - T \ln \left[\exp \left(-N \left\{ \frac{M^2}{4UT} + \frac{\varepsilon_{Cj}}{T} \right\} \right) \cosh^N \left\{ \frac{\sqrt{M^2 + E_j^2}}{2T} \right\} \right]. \quad (141)$$

Положим, что свободная энергия кулоновского взаимодействия системы имеет вид:

$$F_{Cj} = N\varepsilon_{Cj}. \quad (142)$$

Тогда свободная энергия всей системы окончательно примет вид:

$$F = F_0 + F_{Cj} - \frac{NM^2}{4U} - TN \ln \cosh \left\{ \frac{E_j}{2T} \sqrt{1 + \left(\frac{M}{E_j} \right)^2} \right\}. \quad (143)$$

Энтропия системы и свободная энергия связаны следующим образом:

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (144)$$

А теплоемкость системы постоянного объема имеет вид:

$$C_v = T \frac{\partial S}{\partial T}. \quad (145)$$

Подставляя вид свободной энергии и производя необходимые вычисления, получим следующий вид энтропии исследуемой системы:

$$S|_{T=T_c} = N \left[\frac{2E_j^3}{E_{Cj}^2 T_c} + 2 \ln \left\{ ch \left(\frac{\sqrt{2}E_j}{2T_c} \right) \right\} - \frac{\sqrt{2}}{4} tgh \left(\frac{\sqrt{2}E_j}{2T_c} \right) \frac{E_j}{T_c} \right]. \quad (146)$$

Данная функция является гладкой и непрерывной, причем следует отметить, что при положительных значениях величины $\frac{\sqrt{2}E_j}{2T_c}$, она имеет положительные значения, то есть является строго положительной на положительной части оси абсцисс. Таким образом, из того, что энтропия является непрерывной функцией температуры, можно сделать вывод о том, что в системе наблюдается фазовый переход второго рода при критической температуре.

Скачок теплоёмкости в точке фазового перехода имеет вид:

$$\Delta C_v|_{T=T_c} = \frac{2NE_j^2}{T_c^2} \left\{ ch \left(\frac{\sqrt{2}E_j}{2T_c} \right) \right\}^{-2}. \quad (147)$$

Определим вид энтропии и теплоемкости в двух предельных случаях, то есть в случаях преобладания либо кулоновской энергии, либо энергии джозефсоновской связи.

В случае преобладания энергии джозефсоновского перехода, критическая температура имеет вид:

$$T_c = \frac{E_j}{2}. \quad (148)$$

В данной ситуации энтропия принимает вид:

$$S|_{T_c=\frac{E_j}{2}} = N \left[4 \frac{E_j^2}{E_{Cj}^2} + 2 \ln \{ ch(\sqrt{2}) \} - \frac{\sqrt{2}}{2} tgh(\sqrt{2}) \right]. \quad (149)$$

Если же ввести обозначение $s_{const} \approx 0.929$, то энтропия примет вид:

$$S|_{T_c=\frac{E_j}{2}} = N \left[\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^2 + s_{const} \right]. \quad (150)$$

Отметим, что энтропия растет линейно с числом частиц в системе и тем больше, чем сильнее энергия джозефсоновской связи, что естественно, так как данная энергия отвечает за связанность систем и чем она меньше, тем свободнее системы, тем больше беспорядке в системе, тем больше энтропия.

Скачок теплоемкости в данном случае имеет следующий вид и тоже линейно зависит от числа частиц в системе:

$$\Delta C_v|_{T_c=\frac{E_j}{2}} = 8N \{ch(\sqrt{2})\}^{-2}. \quad (151)$$

Если ввести обозначение $8\{ch(\sqrt{2})\}^{-2} \approx 1,68 = \Delta c_v$, то получим:

$$\Delta C_v|_{T_c=\frac{E_j}{2}} = N \Delta c_v. \quad (152)$$

Рассмотрим теперь случай доминирования энергии кулоновского взаимодействия. В данном случае критическая температура имеет вид:

$$T_c \cong \frac{E_j}{2} \frac{1}{\frac{4}{N} \left(\frac{E_j}{E_{Cj}} \right)^2} = \frac{NE_{Cj}^2}{8E_j}. \quad (153)$$

Энтропия принимает вид:

$$S|_{T=T_c} = \left(\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right)^4 + 2\ln\left\{ch\left(\frac{\sqrt{2}}{N}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^2\right)\right\} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right)^2 tgh\left(\frac{\sqrt{2}}{N}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^2\right), \quad (154)$$

а скачок теплоемкости принимает вид:

$$\Delta C_v|_{T=T_c} = \frac{8}{N}\left(\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right)^4 \left\{ch\left(\frac{\sqrt{2}}{N}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^2\right)\right\}^{-2}. \quad (155)$$

Так как $\frac{2E_j}{E_{Cj}}$ малая величина то возможно разложение в ряд всех функций, которые претерпевают такую операцию. Так для гиперболического косинуса имеем:

$$ch\left(\frac{\sqrt{2}}{N}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^2\right) \approx 1 + \frac{1}{N^2}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^4. \quad (156)$$

Выражение для логарифма принимает вид:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{N^2}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^4\right) \approx \frac{1}{N^2}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^4. \quad (157)$$

Для гиперболического тангенса справедлива замена:

$$tgh\left(\frac{\sqrt{2}}{N}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^2\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{N}\left[\frac{2E_j}{E_{Cj}}\right]^2. \quad (158)$$

Используя вышеполученных соотношения, получим для энтропии:

$$S|_{T=T_c} = \left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^4 + \frac{2}{N^2} \left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^4 - \frac{1}{N} \left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^4 = \left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^4 \left(1 - \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \right), \quad (159)$$

А для скачка теплоёмкости следующий вид:

$$\Delta C_v|_{T=T_c} = \frac{8}{N} \left(\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right)^4 \frac{1}{1 + \frac{2}{N^2} \left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^4 + \frac{1}{N^4} \left[\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right]^8}. \quad (160)$$

Скачок теплоемкости имеет максимальное значение при $N = \frac{\sqrt{A}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right)^2$ и равен:

$$\Delta C_{v\max} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A} = 2\sqrt{2} \left(\frac{2E_j}{E_{Cj}} \right)^2. \quad (161)$$

Опишем теперь фазовую диаграмму фазового перехода второго рода, происходящего данной системе. На фазовой диаграмме имеется две области: одна со значением параметра порядка, который не равен нулю, вторая — где он равен нулю. Параметром порядка выступает среднее значение заряда, переносимого трансмиссионной линией, причем этот параметр порядка не зависит от времени. Вблизи точки $T=0$ температурная зависимость имеет вид:

$$Q_{T=0,\max} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{(NU)^2 - 4\varepsilon_j^2}. \quad (162)$$

Учитывая вышесказанное, получим следующую фазовую диаграмму:

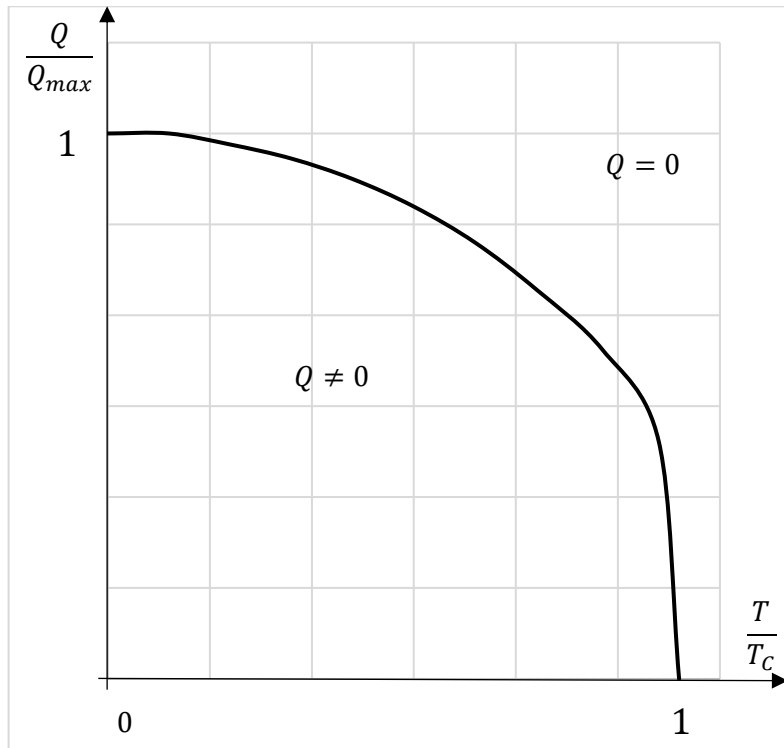


Рисунок 6 – фазовая диаграмма, показывающая области существования параметра порядка

Параметр Q назван параметром упорядочения, так как фазовый переход происходит по типу упорядочения, видно, что система при низких температурах ведет себя упорядочено, то есть когерентно. Физически это можно описать так, что когерентность фотонов при низких температурах высокая, но с ростом она начинает уменьшаться. Рост температуры может быть обусловлен ростом числа частиц в системе, энергией джозефсоновской связи и уменьшением кулоновской энергии. Таким образом, видно, что двухуровневые системы способствуют созданию когерентного излучения, причем чем большей кулоновской энергией они обладают, тем сильнее эффект когерентности.

1.1.5.2 Решение задачи с параметром порядка, зависящим от времени

Рассмотрим теперь второй случай — амплитуда заряда является функцией, зависящей от времени, причем при усреднении по отрезку времени, равному периоду этой функции, она равняется нулю. Таким образом, этот параметр порядка будет носить скрытый характер.

Так как в системе появилась степень свободы, явно зависящая от времени, уравнение Шредингера будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{i\partial t} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{i\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{cj} + \varepsilon_j & \frac{1}{2}Q\gamma \\ \frac{1}{2}Q\gamma & \varepsilon_{cj} - \varepsilon_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}. \quad (163)$$

Осуществив поворот Фаддеева, перейдем в пространство с комплексным временем, а именно в систему, в которой осуществлено преобразование $t \rightarrow \tau$, где τ время Мацубары. Тогда, гамильтониан примет вид:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial \tau} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial \tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{cj} + \varepsilon_j & \frac{1}{2}Q\gamma \\ \frac{1}{2}Q\gamma & \varepsilon_{cj} - \varepsilon_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}. \quad (164)$$

Данное уравнение ведет к дифференциальным уравнениям на функцию, описывающую поведение всей системы в целом. Данные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \partial_\tau \Phi_+ + \varepsilon_{cj} \Phi_+ + \varepsilon_j \Phi_+ + \frac{1}{2}Q\gamma \Phi_- = 0; \\ \partial_\tau \Phi_- + \varepsilon_{cj} \Phi_- - \varepsilon_j \Phi_- + \frac{1}{2}Q\gamma \Phi_+ = 0. \end{cases} \quad (165)$$

Последовательно вычитая и складывая 1 и 2 уравнения в системе, получим:

$$\begin{cases} \partial_\tau(\Phi_+ + \Phi_-) + \varepsilon_{cj}(\Phi_+ + \Phi_-) + \varepsilon_j(\Phi_+ - \Phi_-) + \frac{1}{2}Q\gamma(\Phi_+ + \Phi_-) = 0; \\ \partial_\tau(\Phi_+ - \Phi_-) + \varepsilon_{cj}(\Phi_+ - \Phi_-) + \varepsilon_j(\Phi_+ + \Phi_-) - \frac{1}{2}Q\gamma(\Phi_+ - \Phi_-) = 0. \end{cases} \quad (166)$$

Очевидно, что разумно осуществить следующую замену:

$$\begin{cases} \Phi_+ + \Phi_- = g_+; \\ \Phi_+ - \Phi_- = g_-. \end{cases} \quad (167)$$

Произведя вышеописанную замену, получим:

$$\begin{cases} \partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj}g_+ + \varepsilon_j g_- + \frac{1}{2}Q\gamma g_+ = 0; \\ \partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj}g_- + \varepsilon_j g_+ - \frac{1}{2}Q\gamma g_- = 0. \end{cases} \quad (168)$$

Из уравнений вышеописанной системы можно получить следующее:

$$\begin{cases} g_- = -\frac{1}{\varepsilon_j}(\partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj}g_+ + \frac{1}{2}Q\gamma g_+); \\ g_+ = -\frac{1}{\varepsilon_j}(\partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj}g_- - \frac{1}{2}Q\gamma g_-). \end{cases} \quad (169)$$

Подставляя последовательно первое и второе уравнение в систему:

$$\begin{cases} \partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj}g_+ + \varepsilon_j g_- + \frac{1}{2}Q\gamma g_+ = 0; \\ \partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj}g_- + \varepsilon_j g_+ - \frac{1}{2}Q\gamma g_- = 0. \end{cases} \quad (170)$$

Можно получить два уравнения, каждое из которых будет содержать только одну из компонент искомой функции. Первое уравнение имеет вид:

$$\partial_\tau \left(\partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj} g_- - \frac{1}{2} Q \gamma g_- \right) + a \left(\partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj} g_- - \frac{1}{2} Q \gamma g_- \right) - \varepsilon_j^2 g_- + \frac{1}{2} Q \gamma \left(\partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj} g_- - \frac{1}{2} Q \gamma g_- \right) = 0. \quad (171)$$

Раскрывая скобки первого слагаемого, получим:

$$\partial_\tau \left(\partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj} g_- - \frac{1}{2} Q \gamma g_- \right) = \partial_\tau^2 g_- + \varepsilon_{cj} \partial_\tau g_- - \frac{1}{2} \gamma (Q \partial_\tau g_- + g_- \partial_\tau Q). \quad (172)$$

Раскрывая скобки второго слагаемого, получим:

$$\varepsilon_{cj} \left(\partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj} g_- - \frac{1}{2} Q \gamma g_- \right) = \varepsilon_{cj} \partial_\tau g_- + \varepsilon_{cj}^2 g_- - \frac{1}{2} \gamma \varepsilon_{cj} Q g_- . \quad (173)$$

Раскрывая скобки третьего слагаемого, получим:

$$\frac{1}{2} Q \gamma \left(\partial_\tau g_- + a g_- - \frac{1}{2} Q \gamma g_- \right) = \frac{1}{2} Q \gamma \partial_\tau g_- + \frac{1}{2} Q \gamma \varepsilon_{cj} g_- - \frac{1}{4} Q^2 \gamma^2 g_- . \quad (174)$$

Сложение всех слагаемых, приведение подобных и упрощение, приводит к:

$$\partial_\tau^2 g_- - \frac{\gamma g_-}{4} (Q^2 \gamma + 2 \partial_\tau Q) + -\varepsilon_j^2 g_- + \varepsilon_{cj}^2 g_- + 2 \varepsilon_{cj} \partial_\tau g_- = 0 . \quad (175)$$

Подстановка второго значения во второе уравнение системы, приводит к:

$$\partial_\tau \left(\partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj} g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma g_+ \right) + a \left(\partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj} g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma g_+ \right) - \varepsilon_j^2 g_+ - \frac{1}{2} Q \gamma \left(\partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj} g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma g_+ \right) = 0 . \quad (176)$$

Раскрывая скобки в первом слагаемом, получим:

$$\partial_\tau \left(\partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj} g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma g_+ \right) = \partial_\tau^2 g_+ + \varepsilon_{cj} \partial_\tau g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma \partial_\tau g_+ + \frac{1}{2} \gamma g_+ \partial_\tau Q. \quad (177)$$

Раскрывая скобки во втором слагаемом, получим:

$$\varepsilon_{cj} \left(\partial_\tau g_+ + a g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma g_+ \right) = \varepsilon_{cj} \partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj}^2 g_+ + \frac{1}{2} \varepsilon_{cj} Q \gamma g_+. \quad (178)$$

Раскрывая скобки в третьем слагаемом, получим:

$$\frac{1}{2} Q \gamma \left(\partial_\tau g_+ + \varepsilon_{cj} g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma g_+ \right) = \frac{1}{2} Q \gamma \partial_\tau g_+ + \frac{1}{2} Q \gamma \varepsilon_{cj} g_+ + \frac{1}{4} Q^2 \gamma^2 g_+. \quad (179)$$

Сложение всех слагаемых, приведение подобных и упрощение, приводит к:

$$\partial_\tau^2 g_+ - \frac{\gamma g_+}{4} (Q^2 \gamma - 2 \partial_\tau Q) - \varepsilon_j^2 g_+ + \varepsilon_{cj}^2 g_+ + 2 \varepsilon_{cj} \partial_\tau g_+ = 0. \quad (180)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением на компоненту g_- , заметим, что их можно объединить общей записью, которая выглядит следующим образом:

$$\left(\partial_\tau^2 - \frac{\gamma}{4} (Q^2 \gamma \mp 2 \partial_\tau Q) - \varepsilon_j^2 + \varepsilon_{cj}^2 + 2 \varepsilon_{cj} \partial_\tau \right) g_\pm = 0. \quad (181)$$

Очевидно, что можно выделить полный квадрат:

$$\left((\partial_\tau + \varepsilon_{cj})^2 - \frac{\gamma}{4}(Q^2\gamma \mp 2\partial_\tau Q) - \varepsilon_j^2\right)g_\pm = 0. \quad (182)$$

Осуществив следующую подстановку $\frac{\gamma}{2}Q = M$ и :

$$g_\pm = v_\pm \exp(-i\varepsilon_{cj}\tau). \quad (183)$$

Можно перейти к уравнению:

$$(\partial_\tau^2 - (M \mp \partial_\tau M) - \varepsilon_j^2)v_\pm = 0. \quad (184)$$

Решение данного уравнения невозможно, если неизвестна функциональная зависимость $Q(\tau)$. В случае, когда параметр порядка не зависел от времени, он был определен из уравнения согласования, которое было получено варьированием действия по этому параметру порядка, то есть посредством определения минимума действия. Таким образом, параметр порядка должен быть такой функцией, которая минимизирует действие.

Эффективное действие в случае, когда амплитуда заряда зависит от времени, имеет вид:

$$S_{eff}(Q) = \int_0^T d\tau \left\{ \frac{m}{2}(\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2) - T \left(N \ln(2) + N \frac{\varepsilon_{cji}}{T} + \sum_{i=1}^N \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2\gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\} \right] \right) \right\}. \quad (185)$$

Уравнение на функцию $Q(\tau)$ имеет вид:

$$\frac{\partial S_{eff}(Q)}{\partial Q} = 0. \quad (186)$$

Комплекс вышеупомянутых условий приводит к тому, что функция $Q(\tau)$ принимает вид функции Вейерштрасса (данное утверждение было доказано Мухиным С.И.), а именно:

$$\frac{\gamma}{2}Q = 4nK(k_1)k_B T k_1 \operatorname{sn}\left(4nK(k_1)\frac{k_B T}{\hbar}\tau; k_1\right), \quad (187)$$

Где $k_1^2 = 1 - k^2$, $\operatorname{sn}\left(4nK\frac{k_B T}{\hbar}\tau; k_1\right)$ — эллиптическая функция Якоби, $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$ — первый эллиптический интеграл. T — температура, которая появляются в результате операции интегрирования при решении дифференциальных уравнений (40) — верхним пределом интеграла является величина $\frac{\hbar}{k_B T}$, n - количество периодов функции на интервале $(0, \frac{\hbar}{k_B T}]$.

В случае, когда свободный член в уравнении (40) положителен, то решение уравнения принимает следующий вид:

$$v_{1,2i} = \frac{\omega_{\pm i}(t)}{\sqrt{\mathcal{N}}} \exp\{\pm C_i(k) \int_0^{\tau} \varphi_{\pm i}(t_{\pm}) d\tau'\}. \quad (188)$$

где имеют место следующие обозначения

$$\omega_{\pm i}(t) = \sqrt{e_i - t_{\pm}}, \quad \varphi_i(t) = \frac{1}{e_i - t_{\pm}}, \quad t_{\pm} = \check{P}(\tau + \tau_{\pm}), \tau_{\pm} = \omega_{2,3} + \tau_0, \tau_0 = 0,$$

$$e_i = e_1 + \Delta_i^2, C_i(k) = \prod_{i=1}^3 \sqrt{(e_i - e_i)}, \quad \mathcal{N} = e_i - \bar{P}, \omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2), \quad (189)$$

$$\bar{P} = \int_0^{\omega_1} \frac{\check{P}(x + \omega_2) dx}{\omega_1} = e_1 - (e_1 - e_3) \frac{E(\tilde{k})}{K(\tilde{k})}. \quad \text{где} \quad \tilde{k}^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Индексы Флоке в данном случае имеют вид:

$$\alpha_i = 2k_B T n \tilde{\Delta}_i \left(\frac{k_1^2 + \tilde{\Delta}_i^2}{1 + \tilde{\Delta}_i^2} \right)^{1/2} \Pi \left(\frac{k^2}{1 + \tilde{\Delta}_i^2}, k \right) + \varepsilon_{Cj}, \quad (190)$$

где имеют место следующие обозначения:

$$\tilde{\Delta}_i = \frac{\varepsilon_j}{2k_B T n K(k)}; \quad k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}; \quad (191)$$

$\Pi(c, k)$ — это полный эллиптический интеграл третьего рода. Ниже приведен его явный вид в форме Якоби.

$$\Pi(c, k) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}, \quad (192)$$

c — это характеристика интеграла и может принимать любое значение, независимо от аргумента, однако область его значений ограничена физическими соображениями. Свойства эллиптического интеграла 3-го рода существенно зависят от величины характеристики.

Решив уравнения, можно перейти к уравнениям согласования, сущность которых сводиться к минимизации действия по параметрам $Q(\tau)$, достигаемой взятием вариации с дальнейшим использованием теории возмущения для определения значения вариации индекса Флоке по $Q(\tau)$. Итак, действие по заряду имеет вид:

$$\frac{\delta}{\delta Q} \left[\int_0^{h/k_B T} \frac{d\tau}{2m} [Q^2] - T \sum_i \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} \right] \right] = \frac{\delta S}{\delta Q}. \quad (193)$$

Применив новые обозначения и сняв вариацию, получим:

$$\int_0^{h/k_B T} \frac{d\tau}{4U} [\gamma^2 Q^2] - T \sum_i \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} \right] = S. \quad (194)$$

Вычислим интеграл, являющийся первым слагаемым, используя соотношения для функции Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} \int_0^\beta Q^2(\tau) d\tau &= \int_0^\beta (2Q(\tau + \tau_+) + e_1 - \partial_\tau Q) d\tau = \beta e_1 + \int_0^\beta 2Q(\tau + \tau) d\tau = \\ &= \beta \left(3e_1 - 2(e_1 - e_3) \frac{E(k)}{K(k)} \right) = (2nK(k)T)^2 \left(2 - k^2 - 2 \frac{E(k)}{K(k)} \right). \end{aligned} \quad (195)$$

Подставляя полученный результат в выражение для действия, получим:

$$\frac{(\gamma n K(k) T)^2}{U} \left(2 - k^2 - 2 \frac{E(k)}{K(k)} \right) - T \sum_i \ln \left[\cosh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} \right] = S. \quad (196)$$

$$\alpha = 2k_B T n \tilde{\Delta}_i \left(\frac{k_1^2 + \tilde{\Delta}_i^2}{1 + \tilde{\Delta}_i^2} \right)^{1/2} \Pi \left(\frac{k^2}{1 + \tilde{\Delta}_i^2}, k \right). \quad (197)$$

Варьируя действие по полю Хаббарда-Стратоновича (параметру порядка исследуемой системы), получим следующее тождество:

$$\frac{\gamma^2 Q(\tau)}{2UT} - \sum_i \frac{\delta \alpha_i}{\delta Q(\tau)} \tanh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} = 0. \quad (198)$$

где U — энергия взаимодействия системы с полем, которая точно определяется в работе [19].

В уравнении самосогласования нужно найти вариацию индекса Флоке по полю M . Найдем её. Имеем уравнение Шредингера:

$$(\partial_\tau + \hat{H})\Psi = T\alpha\Psi. \quad (199)$$

Для отыскания решения выше поставленной задачи, воспользуемся методами теории возмущения квантовой механики, а именно: представим гамильтониан в виде суммы невозбужденной части и небольшого возмущения:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{\delta}. \quad (200)$$

Тогда:

$$(\partial_\tau + \hat{H}_0)\psi_{0i} = T\alpha_0\psi_{0i}; \quad (201)$$

$$(\partial_\tau + \hat{H}_0 + \hat{\delta})\psi = T\alpha\psi. \quad (202)$$

где положено, что $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$. Очевидно, что в нулевом приближении по ψ , получим:

$$(\partial_\tau + \hat{H}_0 + \hat{\delta})\psi_{0i} = T(\alpha_0 + \alpha_1)\psi_{0i}, \quad (203)$$

$$\hat{\delta}\psi_{0i} = T\alpha_1\psi_{0i}. \quad (204)$$

Умножая слева данное уравнение на ψ_{0i}^T , получим

$$\psi_{0i}^T \hat{\delta}\psi_{0i} = T\alpha_1 \psi_{0i}^T \cdot \psi_{0i}. \quad (205)$$

где оператор имеет следующий вид:

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \psi_{0i}^T = (v_{+i} \quad v_{-i}). \quad (206)$$

В результате получаем:

$$(v_{+i} \quad v_{-i}) \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{+i} \\ v_{-i} \end{pmatrix} = T\alpha_1 \psi_{0i}^T \cdot \psi_{0i}. \quad (207)$$

После перемножения матриц видим, что

$$\psi_{0i}^T \hat{\delta} \psi_{0i} = -\delta(|v_{+i}|^2 - |v_{-i}|^2), \quad (208)$$

$$\psi_{0i}^T \cdot \psi_{0i} = 2\omega_{+i}(0)\omega_{-i}(0). \quad (209)$$

В результате, после подстановки в уравнение (207) тождеств (208) и (209) получаем выражение для вариации:

$$\frac{\delta\alpha_i}{\delta Q(\tau)} = \frac{|v_{+i}|^2 - |v_{-i}|^2}{2\omega_{+i}(0)\omega_{-i}(0)}. \quad (210)$$

Подставляя в явном виде решения, полученные для исследуемой системы, явный вид параметра порядка, а также пользуясь соотношениями функции Вейерштрасса, получим

$$\frac{|v_{+i}|^2 - |v_{-i}|^2}{2\omega_{+i}(0)\omega_{-i}(0)} = \frac{(\partial_\tau + \gamma Q(\tau))(e - P(\tau; k))}{2\omega_{+i}(0)\omega_{-i}(0)\tilde{\Delta}_i^3}. \quad (211)$$

где: $e = e_1 + \tilde{\Delta}_i^2$; $P(\tau; k)$ — функция Вейерштрасса; e_1 — первый полупериод функции; k — параметр функции.

Пользуясь равенством: $(\partial_\tau + \gamma Q(\tau))(e - P(\tau; k)) = \gamma Q(\tau)\tilde{\Delta}_i^2$, получим в итоге уравнение самосогласования для исследуемой системы:

$$\frac{\gamma Q(\tau)}{2UT} - \sum_i \tanh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} \frac{\gamma Q(\tau) \tilde{\Delta}_i^2}{2\omega_{+i}(0)\omega_{-i}(0)\tilde{\Delta}_i^3} = 0. \quad (212)$$

Данное выражение можно преобразовать, сокращая поле Хаббарда-Стратоновича. Прделав данную операцию, приходим к виду:

$$\frac{1}{UT} - \sum_i \tanh \left\{ \frac{\alpha_i \{Q\}}{2T} \right\} \frac{\tilde{\Delta}_i}{\sqrt{(\tilde{\Delta}_i^2 + 1)(\tilde{\Delta}_i^2 + k_1^2)}} = 0. \quad (213)$$

Исследовать полученное уравнение самосогласования можно, устремляя значение параметра k_1 к его пределам, а именно к 0 или 1. Так в случае, когда $k_1 \rightarrow 0$, уравнение преобразуется в уравнение самосогласования для амплитуды, независимой от времени, то есть осуществляется переход в классический случай. Таким образом, очевидным является вывод о том, что случай, когда параметр порядка зависит от времени является более общим и включает в себя тот, когда он не зависит от времени.

$$m\omega_0^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i^2}{4\sqrt{\frac{1}{4}Q^2\gamma_i^2 + \varepsilon_{ji}^2}} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{Q^2\gamma^2 + 4\varepsilon_j^2}}{2T} \right\}. \quad (214)$$

Устремив теперь параметр к другому пределу $k_1 \rightarrow 1$, получим следующую зависимость:

$$\frac{1}{U} - \sum_i \tanh \left\{ \frac{\varepsilon_{ji}}{2T} \right\} \frac{\varepsilon_{ji}}{\varepsilon_{ji}^2 + (\pi n T)^2} = 0. \quad (215)$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{\varepsilon_j}{2T} \ll 1$, в этом случае можно воспользоваться уравнением в ряд, а, полагая, что все системы являются идентичными, можно снять сумму:

$$\frac{1}{U} - \frac{\varepsilon_j}{2T} \frac{N\varepsilon_j}{\varepsilon_j^2 + (\pi n T)^2} = 0. \quad (216)$$

Данное уравнение преобразуется в кубическое:

$$T^3(\pi n)^2 + \varepsilon_j^2 T - 2UN\varepsilon_j^2 = 0. \quad (217)$$

Напомним, что данное уравнение есть уравнением самосогласования, то есть оно с одной стороны позволяет найти функциональный вид параметра порядка, а с другой, значение критической температуры, а именно, разрешая уравнение (230), получим:

$$T_c^{QOP} \approx \left(\frac{\varepsilon_j^2 UN}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (218)$$

Параметр порядка меняется скачком при данной критической температуре (этот результат получается, если подставить данное значение температуры в выражение для параметра порядка), из чего следует, что фазовый переход, происходящий в точке фазового перехода, является фазовым переходом первого рода. Температура в обычных обозначениях имеет вид:

$$T_c^{QOP} \approx \left(\frac{E_j E_{Cj}^2 N}{16\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (219)$$

Фазовая диаграмма фазового перехода первого рода имеет следующий вид:

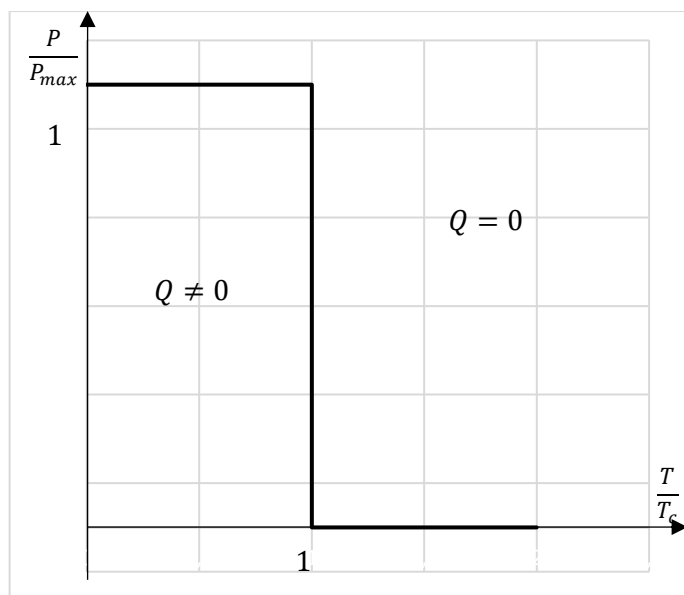


Рисунок 7 – Фазовая диаграмма фазового перехода первого рода

1.2 Изучение системы с потоковыми кубитами >>

В данной научно-исследовательской работе рассматривается поведение ансамбля двухуровневых систем (Two Levels Systems или *TLS*).

Двухуровневая система — это простейшая квантовомеханическая система, имеющая только два энергетических уровня. Такая модель адекватна при выполнении следующих условий:

- а) спектр квантовой системы существенно неэквидистантен;
- б) переходами с первого и второго уровней системы на другие можно пренебречь.

На рис. 21 изображен весьма характерный потенциал, в котором реализуется *TLS* система. Как можно видеть, имеется два минимума, расположенных на разных уровнях относительно друг друга. В квантовой системе

с таким потенциалом, в каждой яме реализуется два энергетических уровня, которые и являются непосредственными атрибутами *TLS* системы.



Рисунок 8 – Характерный потенциал *TLS*

Двухуровневые системы могут быть реализованы посредством большого числа физических систем, одной из которых является — *RF SQUID* (Superconducting Quantum Interference Device — сверхпроводящее квантовое интерференционное устройство). Сквиды образуют два крупных класса: одноконтатных и двухконтатных сквидов. Далее в работе рассматриваются только одноконтатные (рис. 22).

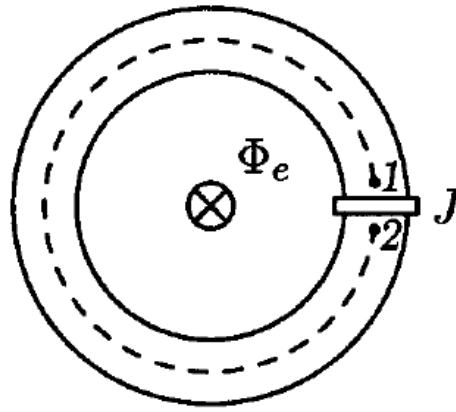


Рисунок 9 – Одноконтный сквид: сверхпроводящее кольцо, замкнутое джозефсоновским переходом J . Внутри кольца введен элемент индуктивности, создающая внешний поток Φ_{ext}

1.2.1 Механическое описание потокового кубита

Эволюцию высокочастотного сквида естественно рассматривать с помощью лагранжиана. Так как в работе рассматривается ансамбль, то есть конечная совокупность, высокочастотных сквидов, то здесь и далее изучается лагранжиан совокупности:

$$L_{SQUID} = E_J \sum_i \left(\frac{1}{2\omega_p^2} [\dot{\varphi}_i]^2 - \frac{1}{2\beta_L} [\varphi_i - \varphi_{ext}]^2 - [1 - \cos \varphi_i] \right), \quad (220)$$

где $\varphi_i = \frac{2\pi\Phi_i}{\Phi_0}$, Φ_i — полный поток магнитного поля через контур сквида, Φ_0 — квант потока магнитного поля, β_L — безразмерный коэффициент индуктивности сквида, φ_{ext} — фаза, соответствующая суммарному вкладу в эффект Джозефсона от постоянного внешнего магнитного поля и переменного магнитного поля, создаваемого током, текущим по резонатору (далее описывается

резонатор), $\omega_p = \left(\frac{2\pi I_c}{C\Phi_0}\right)^{1/2}$ — плазменная частота Джозефсоновского перехода, C — емкость сверхпроводящего контура, I_c — сверхтока через мостик сечения площадью S , плотность которого равна $j_c = \frac{|\alpha|\hbar e}{\beta m} \text{Im}(\psi^* \nabla \psi)$, ψ — волновая функция сверхпроводящих электронов (параметры α и β являются коэффициентами в разложении в ряд Тейлора свободной энергии сверхпроводника соответственно при квадратичном и биквадратичном членах), m — масса куперовской пары, $E_j = \frac{\hbar I_c}{2e}$ — максимальная величина понижения энергии перехода за счет наличия слабой связи между сверхпроводящими берегами в контакте Джозефсона.

Первый и второй член в сумме легко пояснить на аналогии между сквидом и маятником. Видно, что если за обобщенную координату принять разность фаз волновых функций, то получим кинетическую и потенциальную энергию маятника.

Последний член в сумме лагранжиана представляет собой свободную энергию джозефсоновского контакта, имеет гармонический вид в силу того, что после интегрирования произведения тока и напряжения по времени, синусоидальная зависимость превращается в косинуноидальную, джозефсоновский переход является фактически нелинейной индуктивностью, запасающей энергию при переходе тока через него.

В потенциальной энергии лагранжиана совокупности сквидов есть два параметра — это β_L и φ_{ext} . Потенциальная энергия сквида формируется из двух слагаемых: параболического по фазе и гармонического, т.е. $1 - \cos(\varphi)$. Сумма этих двух вкладов имеет следующий вид, изображенный на рис. 24.

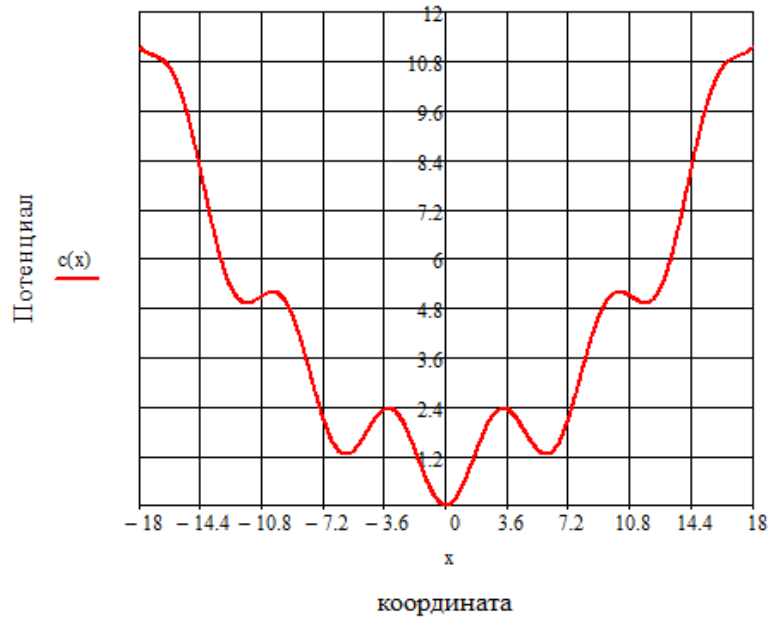


Рисунок 10 – Сложение параболического и гармонического вкладов

При изменении параметра β_L с потенциалом происходят изменения. С его ростом «параболический эффект» постепенно начинает пропадать. Это очевидно, так как если взять предел

$$\lim_{\beta_L \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\beta_L} [\varphi - \varphi_{ext}]^2 + [1 - \cos\varphi] \right) = [1 - \cos\varphi], \quad (221)$$

то становится очевидным вышеизложенный вывод относительно параболического вклада.

Влияние второго параметра сказывается на том, что вершина параболы $\frac{1}{2\beta_L} [\varphi - \varphi_{ext}]^2$ перемещается вдоль оси обобщенной координаты.

Коэффициент индуктивности сквида

$$\beta_L = \frac{2LI_c}{\Phi_0}, \quad (222)$$

Где L — это суммарная индуктивность сквида.

$$L = L_h + L_{sl} + L_j, \quad L_h = a\mu_0 d, \quad (223)$$

где L_h — геометрический вклад в индуктивность (a — параметр формы, μ_0 — магнитная постоянная, d — диаметр сквида); L_{sl} — индуктивность контакта, L_j — паразитная индуктивность. Очевидно, что влиять на величину параметр β_L можно только путем изменения геометрических параметров (так как паразитные индуктивности сложно свести к нулю, а индуктивность контакта является величиной, зависящей от технологии изготовления сквида, и определяется экспериментально).

Поясним, что

$$\begin{aligned} \varphi_{ext} &= \varphi_{ext}^{ac} + \varphi_{ext}^{dc}, \\ \varphi_{ext}^{ac} &= \frac{2\pi\Phi_{ac}}{\Phi_0}, \quad \varphi_{ext}^{dc} = \frac{2\pi\Phi_{dc}}{\Phi_0}, \end{aligned} \quad (224)$$

где φ_{ext}^{ac} — фаза, соответствующая вкладу в эффект Джозефсона от переменного магнитного поля, создаваемого током, текущим по резонатору; φ_{ext}^{dc} — фаза, соответствующая вкладу в эффект Джозефсона от постоянного внешнего магнитного. Следует отметить, что $\beta_L \geq 0$, а φ_{ext} может быть как больше, так и меньше нуля.

Значение параметров важно, так как именно они позволяют «настроить потенциал системы», то есть свести к потенциалу TLS .

1.2.2 Определение критических параметров, при которых w -потенциал преобразуется в двухямный

Критические параметры находятся в функциональной зависимости параметрической природы. В случае, когда β_L весьма велик, потенциал является периодическим в весьма точном приближении. Отыскание решения уравнения Шредингера для системы с гамильтонианом, получающимся из лагранжиана с последующим его квантованием, сводиться к задаче Феликса Блоха.

Таким образом параметр β_L является критическим, то есть совокупность сквидов становится ансамблем двухуровневых систем только в определенной значений β_L , то есть он должен быть достаточно мал, чтобы синусоидальный потенциал перешел в w -потенциал, и не очень велик, чтобы не пропадал синусоидальный эффект, и задача не сводилась к одноячному потенциалу.

Для того, чтобы сформировать w -потенциал естественно потребовать наличие трех корней у производной. Далее найдена параметрическая картина, то есть поле критических параметров. Попадание критических параметров в данную область является достаточным условием для того, чтобы задача не сводилась к задаче Феликса Блоха и необходимым для того, чтобы потенциал имел только 3, но не большее и не меньшее количество экстремумов, то есть сводилась бы к двухуровневой системе.

Определим область параметров.

Имеем потенциальную энергию

$$U(\varphi) = \frac{1}{2\beta_L} [\varphi - \varphi_{ext}]^2 + [1 - \cos\varphi], \quad (225)$$

область определения, которой совпадает с вещественной осью.

$$U'(\varphi) = \frac{1}{\beta_L} [\varphi - \varphi_{ext}] + \sin\varphi = 0, \quad (226)$$

1.2.3 Механическое описание резонатора с потоковыми кубитами

В данной работе, как было сказано выше, рассматривается ансамбль двухуровневых систем. Но до сих пор рассматривалась только совокупность высокочастотных сквидов. Система от совокупности отличается организацией, которая потенциально может быть установлена посредством тех или иных связей, взаимодействий.

Как правило, взаимодействие между сквидами устанавливается с помощью резонатора. Сильное взаимодействие дальнего порядка между хорошо разделенными сквидами (в системах квантовой логики — кубитами) обеспечивается резонатором (линией передачи) с помощью излучения (поглощения) виртуальных фотонов.

Одним из широких применений таких систем, как уже было выше сказано, является квантовая логика. Квантовая электродинамика цепей позволяет пространственно разделённым сверхпроводимым кубитам взаимодействовать через сверхпроводимый СВЧ-резонатор, который обеспечивает запутывание кубитов и реализацию простых квантовых алгоритмов. Было показано, что сильное взаимодействие между хорошо разделенными кубитами приводит к усилению квантово-механического туннелирования и пресечению декогеренции, индуцированной распространением параметров кубитов.

Поэтому весьма разумно включить в рассмотрение резонатор и определенные граничные условия, т.е. система нуждается в источнике тока или напряжения. Каждый из этих элементов сделает свой вклад в лагранжиан всей системы, которая будет состоять из высокочастотных кубитов, резонатора и источника напряжения.

Далее приведем лагранжиан для каждой из этих составляющих.

Итак, лагранжиан резонатора будет давать:

$$L_{ph} = m \left(\frac{1}{2} [\dot{Q}(t)]^2 - \frac{c^2 k_n^2}{2} [Q(t)]^2 \right), \quad m = \frac{L_0 l}{2}, \quad (227)$$

где $Q(t)$ — переменная плотность заряда, характеризующая резонатор, k_n — волновой вектор, c — скорость света, L_0 — индуктивность резонатора на единицу длины, l — длина резонатора. Далее вклад резонатора будет называться лагранжианом электромагнитного поля.

Лагранжиан взаимодействия, осуществляемого между резонатором и совокупностью одиночных скидков в данной модели будет иметь следующий вид:

$$L_{int} = - \sum_i \left(\frac{\eta L_0}{\Phi_0} \right) \frac{E_j}{\beta_L} \varphi_i \cos(k_i x_i) \dot{Q}(t), \quad (228)$$

где x_i — координата вдоль резонатора, соответствующая положению i - го скида, η — параметр взаимной индукции скидков и резонатора. Легко видеть, что в гамильтониан взаимодействия линейен для скидков и линейен для резонатора по отдельности. Однако этот факт не означает, что в данной системе не будут появляться солитонные решения, которые требуют для своего существования нелинейности и диссипативности. Нелинейность в данной системе обеспечивается сложным видом энергетической картины высокочастотного скида. Солитонное решение в данной системе существует, это аналог блоковских осцилляций.

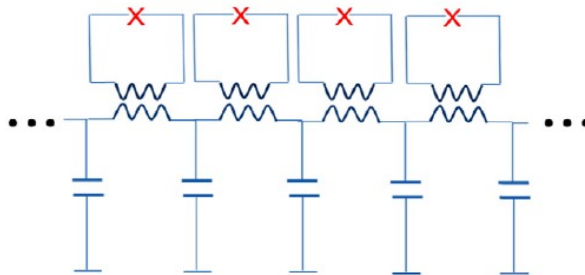


Рисунок 11 – Принципиальная схема части нашей системы — высокочастотные скидывы на резонаторе

Исследуемая в данной работе физическая система, как и любая другая, имеет связь с «внешним миром», которая выражается в наличии внешних полей, учтенных в функционале эволюции, и через граничные условия.

Таким образом, проанализировав понятие ансамбля двухуровневых систем, и определив структуру её физической сущности посредством построения её лагранжиана, можно сделать вывод о том, что эволюция TLS в данной физической реализации будет описываться лагранжианом:

$$L = L_{SQUID} + L_{ph} + L_{int} + L_{bd}, \quad (229)$$

где L_{bd} — вклад в лагранжиан, связанный с наличием источника напряжения, т.е. вклад, отражающий наличие граничного условия.

Далее, чтобы продолжить исследование данной системы, которая, как следует из её природы, является квантовой, следует перейти из формализма Лагранжа в формализм Гамильтониана, который легче поддается квантованию.

Как известно переход осуществляется с помощью преобразований Лежандра и имеет следующий вид:

$$H(p_i, q_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(\dot{q}_i, q_i, t), \text{ где } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (230)$$

В формуле (347) по неммым индексам идет суммирование. Легче всего преобразовать лагранжиан (344), где очевидно, что обобщенной координатой выступает — $Q(t)$, обобщенным импульсом — величина пропорциональная $\dot{Q}(t)$. Итак, если считать, что обобщенный импульс $P(t) = \frac{L_0 l}{2} \dot{Q}(t)$, то получим гамильтониан фотонного поля, т.е. электромагнитного поля излучаемого резонатором, в виде:

$$H_{ph} = \frac{P^2}{lL_0} + \frac{L_0 l c^2 k_n^2}{4} [Q(t)]^2. \quad (231)$$

Как известно, переход от классической физики к квантовой осуществляется посредством замены величин классической природы обобщенного импульса и координаты q -числами, то есть операторами. Вместе с тем для операторов вводятся коммутационные соотношения.

Гамильтониан (348) можно переписать в виде:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 Q^2}{2}, \quad (232)$$

где введены следующие обозначения: $m = \frac{lL_0}{2}$, $\omega_0 = ck_n$.

Очевидно, что этот гамильтониан описывает гармонический осциллятор. И если теперь ввести операторы $\hat{P}, \hat{Q}$, то можно переписать гамильтониан с помощью операторов рождения и уничтожения для бозонов:

$$\hat{b}^+ = \frac{(\hat{P} + im\omega_0 \hat{Q})}{\sqrt{2\hbar\omega_0 m}}, \quad \hat{b} = \frac{(\hat{P} - im\omega_0 \hat{Q})}{\sqrt{2\hbar\omega_0 m}}. \quad (233)$$

Коммутационные соотношения имеют вид: $[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1$.

Итак, гамильтониан проквантован и принимает следующий вид:

$$\hat{H}_{ph} = \hbar\omega_0 \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right). \quad (234)$$

Гамильтониан для лагранжиана совокупности скиндов имеет вид:

$$H_{SQUID} = E_j \sum_i \left(\frac{1}{2\omega_p^2} [\dot{\varphi}_i]^2 + \frac{1}{2\beta_L} [\varphi_i - \varphi_{ext}]^2 + [1 - \cos\varphi_i] \right), \quad (235)$$

«Проквантуем» гамильтониан (352), для этого следует перейти к операторам, то есть осуществить преобразование:

$$\begin{cases} \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\omega_p}{E_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_i}; \\ \hat{\varphi}_i = \varphi_i. \end{cases} \quad (236)$$

Квантовый гамильтониан будет иметь следующий вид:

$$\hat{H} = E_j \sum_i \left\{ -2 \frac{\hbar^2}{E_j^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \varphi_i} + \left(\frac{1}{2\beta_L} [\varphi_i - \varphi_{ext}]^2 + [1 - \cos \varphi_i] \right) \right\}. \quad (237)$$

То есть уравнение Шредингера приобретёт следующий вид:

$$\hat{H}\Psi(\varphi) = E\Psi(\varphi). \quad (238)$$

Гамильтониана двухуровневой системы, получаемый численно для совокупности изолированных высокочастотных сквидов, выражается через матрицы Паули и имеет следующий вид:

$$\hat{H}_{SQUID} = \sum_i [\Delta_i \hat{\sigma}_x + \varepsilon_i \hat{\sigma}_z]. \quad (239)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &\approx \hbar\omega_p \left(1 - \frac{1}{\beta_L}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{4\sqrt{2}E_j}{\hbar\omega_p} \left(1 - \frac{1}{\beta_L}\right)^{\frac{3}{2}}\right), \\ \varepsilon &\approx \pi\sqrt{6} \left(1 - \frac{1}{\beta_L}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\phi_{ext}}{\phi_0} - 1\right). \end{aligned} \quad (240)$$

Δ — энергия, определяющая туннельную прозрачность, характеризующая способность волновой функции проходить сквозь барьер, разделяющий ямы в w -потенциале; ε — энергия между уровнями в TLS .

Данные коэффициенты, вычисляются численными методами при решении уравнения Шрёдингера.

Проквантовав гамильтонианы сквида и резонатора, можно перейти к аналогичной задаче для гамильтониана взаимодействия.

Как уже говорилось выше, в системе с сугубо нелинейным взаимодействием могут быть реализованы инстантонные решения. Взаимодействие также легко описать посредством инстантонов. В данной системе имеется два равновесных состояния, каждому из которых соответствует определённое значение энергии. Под взаимодействием понимается та или иная степень реального, то есть физического, влияния одного элемента системы на другой. Таким образом, резонатор влияет на совокупность сквидов через электромагнитное поле, положим, что характер физического воздействия проявляется в «перебросе» того или иного элемента из одного энергетического уровня на другой. Далее будет видно, что представление взаимодействия в инстантонной форме является удобным для Мацубаровского представления функций Грина, которые будут использоваться при поиске решения задачи.

Итак,

$$\hat{H} = i \sum_i \xi_i \hat{\sigma}_z (\hat{b} - \hat{b}^+), \quad (241)$$

где $\xi_i = \frac{E_J \eta (\delta\varphi) \sqrt{\hbar c k_n L_0 l}}{\beta_L \phi_0}$, а $\delta\varphi$ — разница фаз Джозефсоновского контакта между двумя равновесными состояниями.

Таким образом, проквантовав гамильтониан задачи, можно перейти непосредственно к её решению. Схема решения, а также необходимый математический аппарат будут описаны по ходу решения задачи.

1.2.4 Решение уравнения Шредингера системы с потоковыми кубитами

Решение задачи сводится к решению уравнения:

$$\begin{pmatrix} \hbar\partial_\tau + \varepsilon_i + \tilde{\eta}P(\tau) & \Delta_i \\ \Delta_i & \hbar\partial_\tau - (\varepsilon_i + \tilde{\eta}P(\tau)) \end{pmatrix} \Psi = 0. \quad (242)$$

где $\tilde{\eta} = \frac{E_j \eta(\delta\varphi)}{\beta_L \phi_0} \cos(k_n x)$ — параметр, характеризующий взаимодействие между волнами, порождаемыми резонатором, и двухуровневыми системами.

Решение уравнения легче искать, если оно имеет следующий вид:

$$U(\hbar\partial_\tau + \hat{H})U^\dagger \Psi = 0, \text{ где } U = U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (243)$$

Легко заметить, что с помощью преобразования $\Psi = \tilde{\Psi} e^{\frac{\tau E_j}{\hbar} \left(\frac{2\mu}{q}\right)^2}$, можно избавиться от отрицательного слагаемого, описывающего вклад граничного условия. Следует отметить, что множитель, представленный экспонентой, является комплексной функцией, так как $\tau = it$. В квантовой механике мнимое время τ получается из реального времени t через так называемый поворот Вика в комплексной плоскости на $\pi/2$: $\tau = it$. Можно показать, что при конечной температуре T функция Грина будет периодической по мнимому времени с периодом $2\beta = 2\hbar/k_B T$. Поэтому преобразования Фурье содержат только дискретный набор частот, который называется набором мацубаровских частот,

величина же обратная мацубаровским частотам, является мацубаровским временем (мнимым временем) с точностью до коэффициента 2π .

Тогда, если взять гамильтониан системы, полученный выше, и осуществить вышеуказанное преобразование, то выражение (360) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \hbar\partial_\tau + \Delta_i & \varepsilon_i + \tilde{\eta}P(\tau) \\ \varepsilon_i + \tilde{\eta}P(\tau) & \hbar\partial_\tau - \Delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (244)$$

Волновая функция всей систем, представлена вектором-столбцом $\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что имеется два уравнения и две неизвестных функции (компоненты волновой функции).

Всюду далее явная зависимость от мацубаровского времени не обозначена, однако это подразумевается. Данную систему уравнений можно диагонализировать согласно теоремам Филиппова.

Уравнение (244) эквивалентно системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \hbar\partial_\tau f_1 + \tilde{\eta}P(\tau)f_2 + \Delta_i f_1 + \varepsilon_i f_2 = 0; \\ \hbar\partial_\tau f_2 + \tilde{\eta}P(\tau)f_1 - \Delta_i f_2 + \varepsilon_i f_1 = 0. \end{cases} \quad (245)$$

$$\begin{cases} \hbar\partial_\tau(f_1 - f_2) - \tilde{\eta}P(\tau)(f_1 - f_2) + \Delta_i(f_1 + f_2) - \varepsilon_i(f_1 - f_2) = 0; \\ \hbar\partial_\tau(f_1 + f_2) + \tilde{\eta}P(\tau)(f_1 + f_2) + \Delta_i(f_1 - f_2) + \varepsilon_i(f_1 + f_2) = 0. \end{cases} \quad (246)$$

Данная система была получена взаимным последовательным вычитаем уравнений, получаемых из (246) при раскрытии матричного произведения. Далее положим, что

$$g_\pm = f_1 \pm f_2. \quad (247)$$

Тогда

$$\begin{cases} \hbar\partial_\tau g_- - \tilde{\eta}P(\tau)g_- + \Delta_i g_+ - \varepsilon_i g_- = 0; \\ \hbar\partial_\tau g_+ + \tilde{\eta}P(\tau)g_+ + \Delta_i g_- + \varepsilon_i g_+ = 0. \end{cases} \quad (248)$$

Выражая далее из системы уравнений (248) функции g_+ , g_- :

$$\begin{cases} [-\hbar\partial_\tau + \tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i] \frac{g_-}{\Delta_i} = g_+; \\ [-\hbar\partial_\tau - \tilde{\eta}P(\tau) - \varepsilon_i] \frac{g_+}{\Delta_i} = g_-. \end{cases} \quad (249)$$

Осуществляя ещё одну подстановку: уравнения (248) в систему (249), получим:

$$\begin{cases} [-\hbar^2\partial_\tau^2 - \tilde{\eta}\partial_\tau P(\tau) + (\tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i)^2 + \Delta_i^2]g_+ = 0; \\ [-\hbar^2\partial_\tau^2 + \tilde{\eta}\partial_\tau P(\tau) + (\tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i)^2 + \Delta_i^2]g_- = 0. \end{cases} \quad (250)$$

Таким образом, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} [-\hbar^2\partial_\tau^2 - \hbar\tilde{\eta}\partial_\tau P(\tau) + (\tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i)^2 + \Delta_i^2]g_+ = 0; \\ [-\hbar^2\partial_\tau^2 + \hbar\tilde{\eta}\partial_\tau P(\tau) + (\tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i)^2 + \Delta_i^2]g_- = 0. \end{cases} \quad (251)$$

Легко видеть, что уравнения могут быть записаны в виде:

$$[-\hbar^2\partial_\tau^2 - Q_\pm + \Delta_i^2]g_{\pm i} = 0, \quad (252)$$

где

$$\begin{aligned} Q_+ &= -\hbar\tilde{\eta}\partial_\tau P(\tau) + (\tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i)^2; \\ Q_- &= \hbar\tilde{\eta}\partial_\tau P(\tau) + (\tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i)^2. \end{aligned} \quad (253)$$

Однако, очевидно, что можно осуществить замену:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}P(\tau) + \varepsilon_i &= \tilde{\eta}\tilde{M}(\tau); \\ \hbar\partial_\tau P(\tau) &= \hbar\partial_\tau \tilde{M}(\tau), \end{aligned} \quad (254)$$

а также замену $\tilde{\eta}\tilde{M}(\tau) = M(\tau)$ (272), которые приводят к равенствам:

$$\begin{aligned} Q_+ &= -\hbar\partial_\tau M(\tau) + M^2(\tau); \\ Q_- &= \hbar\partial_\tau M(\tau) + M^2(\tau). \end{aligned} \quad (255)$$

Рассмотрим сначала более простой случай: $M \neq M(\tau)$ (255), то есть случай, когда импульс электромагнитного поля не зависит от τ .

Имеем систему уравнений на функции f_1, f_2 :

$$\begin{pmatrix} \hbar\partial_\tau + \Delta_i & \varepsilon_i + \tilde{\eta}P(\tau) \\ \varepsilon_i + \tilde{\eta}P(\tau) & \hbar\partial_\tau - \Delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (256)$$

которая приводится к следующему виду:

$$[-\hbar^2\partial_\tau^2 + (\tilde{\eta}P + \varepsilon_i)^2 + \Delta_i^2]g_{\pm i} = 0. \quad (257)$$

1.3 Сравнение систем с потоковыми и зарядовые кубитами

Видно, что система с потоковыми кубитами математически эквивалентна задаче с зарядовыми. Однако, в данной системе параметром порядка является обобщённый импульс, получаемый в подсистеме фотонов. Этот обобщенный импульс физически эквивалентен импульсу электромагнитного поля.

Таким образом, температура фазового перехода первого рода равна:

$$T_c = m\tilde{\eta}^2 N, \quad (258)$$

а второго:

$$T_c^{QOP} \approx \left(\frac{\Delta^2 m \tilde{\eta}^2 N}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (259)$$

Подробное исследование изложено в работе [19].

2.1 Волновое уравнение системы.

Для того чтобы изучить физические свойства системы, например, прозрачность резонатора, мы подключим его к трансмиссионной линии индуктивным способом:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = k \delta(x - x_0) Q(t) . \quad (260)$$

Подключение к трансмиссионной линии возможно как индуктивным, так и емкостным способом, однако его лучше подбирать согласно виду взаимодействия внутри системы. В силу того/, что в нашем случае взаимодействие носит индукционный характер, то и соединение было выбрано в качестве индуктивного, k - константа характеризующая силу индукционной связи линии и резонатора. Схема соединения линии и резонатора изображена ниже.

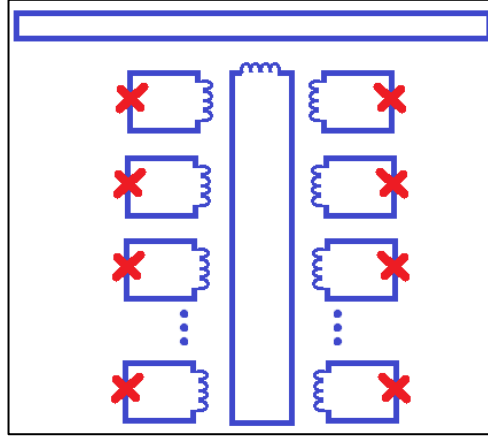


Рисунок 12 – Резонатор, подключенный к трансмиссионной линии

Гамильтониан этой системы может быть записан в следующем виде:

$$H = H_0 - kq(t)Q(t) . \quad (261)$$

Где $kq(t)Q(t)$ сила взаимодействия между резонатором и трансмиссионной линией. Легко получить уравнения движения из данного гамильтониана. Для разрешения уравнения запишем его в Фурье-образах. Положим, что $q(x, t) = q(x)e^{i\omega t}$, и напомним уравнение в форме:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} q(x) - \frac{d^2 q}{dx^2} = k \delta(x - x_0) \langle Q(t) \rangle , \quad (262)$$

где

$$\langle Q(t) \rangle = \int_0^t ds \chi_{QQ}(t - s) q(s) , \quad (263)$$

И $\chi_{QQ}(t, s)$ корреляционная функция, которая определяется как

$$\chi_{QQ}(t, s) = \frac{i}{\hbar} \langle [Q(t), Q(s)] \rangle . \quad (264)$$

Рассмотрим несколько возможных решений этого уравнения, положим в первом, что амплитуда статична во времени, а именно: $\dot{Q} = 0$ и нет ДУС в резонаторе. Этот случай является наиболее простым, так как в этом случае нет взаимодействия между ДУС и электромагнитной волной. Эффективное действие принимает вид:

$$S = \int_0^T d\tau (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2). \quad (265)$$

А корреляционная функция может быть переписана в следующей форме:

$$\chi_{QQ}(t - s) = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0(s-t)} . \quad (266)$$

А уравнение движения приобретает вид:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} q(x) + b(\omega) q(x) = 0 , \quad (267)$$

$$\text{где } b(\omega) = \frac{k}{2\omega_0(\omega - \omega_0)}.$$

Для трансмиссионной линии мы можем записать уравнение Шредингера с δ -образным потенциалом, при этом единичной примесью будем считать резонатор с ДУС. Решение данного уравнения известно и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} q(x) = e^{i\omega x/c} + R e^{-i\omega x/c}, x < x_0; \\ q(x) = T e^{i\omega x/c}, x > x_0. \end{cases} \quad (268)$$

Известны также решения для сдвига фазы волны и коэффициента прохождения волны:

$$D(\omega) = |T|^2 = \frac{2i\omega/c}{b(\omega) + 2i\omega/c} . \quad (269)$$

$$\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{k}{4\omega_0\omega(\omega - \omega_0)c}\right) . \quad (270)$$

Мы можем также определить глубину минимума из уравнения:

$$2\omega_0(\omega - \omega_0) = 0, \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в резонаторе появились ДУС, но амплитуда по-прежнему не зависит от времени $\dot{Q} = 0$. В таком случае действие будет равно:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \omega_0^2 Q^2 - TN \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + E^2}}{2T} \right). \quad (271)$$

Имея действие, мы можем получить формулу для свободной энергии системы путем интегрирования:

$$F = \omega_0^2 Q^2 - TN \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + E^2}}{2T} \right). \quad (272)$$

Рассмотрим приближение, в котором $\frac{Q}{E} \sim 0$, таким образом, мы можем разложить в ряд второй член в свободной энергии и получить ее эффективную формулу:

$$F_{eff} = Q^2 \left(\omega_0^2 - \gamma \frac{N}{4E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right) \right), \quad (273)$$

где $F_{eff} = F + NT \ln \cosh \left(\frac{E}{2T} \right)$. Введем понятие резонансной частоты:

$$\omega_R = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma \frac{N}{4E} \tanh \left(\frac{E}{2T} \right)} \quad (274)$$

Таким образом, эффективное действие:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \omega_R^2 Q^2. \quad (275)$$

А уравнение движения принимает следующую форму:

$$\frac{d^2 q}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} q(x) - \frac{k\delta(x-x_0)q(x)}{2\omega_R(\omega-\omega_R)} = 0, \quad (276)$$

Так, когда $\omega_0 \rightarrow \omega_R$, то осуществляется переход в предыдущий случай, когда не было ДУС в резонаторе.

Рассмотрим теперь случай, когда $\dot{Q} \neq 0$, но $\frac{Q}{E} \sim 0$. Тогда эффективное действие принимает следующую форму:

$$S = \int_0^{\frac{1}{T}} \frac{d\tau}{2} (\dot{Q}^2 + \omega_0^2 Q^2) - TN \ln \cosh \left(\frac{\sqrt{\gamma Q^2 + E^2}}{2T} \right) \quad (278)$$

И эффективная функция свободной энергии принимает следующий вид:

$$F_{eff} = P^2 - U(Q), \quad U(Q) = \frac{|\omega_R^2|}{2} Q^2 + Q^4 \frac{\lambda}{4!}, \quad (279)$$

где

$$\frac{\omega_R^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2} - \gamma \frac{N}{4E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) \quad (280)$$

и

$$\frac{\lambda}{4!} = -N \left(\frac{\gamma}{4E}\right)^2 \left(\frac{1}{2T} - \frac{1}{E} \tanh\left(\frac{E}{2T}\right) - \frac{1}{2T} \tanh^2\left(\frac{E}{2T}\right)\right). \quad (281)$$

Необходимо отметить, что $\lambda(T) > 0$, этот факт продемонстрирован на нижеследующем графике.

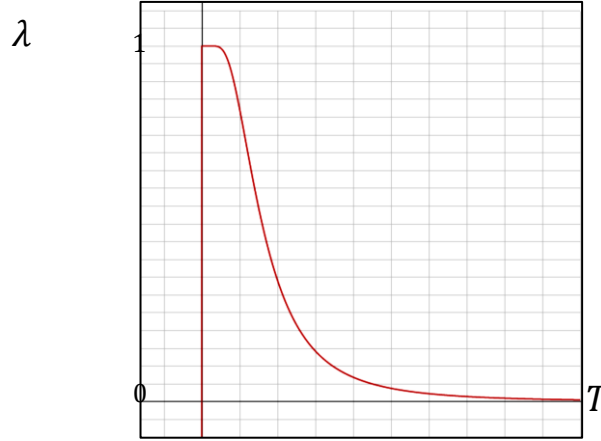


Рисунок 13 – Функция $\frac{E}{4!N\left(\frac{\gamma}{4E}\right)^2} \lambda\left(\frac{2T}{E}\right)$.

Изучим теперь зависимость резонансной частоты от температуры $\omega_R(T)$. Известно, что в нашей системе есть фазовый переход с критической температурой $\frac{2T_c}{E} = \frac{1}{\operatorname{arctanh}\left(\frac{2\omega_0^2 E}{\gamma N}\right)}$. Этот фазовый переход был исследован в описании системы и постановке задачи в Главе 1. Температурные зависимости могут быть описаны следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} Y = \sqrt{1 - \frac{1}{\theta} \tanh\left(\frac{1}{X}\right)}, X > X_c; \\ Y = \sqrt{2\left(\frac{1}{\theta} \tanh\left(\frac{1}{X}\right) - 1\right)}, X < X_c. \end{cases} \quad (282)$$

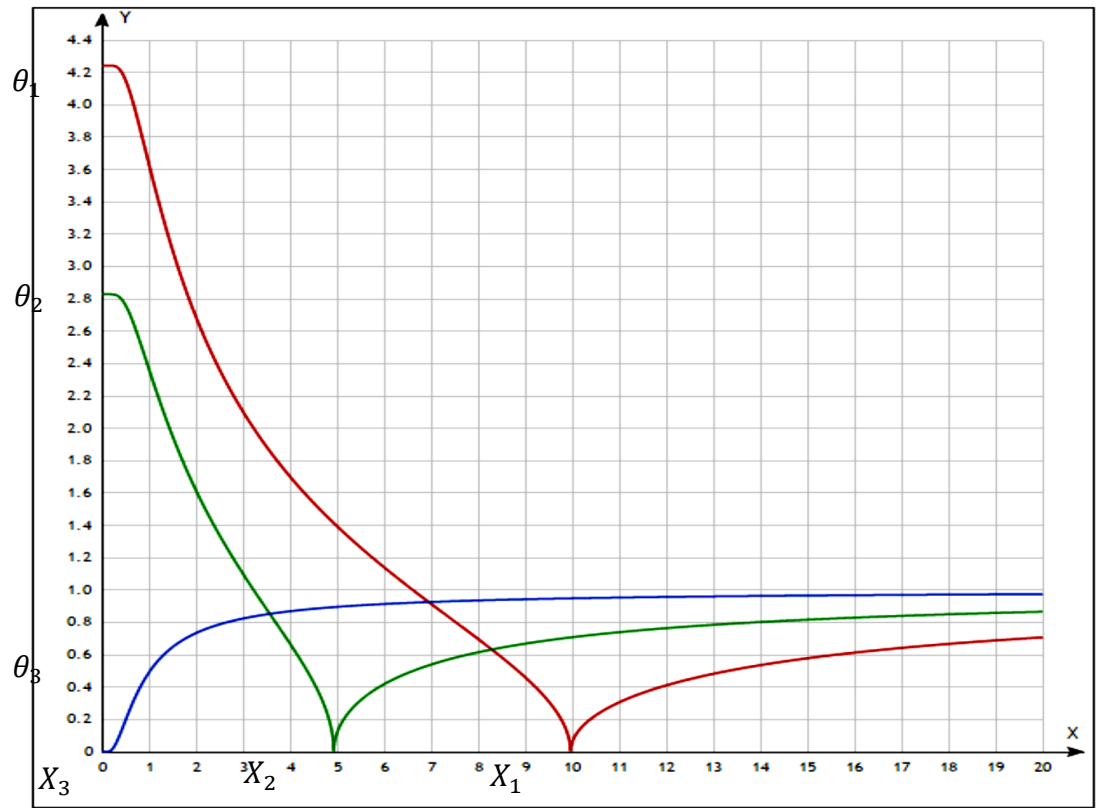


Рисунок 14 – Зависимость $\frac{|\omega_R|}{\omega_0} \left(\frac{2T}{E} \right)$ с учетом значения $\gamma \frac{N}{2\omega_0^2 E} = \frac{1}{\theta}$, $\theta < 1$

Поведение системы не может быть описано с помощью уравнения, в котором частота принимает комплексные значения (39) при температурах ниже температуры фазового перехода, таким образом ниже фазового перехода описание должно быть иным. Частоты фатонов вблизи минимума потенциала $U(q)$ (38) имеют следующее значение:

$$\omega_{ph} = \sqrt{\hbar} = \sqrt{2|\omega_R^2|} = \sqrt{2}|\omega_R|, \quad (283)$$

$$\text{где } \hbar = \frac{d^2 U}{dQ^2} \Big|_{Q=Q_0}.$$

Разница между энергетическими уровнями, созданными в виду расщепления низших уровней в системе, равна

$$\Delta_0 = \omega_{ph} e^{-D} \quad (284)$$

$$\text{Где } D = \int_{-a}^a |P| dQ \approx 2 \sqrt{\frac{|\omega_R^2|}{\lambda}} \quad (44).$$

Корреляционная функция может быть получена в следующем виде:

$$C(t) = \langle Q(t)Q(0) \rangle = \sum_n \rho_n \sum_m e^{i(E_n - E_m)t} |\langle m|Q|n \rangle|^2. \quad (285)$$

Мы будем считать только самые низкие уровни и следующие первые за ними, так как необходимо определение разницы в энергии между ними. Разница в уровнях равна:

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \omega_{ph} e^{-\omega_{ph} Q_0^2} \left[Q_0^2 |\omega_R^2| \left(\frac{1}{2\omega_{ph}} - Q_0^2 \right) - \frac{|\omega_R^2|}{\omega_{ph}} \left(\frac{3}{\omega_{ph}} - Q_0^2 \right) + \frac{3\lambda}{4! \omega_{ph}^2} \left(\frac{5}{2\omega_{ph}} - Q_0^2 \right) \right]. \quad (286)$$

Имея в виду, что $\omega_{ph} Q_0^2 \gg 1$, получим

$$\Delta_1 = -\frac{Q_0^4 \omega_{ph}^3 \sqrt{\pi}}{4} e^{-\omega_{ph} Q_0^2}. \quad (287)$$

Имея все необходимые данные, мы можем получить полное определение корреляционной функции:

$$\begin{aligned} C(t) = & \left(\frac{1}{2} Q_0^2 e^{-i\Delta_0 t} + 4\omega_{ph} Q_0^4 e^{i\omega_{ph} t} \right) e^{-\frac{\Delta_0}{2T}} + \left(\frac{1}{2} Q_0^2 e^{i\Delta_0 t} + 4\omega_{ph} Q_0^4 e^{-i\omega_{ph} t} \right) e^{\frac{\Delta_0}{2T}} + \\ & + (4\omega_{ph} Q_0^4 e^{-i\omega_{ph} t} + 2^7 \omega_{ph}^2 Q_0^6 e^{i\Delta_1 t}) e^{\frac{\Delta_1 - 2\omega_{ph}}{2T}} + (4\omega_{ph} Q_0^4 e^{-i\omega_{ph} t} + \\ & 2^7 \omega_{ph}^2 Q_0^6 e^{-i\Delta_1 t}) e^{-\frac{\Delta_1 + 2\omega_{ph}}{2T}}. \end{aligned} \quad (288)$$

$$\text{Где } Q_0 = \pm \sqrt{\frac{6|\omega_R^2|}{\lambda}}.$$

2.2 Изучение дисперсионных соотношений в системе ДУС в резонаторе.

Рассмотрим модель, которая была описана выше в данной работе, а именно, описываемую следующей совокупностью Лагранжианов:

$$\mathcal{L}_1 = \sum_i \left[\frac{C_I}{2} \left(\frac{\hbar}{e} \dot{\phi}_i + \mu_i \right)^2 - E_j (1 - \cos \phi_i) \right], \quad (289)$$

$$\mathcal{L}_2 = \sum_i \left(\frac{L \dot{Q}_i^2}{2} - \frac{1}{2C} (Q_{i+1} - Q_i)^2 + Q_i \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}_i + Q_i \mu_i \right). \quad (290)$$

¹ MA Iontsev, SI Mukhin, and MV Fistul, Doubleresonance response of a superconducting quantum metamaterial: Manifestation of nonclassical states of photons, Physical Review B 94, 174510 (2016).

Из нее можно в итоге получить совокупный гамильтониан системы, состоящий из следующих частей:

$$H_J = \sum_i \left(\frac{\omega_p^2}{2E_{CJ}} (p_i - p_{0i})^2 + E_J (1 - \cos \varphi_i) \right). \quad (291)$$

Где $\frac{E_{CJ}}{\omega_p^2} v_{0i} = p_{0i}$.

$$H_{int} = -\tilde{\gamma} \sum_i \delta_{in} Q_n(t, x) p_i. \quad (292)$$

Где $\frac{\sqrt{\omega_0 E_{CJ}}}{\omega_p} = \tilde{\gamma}$ (9) сила взаимодействия.

Уравнение Шредингера принимает вид:

$$\frac{i\partial\Psi}{\partial t} = \left[\frac{\omega_p^2}{2E_{CJ}} (\hat{p} + \mu)^2 + E_J (1 - \cos \varphi) + \tilde{\gamma} Q(t, x) \hat{p} \right] \Psi. \quad (293)$$

Где $\Psi = \sum \Phi(t) f(\varphi)$ (11), в случае ДУС может быть записано в виде:

$$\Psi = \Phi_-(t) f_0(\varphi) + \Phi_+(t) f_1(\varphi). \quad (294)$$

В котором $f_0(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (1 + \exp(i\varphi))$ (15) – функция, описывающая нижнее состояние, и $f_1(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (1 - \exp(i\varphi))$ (16) – верхнее энергетическое состояние системы.

Введем обозначение $Q_i = \frac{2}{\gamma} M_i$, тогда эффективный гамильтониан взаимодействия с ДУС принимает вид:

$$H_{eff} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_j & -M \\ -M & \varepsilon_j \end{bmatrix}, \quad (295)$$

Если вся система может быть описана вектором $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_- \\ \Phi_+ \end{bmatrix}$, то уравнение шредингера принимает вид:

$$\begin{bmatrix} i \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & i \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_- \\ \Phi_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_j & -M \\ -M & \varepsilon_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_- \\ \Phi_+ \end{bmatrix}. \quad (296)$$

Учитывая то, что амплитуда электромагнитного поля изменяется адиабатически во времени, удовлетворяя условию $-\frac{|\omega_f - \varepsilon_J|}{\omega_f} \ll 1$, можно положить, что:

$$\begin{cases} \Phi_- = u_-(t)e^{\frac{i\omega_f t}{2}}; \\ \Phi_+ = u_+(t)e^{-\frac{i\omega_f t}{2}}. \end{cases} \quad (297)$$

И тогда

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_f M(\omega_f) e^{i\omega_f t}. \quad (298)$$

где $M(-\omega_f) = M^*(\omega_f)$ и $\Phi_+(0) = 0, \Phi_- = 1$.

Решение уравнения принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \Phi_+ = \frac{M^*}{2w} e^{-\frac{i\omega_f t}{2}} (e^{itw} - e^{-itw}) = e^{-\frac{i\omega_f t}{2}} \frac{M^*}{w} \text{sh}(iwt), \\ \Phi_- = \frac{1}{w} e^{\frac{i\omega_f t}{2}} (w \text{ch}(iwt) - a \text{sh}(iwt)). \end{cases} \quad (299)$$

А его финальная форма может быть изображена так:

$$\Psi(\varphi, t) = \frac{\Phi_-(t)}{2\sqrt{\pi}} (1 + \exp(i\varphi)) + \frac{\Phi_+(t)}{2\sqrt{\pi}} (1 - \exp(i\varphi)). \quad (300)$$

Оператор импульса имеет вид $\hat{p}_i = -i\omega_J \frac{d}{d\varphi}$, а его средние значения рассчитываются по формуле:

$$\bar{p} = \langle \Psi^* | \hat{p} | \Psi \rangle = -\frac{\omega_J}{2} |\Phi_+ - \Phi_-|^2. \quad (301)$$

Учитывая, что $\bar{p} + \mu_F = -\omega_J \frac{a(M^* e^{-i\omega_f t} + M e^{i\omega_f t})}{4(|M|^2 + a^2)}$ и $Q_i = \frac{2}{\gamma} M_i$, мы можем переписать уравнение движения:

$$\ddot{Q}_i - v_i^2 Q_i'' - \sum_k \delta_{ik} \frac{\tilde{\gamma}}{L_i} (\bar{p}_i + \mu_F) = 0. \quad (302)$$

В следующей форме:

$$\ddot{M}_i - v_i^2 M_i'' - \frac{1}{m} \sum_k \frac{\tilde{\gamma}\gamma}{2L_i} \delta_{ik} (\bar{p}_i + \mu_F) = 0. \quad (303)$$

где $\beta = \frac{\tilde{\gamma}\gamma}{8L_i} \omega_J$ – константа, описывающая связанность (каплинг).

Переписывая последнее уравнение в Фурье-форме, получим:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \frac{\beta}{m} \sum_k \delta(x - x_k) \int dt_1 K(t - t_1) M(x, t_1) = 0. \quad (304)$$

Где ядро имеет следующий вид:

$$K(t - t_1) = \pi \sin(E_J(t - t_1)) \operatorname{sgn}(t - t_1) e^{-\left| (t-t_1) \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + 4M^2} \right|}. \quad (305)$$

1. Рассмотрим систему, в которой соблюдается условия: $lk \ll 1$ и $\frac{2M}{t-t_1} \ll 1$.

Из уравнения движения получается следующее уравнение дисперсии:

$$\omega^2 - k^2 v^2 + \frac{\beta N}{ml} \int dt_1 K(t - t_1) e^{i\omega t_1} = 0. \quad (306)$$

$$\text{Где } K(t - t_1) = \pi \sin(E_J(t - t_1)) \operatorname{sgn}(t - t_1) e^{-\left| \frac{t-t_1}{\tau} \right|}. \quad (307)$$

Интегрируя его по t_1 , получим финальную форму:

$$\omega^2 - k^2 v^2 + \pi \frac{\beta N}{ml} \left(\frac{\omega + E_J}{(\omega + E_J)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \frac{\omega - E_J}{(\omega - E_J)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right) = 0. \quad (308)$$

Далее будем полагать, что диссипация равна $\frac{1}{E_J \tau} = 0,1$,

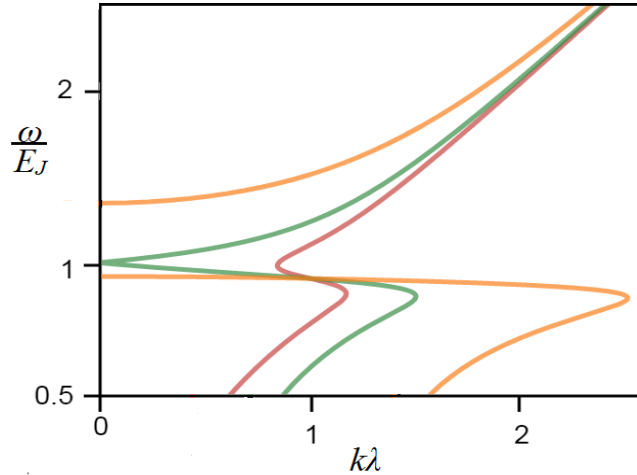


Рисунок 15 – $\theta = 0,1$ (красный) $\theta = 0,2641053$ (зеленый) $\theta = 1$ (желтый), $\frac{v}{E_J} = \lambda$, $\frac{\pi \beta N}{ml E_J^3} = \theta$.

В модели потоковых кубитов верно следующее соотношение $E_J = \sqrt{u^2 + p_0^2}$, а уравнение дисперсии с таким соотношением принимает вид:

$$\omega^2 - k^2 v^2 + \pi \frac{\beta N}{ml} \left(\frac{\omega + \sqrt{u^2 + p_0^2}}{\left(\omega + \sqrt{u^2 + p_0^2} \right)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \frac{\omega - \sqrt{u^2 + p_0^2}}{\left(\omega - \sqrt{u^2 + p_0^2} \right)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right) = 0. \quad (309)$$

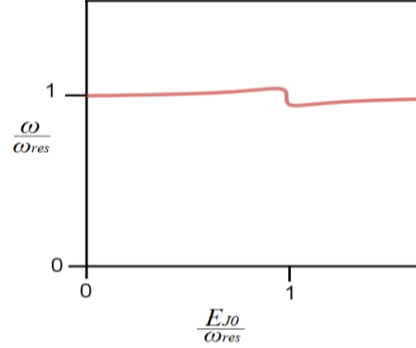


Рисунок 16 – $\theta = 0.02$, $\frac{p_0}{kv} = 0.1$, $\pi \frac{\beta N}{mlk^3 v^3} = \theta$.

Для сравнения дисперсионного соотношения в линейном случае мы также рассмотрим трансмонные кубиты, для которых верно следующее соотношение: $E_J = E_{J0} \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right|$. Так для них дисперсионное соотношение примет вид:

$$\frac{\omega^2}{k^2 v^2} - 1 + \pi \frac{\beta N}{mlk^3 v^3} \left(\frac{\frac{\omega}{kv} + \frac{E_{J0}}{kv} \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right|}{\left(\frac{\omega}{kv} + \frac{E_{J0}}{kv} \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right| \right)^2 + \frac{1}{k^2 v^2 \tau^2}} - \frac{\frac{\omega}{kv} - \frac{E_{J0}}{kv} \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right|}{\left(\frac{\omega}{kv} - \frac{E_{J0}}{kv} \left| \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right| \right)^2 + \frac{1}{k^2 v^2 \tau^2}} \right) = 0. \quad (310)$$

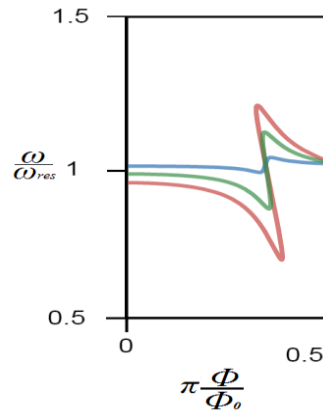


Рисунок 17 – $\theta = 0.01$ (голубой), $\theta = 0.07$ (красный), $\theta = 0.05$ (зеленый)

$$\pi \frac{\beta N}{mlk^3 v^3} = \theta, \frac{E_{J0}}{kv} = 2.$$

Аналогичный результат получается и в модели Кронига-Пенни. Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \frac{\beta}{m} \sum_n \delta(x + ln) \int dt_1 K(t - t_1) M(x, t_1) = 0. \quad (311)$$

Можно получить:

$$\cos(kl) = \frac{u(\omega)}{v\omega} \sin(v\omega l) + \cos(v\omega l), \quad . \quad (312)$$

$$\text{Где } u = -\beta K(\omega) = -\frac{\beta}{m} \frac{E_J - \omega}{\frac{1}{\tau^2} + (E_J - \omega)^2}.$$

Переписывая тригонометрическое соотношение, получим:

$$\cos\left(\frac{E_J}{v} \frac{\omega}{E_J} l\right) - \frac{v\beta}{mlE_J^2} \frac{E_J}{\omega} \frac{1 - \frac{\omega}{E_J}}{\frac{1}{E_J^2 \tau^2} + \left(1 - \frac{\omega}{E_J}\right)^2} \sin\left(\frac{E_J}{v} \frac{\omega}{E_J} l\right) - \cos(kl) = 0. \quad (313)$$

В случае, когда $kl \ll 1$, получим:

$$\left(\frac{\omega}{E_J}\right)^2 - \left(\frac{kv}{E_J}\right)^2 - \frac{v^2 \beta}{ml^2 E_J^3} \frac{E_J}{\omega} \frac{\frac{\omega}{E_J} - 1}{\left(1 - \frac{\omega}{E_J}\right)^2 + \frac{1}{E_J^2 \tau^2}} = 0. \quad (314)$$

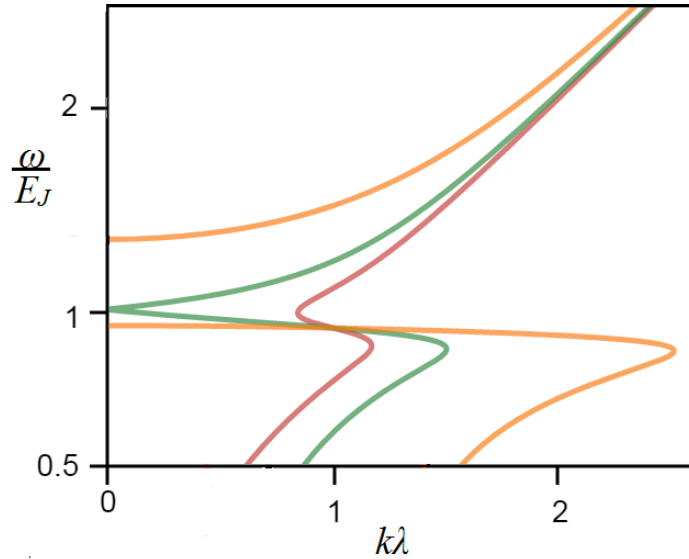


Рисунок 18 – $\theta = 0,1$ (красный) $\theta = 0,2641053$ (зеленый) $\theta = 1$
(жёлтый) $\frac{v^2 \beta}{ml^2 E_J^3} = \theta$.

Сравнивая графические результаты, полученные для разных моделей, можно сделать вывод о верном характере расчетов.

Рассмотрим теперь приближение, в котором $kl \gg 1$, тогда графические результаты будут выглядеть так при следующих параметрах: $\frac{v}{E_J} = \lambda$ и $l \cdot \frac{\beta}{mE_J} = \theta = 1$.

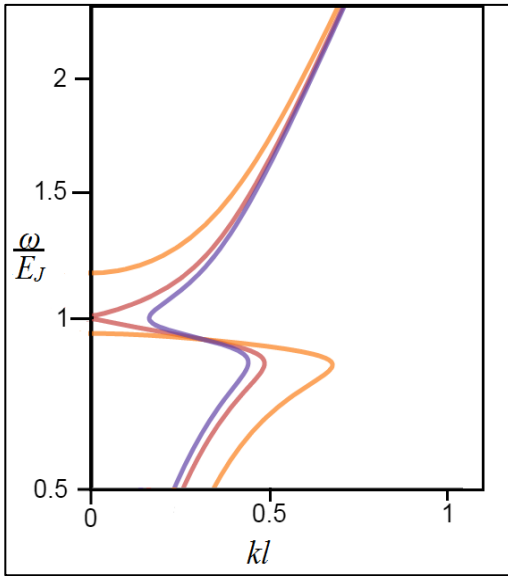


Рисунок 19 – (a) $l/\lambda = 1$

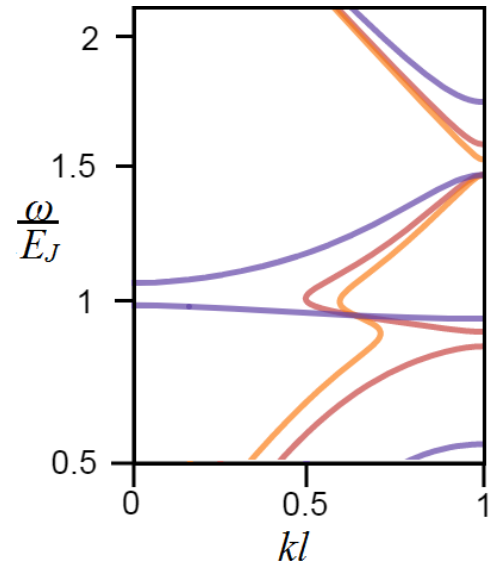


Рисунок 19 – (b) $l/\lambda = 2$

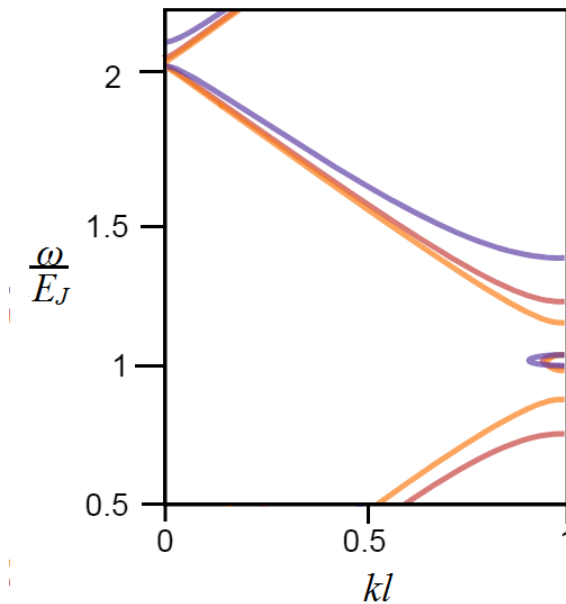


Рисунок 19 – (c) $l/\lambda = 3$

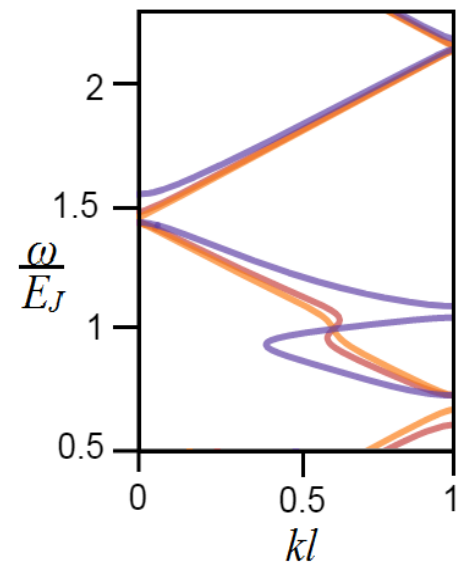


Рисунок 19 – (d) $l/\lambda = 4$

Рассмотрим теперь нелинейный случай.

Ядро уравнения движения имеет вид:

$$K(t - t_1) = \int d\omega \frac{E_J - \omega}{\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_{ph} E_{CJ} M^2 + (E_J - \omega)^2} \cos(\omega(t - t_1)). \quad (315)$$

В нелинейном случае ядро зависит от амплитуды электромагнитной волны M в следующем виде:

$$\frac{E_J - \omega}{\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_0 E_{CJ} M^2 + (E_J - \omega)^2} \approx \frac{E_J - \omega}{(E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \omega_{ph} E_{CJ} \frac{4(E_J - \omega)M^2}{((E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2})^2}. \quad (316)$$

В разложение входит как линейный член:

$$K^0 = K^0(t - t_1) = \int d\omega \frac{E_J - \omega}{(E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \cos(\omega(t - t_1)). \quad (317)$$

так и нелинейный:

$$K^1 = K^1(t - t_1) = -\omega_{ph} E_{CJ} \int d\omega \frac{4(E_J - \omega)}{((E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2})^2} \cos(\omega(t - t_1)). \quad (318)$$

В таком случае уравнение движения примет следующую форму:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \frac{\beta N}{m} \int dt_1 (K^0 M(x, t_1) - K^1 M^3(x, t_1)) = 0 \quad (319)$$

Фурье-образ данного уравнения можно построить, положив, что:

$$M(x, t) = s(x, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad \tilde{M}(x, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt s(x, t) e^{i(\omega - \omega_0)t}. \quad (320)$$

Учитывая, что $\tilde{M}_0'' = 0$, получим:

$$2ik_0 \tilde{M}_0' + \tilde{M}_0 (\kappa^2 - k_0^2) = 0. \quad (321)$$

Где

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{\zeta}{v^2} K^0(\omega) - \frac{\zeta}{v^2} |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega). \quad (322)$$

В линейном подслучае получим $\kappa \sim k_0$:

$$i\tilde{M}_0' + \tilde{M}_0 (\kappa - k_0) = 0. \quad (323)$$

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 + \zeta \left(K^0(\omega) - |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega) \right)}. \quad (324)$$

Где $\zeta = \frac{\beta}{m} N = \frac{\omega_0 \omega_J}{8Lm}$.

Если положить, что $\zeta \ll 1$, тогда можно разложить волновой вектор в ряд $k_l(\omega)$:

$$k(\omega) = \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 + \zeta \left(K^0(\omega) - |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega) \right)} \approx \frac{1}{v} \left(\omega + \zeta \frac{K^0(\omega) - |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega)}{2\omega} \right). \quad (325)$$

Нелинейный член может быть определён как:

$$k_{nl}(\omega) = -\frac{\zeta}{2\omega v} |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega). \quad (326)$$

А слагаемые, описывающие дисперсию как:

$$k(\omega) = \frac{k_n(\omega - \omega_0)^n}{n!} \quad . \quad (327)$$

$$k(\omega)v = \omega + \frac{\zeta K^0(\omega)}{2\omega} = \omega + \frac{\zeta}{2\omega} \frac{E_J - \omega}{(E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \quad . \quad (328)$$

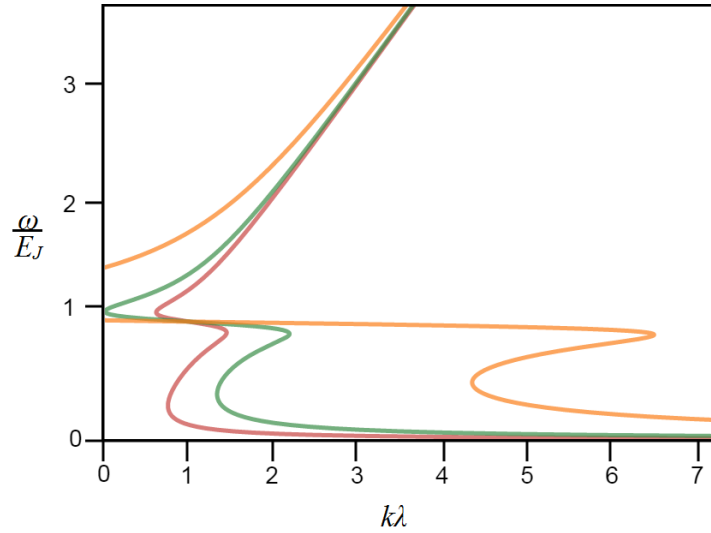


Рисунок 20 – $\theta = 0,1$ (красный) $\theta = 0,2385589$ (зеленый) $\theta = 1$ (желтый)

$$\theta = \frac{\beta N E_J}{m 2 E_J^3}.$$

Учитывая, что $E_J - \omega_0 \sim \frac{1}{\tau} \ll \omega_0$, можно получить разные значения приближений для волнового вектора:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = k_l(\omega_0) = \frac{\omega_0}{v} + \frac{\zeta K^0(\omega_0)}{2\omega_0 v}; \\ k_1 = k'_l(\omega_0) \rightarrow \frac{dx}{dy} = 1 + \frac{\theta}{y} \frac{(1-y)^2 - \delta^2}{((1-y)^2 + \delta^2)^2}; \\ \frac{k_2}{2} = k''_l(\omega_0) \rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\theta}{y} \frac{(1-y)((1-y)^2 - \delta^2)}{((1-y)^2 + \delta^2)^3}. \end{array} \right. \quad (329)$$

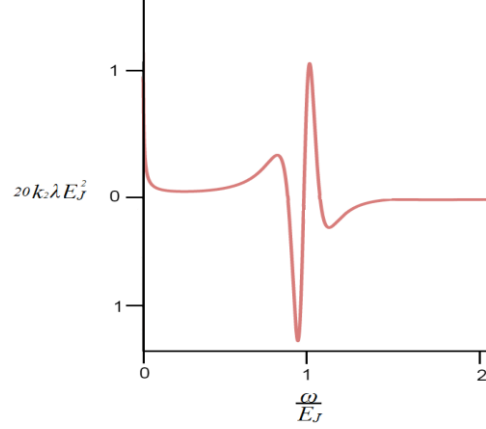


Рисунок 21 – $\theta = 0.1 \frac{\omega}{E_J} \in [0, 0.9]$ – интервал с нормальной дисперсией,

$\frac{\omega}{E_J} \in [0.9, 1]$ – интервал с аномальной дисперсией $\theta = \frac{\beta N E_J}{m 2 E_J^3}$

Учитывая, что амплитуда в пространстве сохраняется, как было положено выше, то есть $|\tilde{M}_0|^2 = const$, можем получить:

$$k_{nl}(\omega)v = -\frac{\zeta}{2\omega} K^1(\omega) = -\frac{2\zeta(E_J - \omega)}{\omega((E_J - \omega)^2 + \frac{1}{\tau^2})^2} \omega_{ph} E_{CJ}. \quad (330)$$

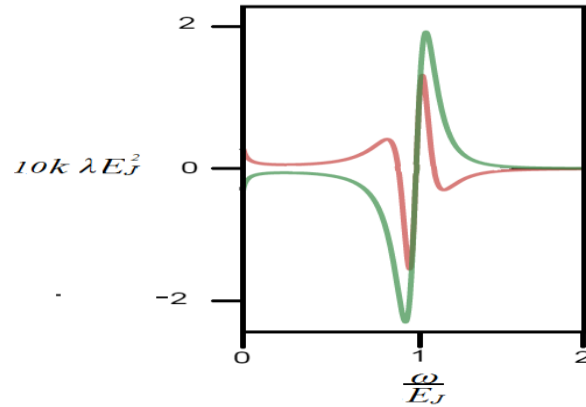


Рисунок 22 – $\theta = 0.1, \omega_{ph} E_{CJ} = 1$ (красный - k_l , зеленый - k_{nl}) $\theta = \frac{\beta N E_J}{m 2 E_J^3}$

Подставляя значения волновых векторов в уравнение движения, и применяя Фурье-преобразования, получим:

$$iM_0' = -ik_1\dot{M}_0 + \frac{k_2}{2}\ddot{M}_0 - k_{nl}M_0|M_0|^2. \quad (331)$$

В силу того, что нас интересует только эволюция формы солитона, можно осуществить следующее преобразование: $T = t - k_1x$, что преобразует уравнение динамики в следующую форму:

$$iM_0' - \frac{k_2}{2}\ddot{M}_0 + k_{nl}M_0|M_0|^2 = 0. \quad (332)$$

Решения можно искать для двух различных случаев, а именно: для ситуации с нормальной дисперсией $k_2 > 0$, и аномальной $k_2 < 0$.

1. Рассмотрим случай с аномальной дисперсией. В случае с аномальной дисперсией уравнение динамики примет следующий вид:

$$iM_0' + \frac{|k_2|}{2}\ddot{M}_0 + k_{nl}M_0|M_0|^2 = 0. \quad (333)$$

Это уравнение для временных солитонов и его решение хорошо. Введем следующие обозначения:

$L_d = \frac{T_0^2}{k_2}$ - расстояние, распространившись на которое вдоль оси x , необходимо учитывать линейные эффекты эволюции солитона d ; $L_{nl} = \frac{1}{k_{nl}}$ - длина, на которой необходимо учитывать также и нелинейные эффекты; T_0 - ширина солитона; $\tau = \frac{t}{T_0}$, $\chi = \frac{x}{L_d}$; $N^2 = \frac{L_d}{L_{nl}}$ - порядок солитона.

Уравнение динамики может быть переписано в вышеуказанных обозначениях:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0}{\partial \tau^2} + i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} + N^2 M_0 |M_0|^2 = 0, \quad (334)$$

Солитоны могут быть решениями этого уравнения в трех разных случаях, описываемых ниже.

А) Когда $N \ll 1$, $l \approx L_d$, $l \ll L_{nl}$, то нелинейными эффектами можно пренебречь, а Фурье-образ решения для среды длиной l имеет вид:

$$\tilde{M}_0(\chi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{M}_0(0, \omega) \exp\left(i\omega \left(\frac{\omega T_0^2}{2} \chi - \tau\right)\right). \quad (335)$$

$$\tilde{M}_0(0, \omega) = \int d\omega M_0(0, \tau) \exp(i\omega\tau). \quad (336)$$

Если предположить, что изначально солитон имел гауссову форму $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то решение динамического уравнения принимает вид:

$$M_0(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{1}{1-i\chi}} \exp\left(\frac{\tau^2}{2T_0^2(1-i\chi)}\right). \quad (337)$$

Этот солитон сохраняет неизменной свою форму в пространстве в процессе распространения, но его ширина становится увеличивается:

$$W(\chi) = T_0 \sqrt{1 + \chi^2}. \quad (338)$$

Другая форма решения может быть описана как:

$$M_0(\chi, \tau) = |M_0(\chi, \tau)| \exp(i\phi(\chi, \tau)). \quad (339)$$

$$\phi(\chi, \tau) = \frac{\chi}{1+\chi^2} \frac{\tau^2}{T_0^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(\chi) \quad . \quad (340)$$

Б) Когда $N \gg 1$, $l \ll L_d$, $l \approx L_{nl}$ и начальная форма солитона имеет гауссову форму $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то уравнение принимает следующий вид:

$$i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} + \frac{1}{L_{nl}} M_0 |M_0|^2 = 0. \quad (341)$$

А решение:

$$M_0(\chi, \tau) = M_0(0, \tau) \exp(i\phi_{nl}(\chi, \tau)). \quad (342)$$

$$\phi_{nl}(\chi, \tau) = N^2 |M_0(0, \tau)|^2 \chi. \quad (343)$$

В) Когда $l > L_d$, $l > L_{nl}$, то необходимо учитывать как линейные, так и нелинейные эффекты. Решение будет стабильным только, если $L_l \approx L_{nl}$. Решение уравнения для $N^2 = 1$ имеет следующую форму:

$$M_0(\chi, \tau) = \text{sech}(\tau) e^{\frac{i\chi}{2}}. \quad (344)$$

Этот вид солитона называется оптическим, так как не изменяет свою форму в процессе распространения. В случае $N^2 = 2$, решение принимает следующую форму:

$$M_0(x, t) = \frac{4(\cosh(3\tau) + 3e^{4i\chi} \cosh(\tau))e^{\frac{i\chi}{2}}}{\cosh(4\tau) + 4 \cosh(2\tau) + 3 \cos(4\chi)}. \quad (345)$$

Этот солитон изменяет свою форму периодически с периодом: $\chi = \frac{\pi}{2}$.

2. рассмотрим случай с нормальной дисперсией. Уравнение принимает форму:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0}{\partial \tau^2} - i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} - N^2 M_0 |M_0|^2 = 0, \quad (346)$$

А) Когда $N \ll 0, l \approx L_d, l \ll L_{nl}$ и изначальная форма солитона гауссова $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то решение имеет вид:

$$M_0(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{1}{1+i\chi}} \exp\left(\frac{\tau^2}{2T_0^2(1+i\chi)}\right). \quad (347)$$

Его можно переписать в следующей форме:

$$M_0(\chi, \tau) = |M_0(\chi, \tau)| \exp(i\phi(\chi, \tau)). \quad (348)$$

$$\phi(\chi, \tau) = -\frac{\chi}{1+\chi^2} \frac{\tau^2}{T_0^2} - \frac{1}{2} \tan^{-1}(\chi). \quad (349)$$

Б) Когда $N \gg 1, l \ll L_d, l \approx L_{nl}$, а изначальная форма солитона гауссова $M_0(0, \tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{2T_0^2}\right)$, то решение имеет вид:

$$M_0(\chi, \tau) = M_0(0, \tau) \exp(i\phi_{nl}(\chi, \tau)). \quad (350)$$

$$\phi_{nl}(\chi, \tau) = -N^2 |M_0(0, \tau)|^2 \chi. \quad (351)$$

В) Когда $l > L_d, l > L_{nl}$, то возникают как линейные, так и нелинейные эффекты. Уравнение принимает форму:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_0}{\partial \tau^2} - i \frac{\partial M_0}{\partial \chi} - N^2 M_0 |M_0|^2 = 0, \quad (352)$$

Решение для $N^2 = 1$ принимает форму $M_0(\chi, \tau) = \tanh(\tau) \exp(i\chi)$ и находится в случае, если параметры принимают следующие значения:

$$v''(\infty) = 0, v'(\infty) = 0; v(\infty) = v_0 = 1. \quad (353)$$

Черные солитоны высших порядков $M_0(\chi, \tau) = \tanh(N\tau)\exp(i\chi N^2)$ не стабильны в процессе распространения². Серые же стабильны и выражаются в качестве следующего решения:

$$M_0(\chi, \tau) = \exp(i\alpha\chi) v(\tau) \exp(ig(\tau)). \quad (354)$$

$$\text{где} \quad v = \sqrt{1 - B^2 \operatorname{sech}^2(N\tau)}, \quad g = \beta B^2 \left(\tau - \frac{B \operatorname{atanh}\left(B \tanh \frac{(N\tau)}{\sqrt{1-B^2}}\right)}{N\sqrt{1-B^2}} \right)^3.$$

Коэффициент темноты солитона может быть найден из системы уравнений:

$$\begin{cases} B^2 = \frac{3N^2}{2\alpha + N^2}; \\ c = \frac{2\alpha - N^2}{12}; \\ \beta = 2 \frac{\left(\frac{2\alpha}{N^2} + 1\right)^2 (\alpha - N^2)}{27}; \\ v_0 = \frac{1}{B}. \end{cases} \quad (355)$$

Решение системы может быть найдено только, когда

$$v''(\infty) = 0, v'(\infty) = 0; v(\infty) = v_0. \quad (356)$$

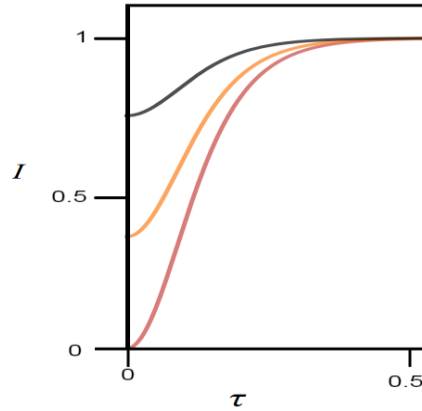


Рисунок 23 – Зависимость интенсивности солитона $I = |M_0|^2$ от τ для разных солитонов $B=1$ (красный), $B=0.8$ (желтый), $B=0.5$ (серый)

² I.V. Barashenkov *Stability Criterion for Dark Solitons*, Physical Review letters, Volume 77, 12 August 1996 Number 7

³ H. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications* (Oxford University Press, New York, 1995).

3. Изучение коэффициента проходимости для разных систем.

Выше уже описывалась система, поэтому здесь мы приведем уравнение Шредингера:

$$\begin{bmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_- \\ \Phi_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_j & -\gamma M \\ -\gamma M & \varepsilon_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_- \\ \Phi_+ \end{bmatrix}. \quad (357)$$

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi_- + \varepsilon_j \Phi_- + \gamma M \Phi_+ = 0; \\ i\partial_t \Phi_+ - \varepsilon_j \Phi_+ + \gamma M \Phi_- = 0. \end{cases} \quad (358)$$

Будем полагать, что компоненты можно разложить в базисе Фурье. Выбрав приближение, в котором амплитуда волны адиабатически медленно меняется с изменением времени, а частота, такова, что её могут «чувствовать» ДУС - $\frac{|\omega_f - \varepsilon_j|}{\omega_f} \ll 1$ (55). Получим:

$$\begin{cases} \Phi_- = u_-(t) e^{\frac{i\omega_f t}{2}}; \\ \Phi_+ = u_+(t) e^{-\frac{i\omega_f t}{2}}. \end{cases} \quad (359)$$

$$\begin{cases} i\dot{u}_- + \left(\frac{E_j - \omega_f}{2}\right) u_- + \gamma M u_+ = 0; \\ i\dot{u}_+ - \left(\frac{E_j - \omega_f}{2}\right) u_+ + \gamma M^* u_- = 0. \end{cases} \quad (360)$$

Далее будем полагать, что $M(t) = \int d\omega M(\omega) e^{i\omega t}$

$$\Phi_+ = e^{-\frac{i\omega_f t}{2}} (A_+ e^{itw} + B_+ e^{-itw}), \quad (361)$$

$$\Phi_- = e^{\frac{i\omega_f t}{2}} (A_- e^{tw} + B_- e^{-tw}). \quad (362)$$

Среднее значение оператора импульса имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \langle \Psi^* | \hat{p} | \Psi \rangle = -i \frac{\omega_J}{4\pi} \int [\Phi_-^* (1 + \exp(-i\varphi)) + \Phi_+^* (1 - \exp(-i\varphi))] (\Phi_-(t) - \\ &\quad \Phi_+(t)) i \exp(i\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{\omega_J [\Phi_+ - \Phi_-]}{4\pi} \int [\Phi_+^* (\exp(i\varphi) + 1) + \Phi_-^* (\exp(i\varphi) - 1)] \varphi = -\frac{\omega_J}{2} |\Phi_+ - \Phi_-|^2. \end{aligned} \quad (363)$$

Где введено следующее обозначение:

$$\frac{\gamma M^* e^{-i\omega_f t + a}}{w} = b \quad . \quad (364)$$

Среднее значение дополнительного напряжения, подаваемое на каждый элемент резонатора, содержащего в своем контуре ДУС:

$$\langle \Psi^* | \mu_F | \Psi \rangle = \mu_F (|\Phi_-|^2 + |\Phi_+|^2) \quad . \quad (365)$$

Уравнение движения можно записать, таким образом, в следующей форме:

$$\ddot{M}_i - v_i^2 M_i'' - \sum_k \frac{\tilde{\gamma} \gamma}{2L_i} \delta_{ik} (\bar{p}_i + \mu_F) = 0. \quad (366)$$

Суммарное значение средних оператора импульса и дополнительного напряжения равна:

$$-\frac{\omega_J}{2} |\Phi_+ - \Phi_-|^2 + \mu_F (|\Phi_-|^2 + |\Phi_+|^2) = \frac{\omega_J}{2} (\Phi_+ \Phi_-^* + \Phi_- \Phi_+^*) + \left(\mu_F - \frac{\omega_J}{2} \right) (|\Phi_-|^2 + |\Phi_+|^2) \quad . \quad (367)$$

Матрица плотности имеет следующий вид:

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} |\Phi_+|^2 & \Phi_+ \Phi_-^* \\ \Phi_- \Phi_+^* & |\Phi_-|^2 \end{pmatrix}. \quad (368)$$

Введем следующие обозначения (вращающийся вектор):

$$s_1(t) = \Phi_+ \Phi_-^* + \Phi_- \Phi_+^*. \quad (369)$$

Система из трех векторов, описывающих систему:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_f t + \varphi) & -\sin(\omega_f t + \varphi) & 0 \\ \sin(\omega_f t + \varphi) & \cos(\omega_f t + \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (370)$$

Таким образом, получим для вектора:

$$s_1 = u \cos(\omega_f t + \varphi) - v \sin(\omega_f t + \varphi). \quad (371)$$

$$\begin{cases} \dot{u} = -(2\varepsilon_j - \omega_f)v - \frac{u}{T_2}; \\ \dot{v} = (2\varepsilon_j - \omega_f)u + \gamma M w - \frac{v}{T_2}; \\ \dot{w} = -\gamma M v - \frac{w - w_{eq}}{T_1}. \end{cases} \quad (372)$$

Решим систему уравнений, полагая, что

$$w_{eq} = \frac{e^{\frac{2\varepsilon_j}{T}-1}}{e^{\frac{2\varepsilon_j}{T}}+1} = -1. \quad (373)$$

$$\begin{cases} 0 = (2\varepsilon_j - \omega_f)v + \frac{u}{T_2}; \\ 0 = (2\varepsilon_j - \omega_f)u + \gamma Mw - \frac{v}{T_2}; \\ w = -(1 + T_1\gamma Mv). \end{cases} \quad (374)$$

Таким образом, вектора примут значения:

$$\begin{cases} v = -\frac{1}{T_2} \frac{\gamma|M|}{\frac{T_1}{T_2}|M|^2 + \frac{1}{T_2^2} + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2}; \\ u = \frac{|M|(2\varepsilon_j - \omega_f)}{\frac{T_1}{T_2}\gamma^2|M|^2 + \frac{1}{T_2^2} + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2}. \end{cases} \quad (375)$$

Уравнение движения можно переписать в новом представлении в следующей форме:

$$\ddot{M}_i - v_i^2 M_i'' - \sum_k \frac{\tilde{\gamma}\gamma\omega_J}{4L_i} \delta_{ik} s_1 = 0. \quad (376)$$

где

$$s_1 = \frac{|M|}{\gamma^2|M|^2\frac{T_1}{T_2} + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \left((2\varepsilon_j - \omega_f)\cos(\omega_f t + \varphi) - \frac{1}{T_2}\sin(\omega_f t + \varphi) \right). \quad (377)$$

Введем следующие приближения и обозначения:

$$\ddot{M} \frac{T_1}{T_2} \approx 1, \quad \frac{\tilde{\gamma}\gamma\omega_J N}{4L_i} = \alpha. \quad (378)$$

Тогда:

$$\ddot{M} - v^2 M'' - \alpha \delta(x) \frac{|M|}{\gamma^2|M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \left((2\varepsilon_j - \omega_f)\cos(\omega_f t + \varphi) - \frac{1}{T_2}\sin(\omega_f t + \varphi) \right) = 0. \quad (379)$$

Осуществим также следующую подстановку:

$$M = \gamma|M| \cos(\omega_f t + \varphi). \quad (380)$$

Тогда

$$\ddot{M} = -\omega_f^2 \gamma|M| \cos(\omega_f t + \varphi) = -\omega_f^2 \gamma|M| \frac{e^{i(\omega_f t + \varphi)} + e^{-i(\omega_f t + \varphi)}}{2}. \quad (381)$$

Учитывая, что:

$$(2\varepsilon_j - \omega_f)\cos(\omega_f t + \varphi) - \frac{1}{T_2}\sin(\omega_f t + \varphi) =$$

$$(2\varepsilon_j - \omega_f)\frac{e^{i(\omega_f t + \varphi)} + e^{-i(\omega_f t + \varphi)}}{2} + \frac{i}{T_2}\frac{e^{i(\omega_f t + \varphi)} - e^{-i(\omega_f t + \varphi)}}{2}. \quad (382)$$

Получим новые представления для производных амплитуды:

$$M' = \gamma|M'| \cos(\omega_f t + \varphi) - \gamma|M|\varphi' \sin(\omega_f t + \varphi)$$

$$M'' = (\gamma|M|'' - \gamma|M|(\varphi')^2) \cos(\omega_f t + \varphi) - \gamma(2|M|\varphi' - |M|\varphi'') \sin(\omega_f t + \varphi) =$$

$$= \gamma(|M|'' - |M|(\varphi')^2) \frac{e^{i(\omega_f t + \varphi)} + e^{-i(\omega_f t + \varphi)}}{2} + i\gamma(2|M|\varphi' - |M|\varphi'') \frac{e^{i(\omega_f t + \varphi)} - e^{-i(\omega_f t + \varphi)}}{2}. \quad (383)$$

Отдельно выписывая множители при $e^{i(\omega_f t + \varphi)}$ и $e^{-i(\omega_f t + \varphi)}$, получим два взаимносопряженных уравнения:

$$\omega_f^2|M| + v^2(|M|'' - |M|(\varphi')^2 + i(2|M|\varphi' - |M|\varphi'')) + \frac{\alpha\delta(x)\gamma|M|\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2}\right)}{\gamma^2|M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} = 0. \quad (384)$$

$$\omega_f^2|M| + v^2(|M|'' - |M|(\varphi')^2 - i(2|M|\varphi' - |M|\varphi'')) + \frac{\alpha\delta(x)\gamma|M|\left((2\varepsilon_j - \omega_f) - \frac{i}{T_2}\right)}{\gamma^2|M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} = 0. \quad (385)$$

Введем обозначение: $M_0 = \gamma|M|e^{i\varphi}$.

Получим уравнение динамики, которое будем исследовать:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{\gamma^2|M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (386)$$

Рассмотрим линейный случай.

В данном случае ядро не зависит от квадрата модуля амплитуды электромагнитной волны, и уравнение движения принимает вид:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (387)$$

$$\begin{cases} M_{0-}(x < 0) = C_r e^{ikx} + C_l e^{-ikx}; \\ M_{0+}(x > 0) = D_r e^{ikx} + D_l e^{-ikx}. \end{cases} \quad (388)$$

$$k = \frac{\omega_f}{v}, f = \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}. \quad (389)$$

Где характеристики амплитуды падающей волны следующие:

- $D_l = 0$, нет падающей волны справа;
- $D_r = d$ амплитуда прошедшей волны;
- $C_r = 1$, частица падает слева;
- $C_l = c$ амплитуда отраженной волны.

Расчет коэффициента прозрачности в таком случае осуществляется посредством следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} M_{0-}(0) = M_{0+}(0); \\ \frac{dM_{0-}}{dx}(0) = \frac{dM_{0+}}{dx}(0) - \frac{f}{v^2} M_{0+}(0). \end{cases} \quad (390)$$

Амплитуды составляют систему:

$$\begin{cases} C_r + C_l = D_r + D_l; \\ ik(C_r - C_l - D_r + D_l) = -\frac{f}{v^2}(D_r + D_l). \end{cases} \quad (391)$$

С учетом выше введенных обозначений, получим:

$$\begin{cases} c + 1 = d; \\ ik(1 - c - d) = -\frac{f}{v^2}d. \end{cases} \quad (392)$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{1}{1 + i\frac{f}{2kv^2}} = d. \quad (393)$$

А коэффициент прозрачности по определению получает следующее выражение:

$$|d|^2 = \frac{1}{\left(1 + i\frac{f}{2kv^2}\right)\left(1 - i\frac{f^*}{2kv^2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{|f|^2}{4\omega_f^2 v^2}}, \quad (394)$$

Где:

$$f = \alpha^2 \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2}\right) \left((2\varepsilon_j - \omega_f) - \frac{i}{T_2}\right)}{\left((2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)^2} = \frac{\alpha^2}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}. \quad (395)$$

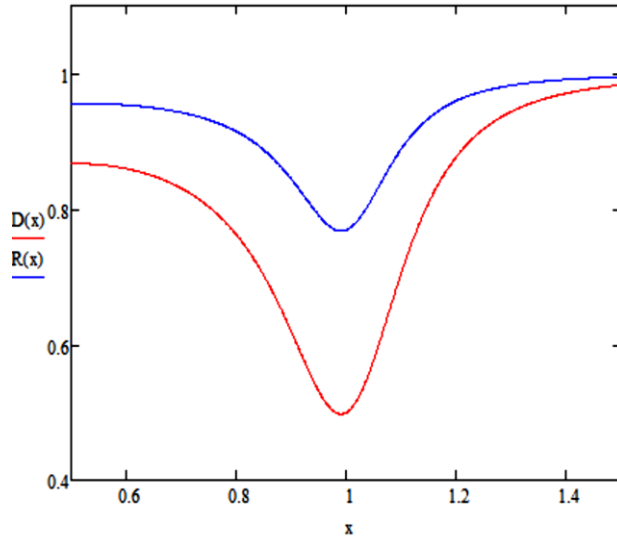
Таким образом, окончательный вид коэффициента прохождения имеет вид:

$$D = |d|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{4v^2\omega_f^2(E_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}}. \quad (396)$$

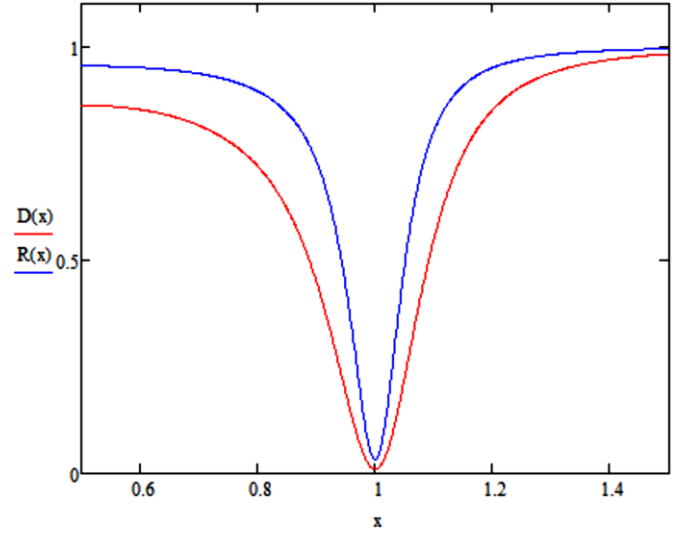
Введем безразмерную функцию:

$$D = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{X^2(1-X)^2 + \delta^2}}. \quad (397)$$

$$\frac{\alpha^2}{4v^2E_j^4} = \theta, \frac{\omega_f}{E_j} = X, \frac{1}{E_jT_2} = \delta. \quad (398)$$



a) $\delta = 0,1$



b) $\delta = 0,01$

Рисунок 24 – $D(X)$ $\theta = 0,01$ (синий), $\theta = 0,001$ (красный).

Рассмотрим нелинейный случай.

В нелинейном случае ядро уравнения движения зависит от квадрата модуля амплитуды электромагнитной волны:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (399)$$

Решение представляется в качестве системы двух уравнений:

$$\begin{cases} M_{0-}(x < 0) = C_r e^{ikx} + C_l e^{-ikx}; \\ M_{0+}(x > 0) = D_r e^{ikx} + D_l e^{-ikx}, \end{cases} \quad (400)$$

Где:

$$k = \frac{\omega_f}{v}, f = \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}} \quad (401)$$

А также приняты следующие обозначения:

- $D_l = 0$, нет падающей волны справа;
- $D_r = d$ амплитуда прошедшей волны, $|d| = |M|$;
- C_r - частица падает слева, $|C_r| = \sqrt{P_0}$;
- $C_l = c$ амплитуда отраженной волны.

Краевые условия при этом имеют следующий вид:

$$\begin{cases} M_{0-}(0) = M_{0+}(0); \\ \frac{dM_{0-}}{dx}(0) = \frac{dM_{0+}}{dx}(0) - \frac{f}{v^2} M_{0+}(0). \end{cases} \quad (402)$$

В вышепринятых обозначениях они принимают вид:

$$\begin{cases} C_r + C_l = D_r + D_l; \\ ik(C_r - C_l - D_r + D_l) = -\frac{f}{v^2} (D_r + D_l). \end{cases} \quad (403)$$

Или:

$$\begin{cases} c = d - C_r; \\ C_r - d = \frac{if}{2v^2 k} d. \end{cases} \quad (404)$$

Разрешая уравнения в отношении коэффициента:

$$\frac{C_r}{1+i\frac{f}{2kv^2}} = d. \quad (405)$$

Получим показатель прохождения или коэффициент прозрачности:

$$|d|^2 = \frac{|C_r|^2}{\left(1+i\frac{f}{2kv^2}\right)\left(1-i\frac{f^*}{2kv^2}\right)} = \frac{P_0}{\left(1+\frac{|f|^2}{2kv^2}\right)}. \quad (406)$$

Где:

$$f = \alpha^2 \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2}\right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}} \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) - \frac{i}{T_2}\right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}} = \alpha^2 \frac{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}{\left((2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)^2}. \quad (407)$$

Таким образом, окончательная зависимость коэффициента прозрачности от частоты имеет следующий вид:

$$D = |d|^2 = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\omega_f^2 v^2} \frac{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}{\left((2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |d|^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)^2}\right)}. \quad (408)$$

Вводя безразмерные переменные, преобразуем уравнение:

$$D = |d|^2 = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{E_j^2}{\omega_f^2 2E_j^4 v^2} \frac{\alpha^2}{\left(1 - \frac{\omega_f}{E_j}\right)^2 + \frac{1}{E_j^2 T_2^2}} \frac{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}{\left(\left(1 - \frac{\omega_f}{E_j}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{E_j^2} |d|^2 + \frac{1}{E_j^2 T_2^2}\right)^2}\right)}. \quad (409)$$

$$\frac{\alpha^2}{2E_j^4 v^2} = \theta, \frac{\omega_f}{E_j} = X, \frac{1}{E_j T_2} = \delta, \frac{\rho}{E_j} = \xi. \quad (410)$$

Получив безразмерную функцию:

$$D = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{\theta}{X^2} \frac{(1-X)^2 + \delta^2}{((1-X)^2 + \xi^2 D + \delta^2)^2}\right)}. \quad (411)$$

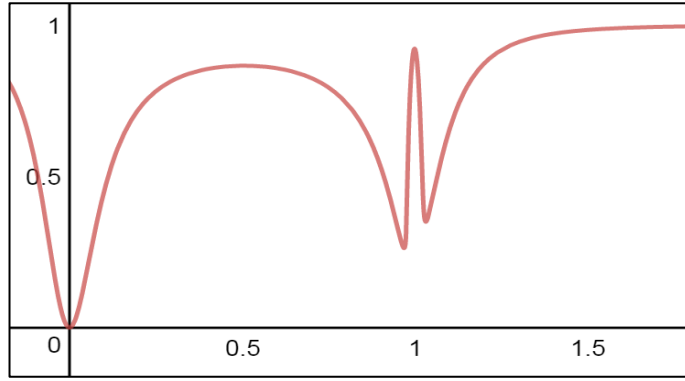


Рисунок 25 – $D\left(\frac{\omega_f}{E_j}\right), \delta = 0.01, \theta = 0.01, \xi = 0.06$.

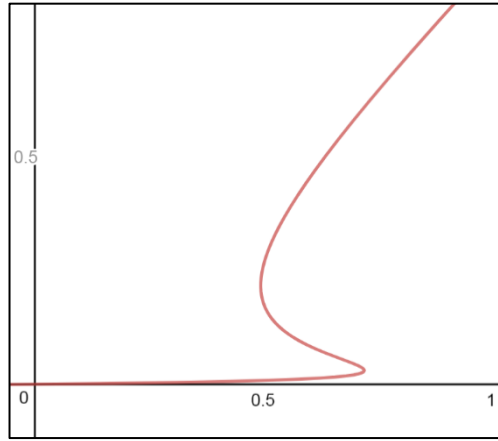


Рисунок 26 – $D(P_0), \delta=0.01, \theta=0.01, \xi=0.06$.

Исследуя зависимость $D(P_0)$, получим следующую безразмерную функцию:

$$\frac{D}{P_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta}{X^2} \frac{(1-a)^2 + \delta^2}{((1-a)^2 + \xi^2 \frac{D}{P_0} P_0 + \delta^2)^2}\right)} . \quad (412)$$

Где:

$$\frac{D}{P_0} = Y, \xi^2 P_0 = X . \quad (413)$$

Рассмотрим также нормированную функцию:

$$Y = \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta}{a^2} \frac{(1-a)^2 + \delta^2}{((1-a)^2 + XY + \delta^2)^2}\right)} . \quad (414)$$

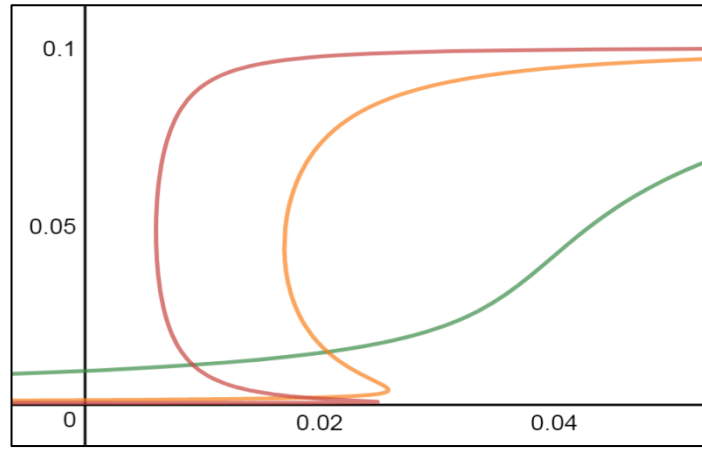
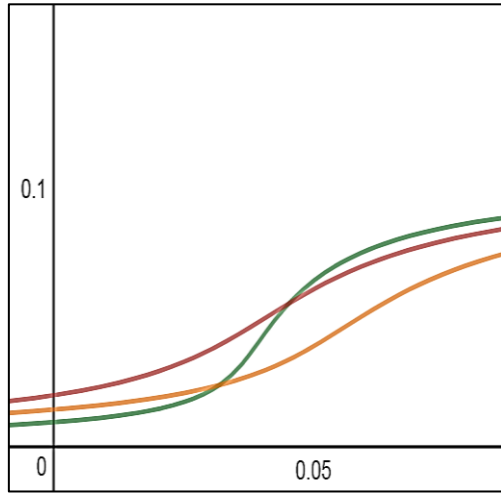
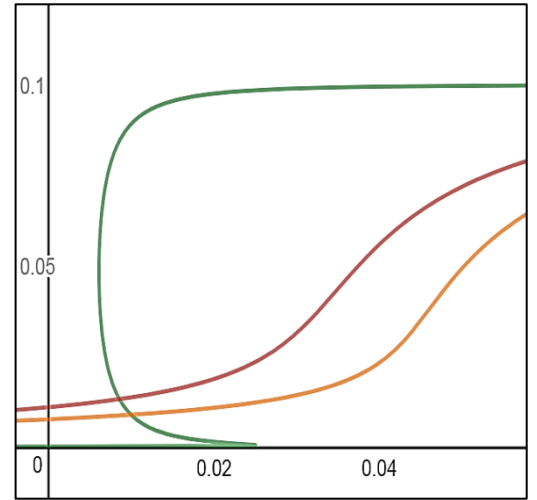


Рисунок 27 – $\frac{D}{P_0}(P_0)$, $\theta = 0.1$, $\delta = 0.1$, (зеленый), $\delta = 0.04$ (желтый), $\delta = 0.01$ (красный).



а) $a=1.1$ (красный), $a=1$ (зеленый), $a=0.9$ (желтый), $\theta = 0.1$, $\delta = 0.1$



б) $a=1.1$ (красный), $a=1$ (зеленый), $a=0.9$ (желтый), $\theta = 0.1$, $\delta = 0.01$

Рисунок 28 – Зависимость коэффициента прозрачности от мощности электромагнитной волны.

В узловом виде уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$M_0'' + M_0 \left(\frac{\omega_f^2}{v^2} + \sum_l \delta(x_l) \frac{\alpha}{v^2} \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (415)$$

$$M_0''(x) + k^2 M_0(x) + \sum_l \delta(x - x_l) f(M_0(x_l)) = 0. \quad (416)$$

$$M_0 = -\frac{i}{2k} \sum_l f(M_0(x_l)) \exp(-ik|x - x_l|). \quad (417)$$

$$M_{0l+1} + M_{0l-1} - 2 \left(M_{0l} \cos(kl) - \frac{f(M_{0l})}{2vk^2} \sin(kl) \right) = 0. \quad (418)$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда:

$$kl \ll 1 \quad (419)$$

В линейном подслучае получим следующее решение:

$$f(M_{0l}) = M_0 \alpha K(\omega_f), K(\omega_f) = \alpha \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}. \quad (420)$$

А коэффициент прозрачности будет выражаться:

$$D = \left| \frac{M_0(Nl)}{M_0(0)} \right| = \left| \cos \left(\frac{\omega_f}{v} L \sqrt{\alpha K(\omega_f)} \right) + i \frac{\sqrt{\alpha K(\omega_f)}}{2} \sin \left(\frac{\omega_f}{v} L \sqrt{\alpha K(\omega_f)} \right) \right|^{-1} \quad (421)$$

При этом на крае коэффициент прозрачности будет иметь значение:

$$D(1) = \left| \frac{M_0(Nl)}{M_0(0)} \right| = \left| \cos \left(X \sqrt{\frac{q^2 p i}{\delta}} \right) + i \sqrt{\frac{p i}{4\delta}} \sin \left(X \sqrt{\frac{q^2 p i}{\delta}} \right) \right|^{-1}. \quad (422)$$

Положим, что: $\left| q \sqrt{\frac{p}{\delta}} \right| \ll 1$, тогда будет верно:

$$D = \left| 1 - \frac{\alpha K}{2} \frac{\omega_f}{v} L \left(\frac{\omega_f}{v} L + i \right) \right|^{-1} \quad (423)$$

Или:

$$D = \left(1 - \alpha \frac{\omega_f}{v} l \left(\frac{-\frac{1}{T_2} + \frac{\omega_f}{v} l (2\varepsilon_j - \omega_f)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) + \frac{\left(\left(\frac{\omega_f}{v} l \right)^2 + 1 \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \left(\alpha \frac{\omega_f}{2v} l \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (424)$$

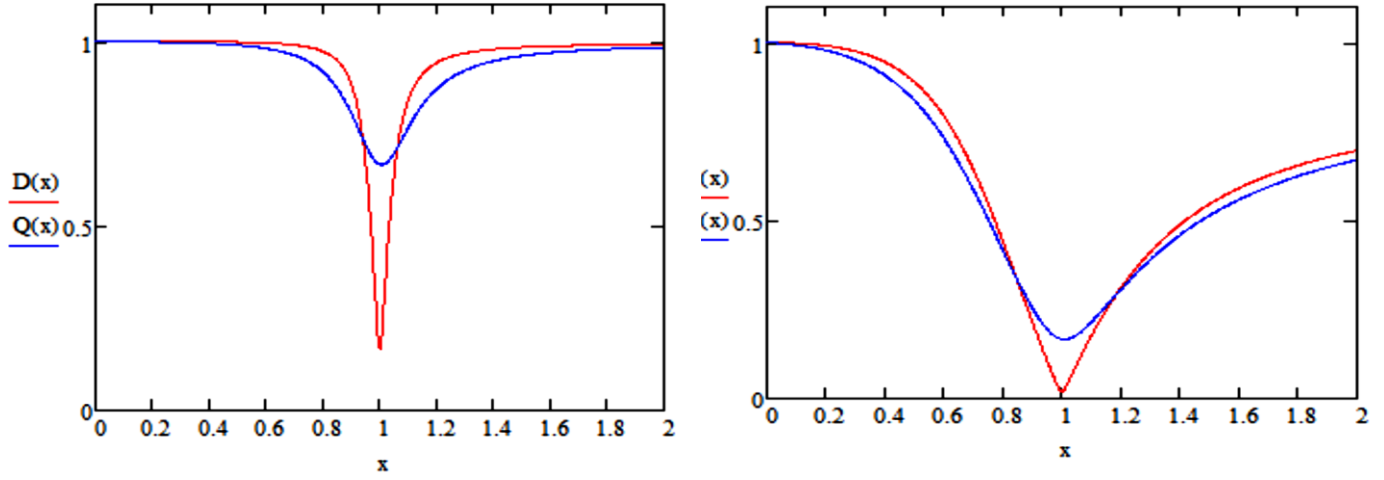
Получая безразмерную функцию:

$$D = \left(1 - pqX \frac{qX(1-X) - \delta}{(1-X)^2 + \delta^2} + \left(\frac{pqX}{2} \right)^2 \frac{(qX)^2 + 1}{(1-X)^2 + \delta^2} \right)^{-1/2}. \quad (425)$$

Где:

$$\frac{\alpha}{E_j} = p, \frac{E_j L}{v} = \frac{L}{\lambda} = q, \lambda = \frac{v}{E_j}. \quad (426)$$

Изобразим зависимость коэффициента прозрачности на серии графиков при



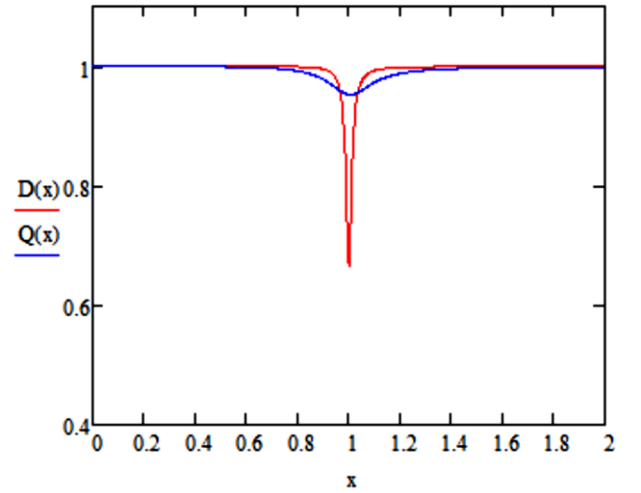
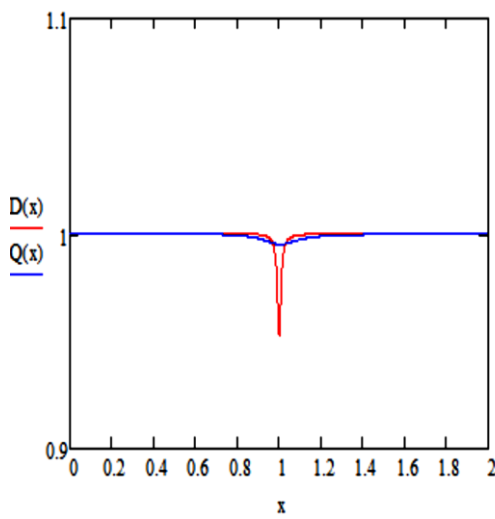
последовательном изменении различных параметров.

Рисунок 29 – $D\left(\frac{\omega_f}{E_j}\right)$: $q = 0.01, \delta = 0.01$ (red line), $\delta = 0.1$ (blue line)

При любых других значениях $\left|q\sqrt{\frac{p}{\delta}}\right|$, получим:

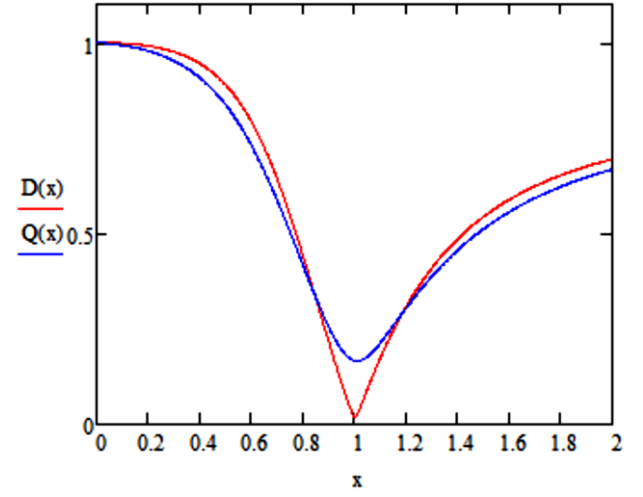
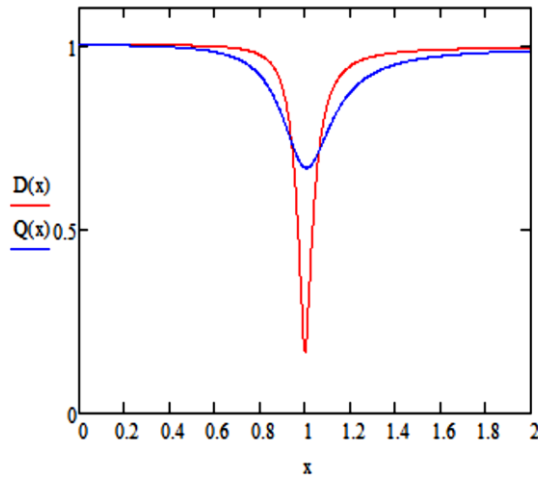
$$D = \left| \frac{M_0(Nl)}{M_0(0)} \right| = \left| \cos\left(Xq\sqrt{\tilde{K}(X)}\right) + i\frac{\sqrt{\tilde{K}(X)}}{2}\sin\left(Xq\sqrt{\tilde{K}(X)}\right) \right|^{-1}. \quad (427)$$

$$\tilde{K}(X) = p \frac{(1-X)+i\delta}{(1-X)^2+\delta^2}, \quad (428)$$



b) $p = 1$

a) $p = 0.1$

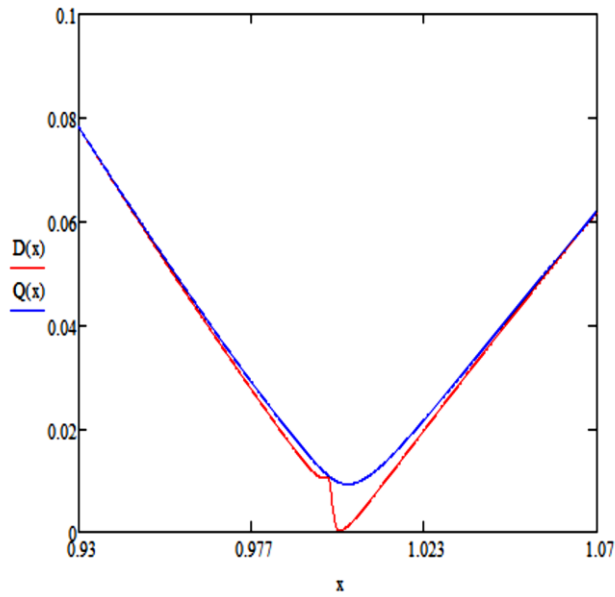


c) $p = 10$

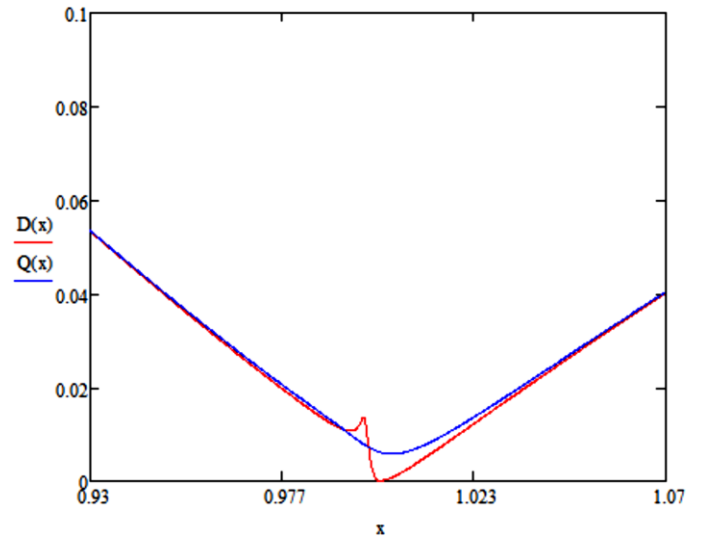
d) $p = 100$

Рисунок 30 – $D\left(x = \frac{\omega_f}{E_j}\right)$ $q = 0.01, \delta = 0.01$ (red line), $\delta = 0.1$ (blue line)

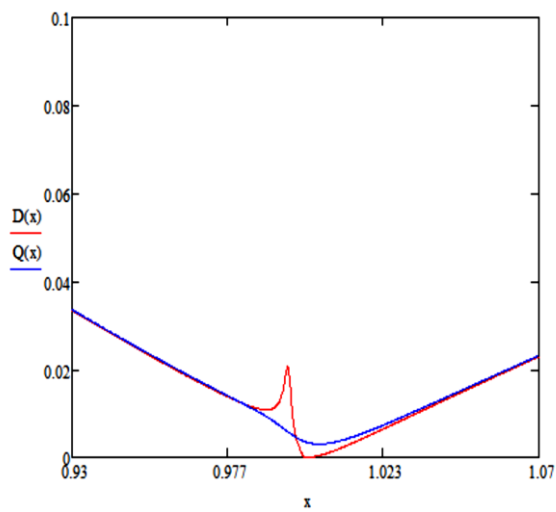
При $p = 210$ образуется первый пик, при $p = 2000$ образуется второй пик, $p = 2000$ третий $\delta = 0.01$



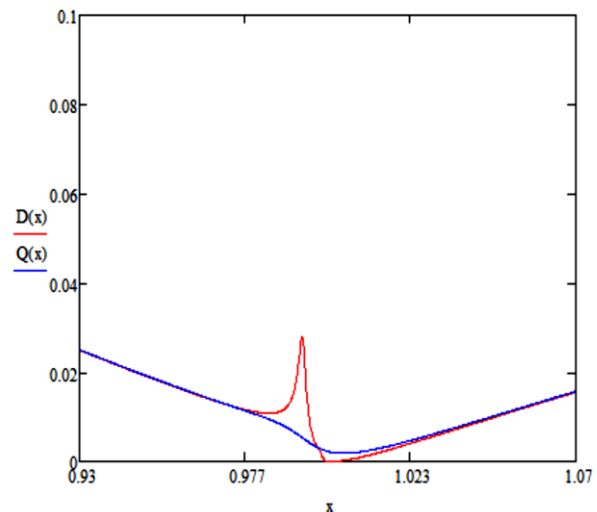
a) $p = 200$



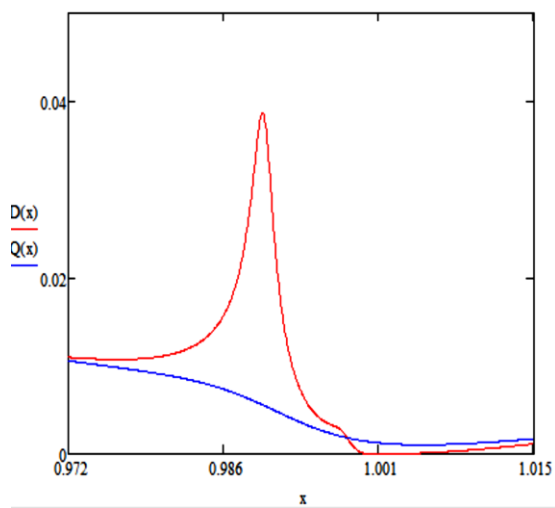
b) $p = 300$



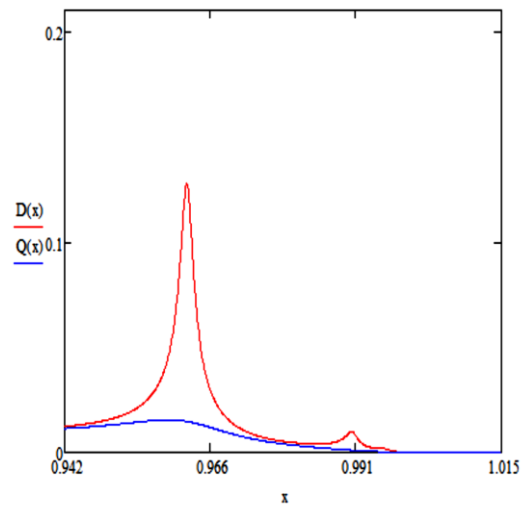
c) $p = 500$



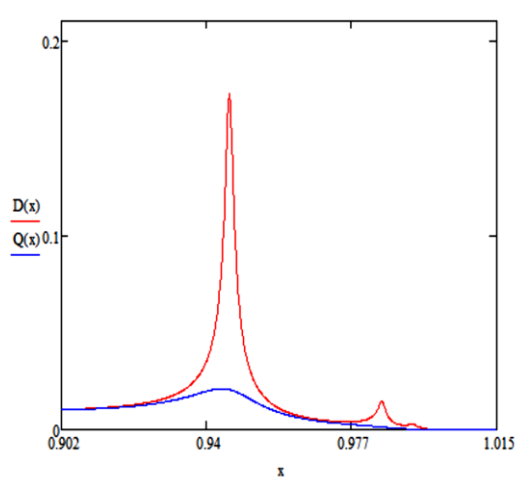
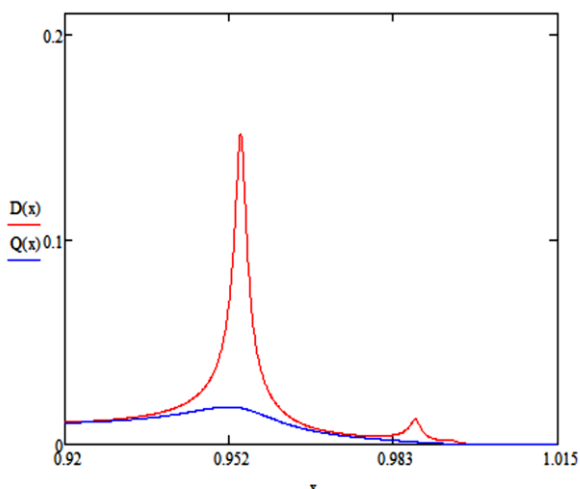
d) $p = 700$



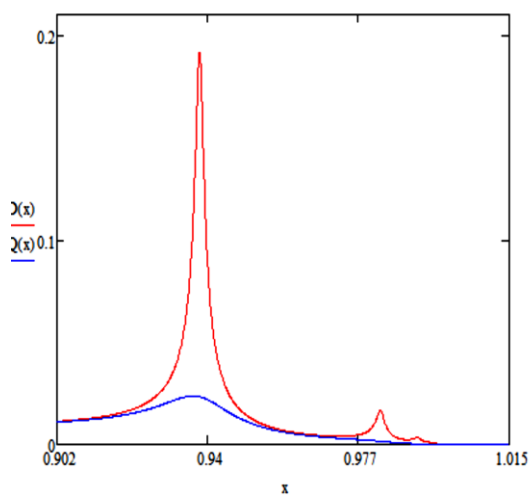
e) $p = 1000$



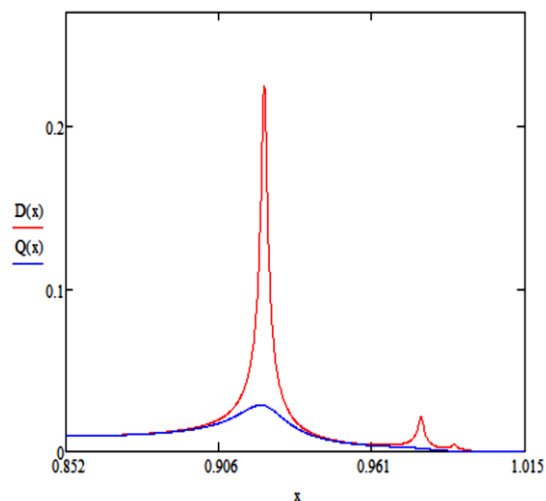
f) $p = 4000$



g) $p = 5000$



h) $p = 6000$



i) $p = 7000$

j) $p = 9000$

Рисунок 31 – $D\left(x = \frac{\omega_f}{E_j}\right)$ $q = 0.01, \delta = 0.01$ (красный), $\delta = 0.1$ (синий).

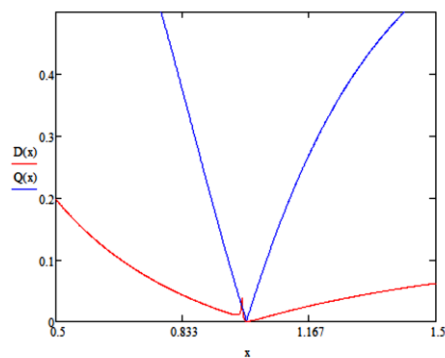


Рисунок 32 – $D\left(x = \frac{\omega_f}{E_j}\right)$ $q = 0.01, \delta = 0.01, p = 1000$ (красный), $p = 100$ (синий).

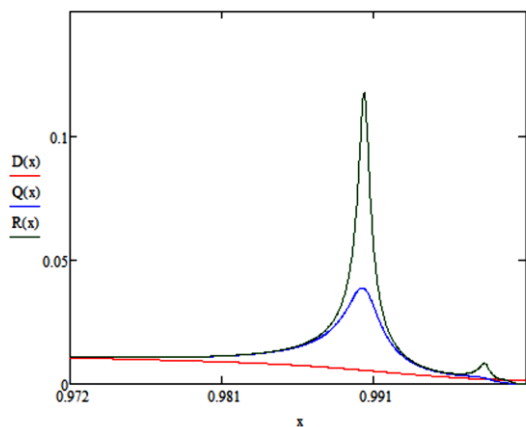


Рисунок 33 – $D\left(x = \frac{\omega_f}{E_j}\right)$ $q = 0.01, p = 1000$ $\delta = 0.1$ (красный), $\delta = 0.01$ (синий), $\delta = 0.003$ (зеленый).

Рассмотрим теперь нелинейный случай, когда ядро уравнения зависит от квадрата модуля амплитуды электромагнитной волны. Уравнение движения в таком случае примет вид:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \delta(x) \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{\gamma^2 |M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (429)$$

Тогда учитывая, что:

$$K(\omega_f) = \frac{\left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{(2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + |M|^2 + \frac{1}{T_2^2}}. \quad (430)$$

Получим формулу для коэффициента прозрачности:

$$D = \left| \frac{M_0(Nl)}{M_0(0)} \right| = \left| \cos \left(\frac{\omega_f}{v} l \sqrt{\alpha K(\omega_f)} \right) + i \frac{\sqrt{\alpha K(\omega_f)}}{2} \sin \left(\frac{\omega_f}{v} l \sqrt{\alpha K(\omega_f)} \right) \right|^{-1}. \quad (431)$$

И его безразмерную функцию:

$$\frac{D}{P_0} = \left(1 - pqX \frac{qX(1-X) - \delta}{(1-X)^2 + D + \delta^2} + \left(\frac{pqX}{2} \right)^2 \frac{(qX)^2 + 1}{(1-X)^2 + D + \delta^2} \right)^{-1/2}. \quad (432)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $kl \gg 1$.

В нелинейном случае с цепочкой кубитов имеем следующее уравнение движения:

$$v^2 M_0'' + M_0 \left(\omega_f^2 + \frac{\alpha \left((2\varepsilon_j - \omega_f) + \frac{i}{T_2} \right)}{\gamma^2 |M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \right) = 0. \quad (433)$$

Введем следующее представление:

$$M_0(x) = X(x) + iY(x). \quad (434)$$

Тогда справедливо:

$$X'' + iY'' + \frac{\omega_f^2}{v^2} (X + iY) + K(X + iY) = 0. \quad (435)$$

Ядро же также можно представить в виде:

$$K(M_0) = R(M_0) + iI(M_0), \quad (436)$$

Где:

$$R(M_0) = \frac{\alpha}{v^2} \frac{2\varepsilon_j - \omega_f}{\gamma^2 |M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}, I(M_0) = \frac{\alpha}{v^2} \frac{\frac{1}{T_2}}{\gamma^2 |M|^2 + (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}} \quad (437)$$

Предположим, что мнимая составляющая бесконечно мала в сравнении с действительной, то есть: $R \gg I$, тогда уравнение движения может быть записано:

$$r'^2 + \frac{C_2^2}{r^2} + r^2(k^2 + R(r)) - \int dx r^2 R'(r) = C_1. \quad (438)$$

Где:

$$\frac{\alpha}{\gamma^2 v^2} 2\varepsilon_j - \omega_f = a, (2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2} = b^2 \gamma^2. \quad (439)$$

Интегрируя, получим:

$$r'^2 + \frac{C_2^2}{r^2} + r^2(k^2 + R(r)) - a \frac{r^2}{r^2 + b^2} + a \ln \left(\frac{r^2 + b^2}{C_3} \right) = C_1. \quad (440)$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{C_2^2}{r^2} - r^2 k^2 - a \ln \left(\frac{r^2 + b^2}{C_4} \right)}} + C_5 = x. \quad (441)$$

1. Рассмотрим линейный случай, а именно $r \ll b$, тогда:

$$\frac{a}{k^2 b^2} = \zeta \gg 1, \frac{r_0}{r_l} = z, \left| \frac{A}{r_l} \right| = \frac{1}{D}. \quad (442)$$

В результате вычисления интеграла, являющегося решением уравнения движения, получим значение для коэффициента прохождения:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta}{4} \sin^2(lk\sqrt{\zeta})}}. \quad (443)$$

2. Рассматривая нелинейный случай, аналитический результат вычисляется в приближении: $|r_l - r_0| \ll 1$, имеет следующий вид:

$$\sqrt{1 + \chi \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{c}{(D^2 P^2 + 1)}} \right) \right)} = \frac{1}{D}. \quad (444)$$

Учитывая, что $\frac{c}{(D^2 P^2 + 1)} \ll 1$, получим для нелинейного случая следующий вид коэффициента прохождения⁴:

$$P = \sqrt{\frac{\chi}{D\sqrt{1-D^2}} - \frac{1}{D^2}} . \quad (445)$$

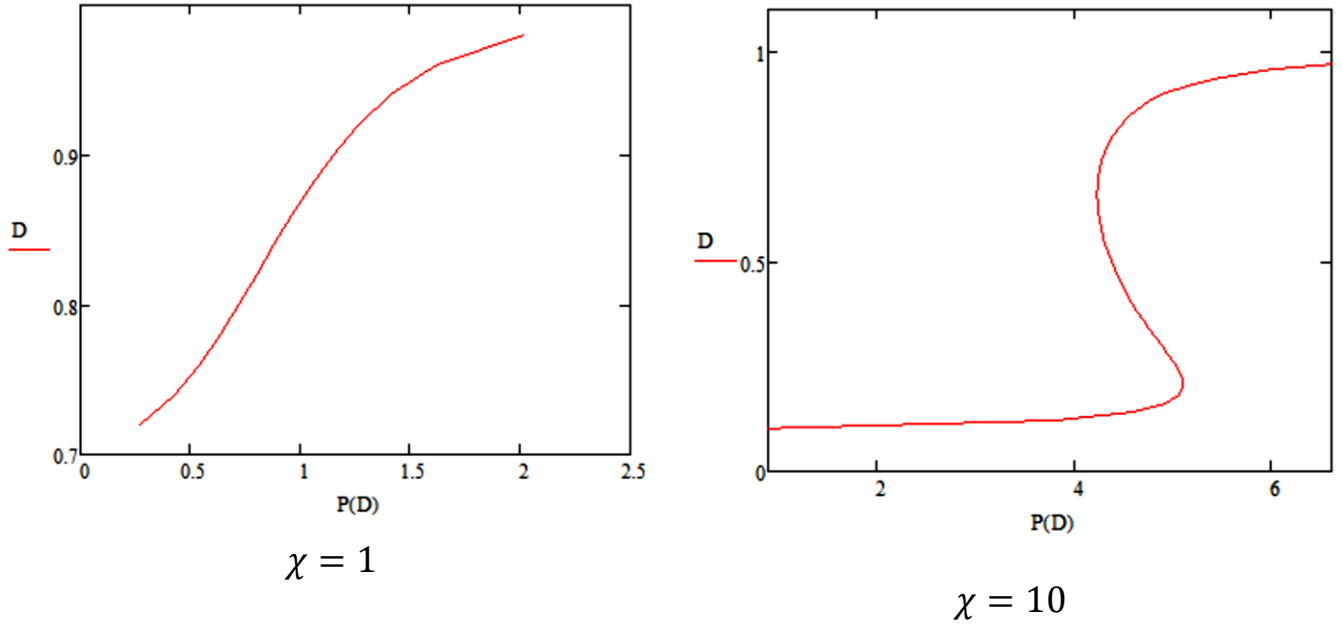


Рис. 34 – Коэффициент прохождения в нелинейном случае.

⁴ M. V. Fistul, M.A. Iontsev, Electromagnetic waves propagation through an array of superconducting qubits: manifestations of non-equilibrium steady states of qubits, Phys. Rev. V. 5, 2019

Выводы.

1. Проведено исследование систем, состоящих из резонатора с потоковыми кубитами и резонатора с зарядовыми кубитами. Проведено сравнение термодинамических характеристик этих систем, описаны фазовые переходы, происходящие в этих системах.

2. Показано, что системы, являются математически эквивалентными друг другу, физическое описание различается в том, что параметром порядка в системе с зарядовыми кубитами является обобщенная координата осциллятора (амплитуда фотонного поля), а в системе с потоковыми кубитами таким параметром является обобщенный импульс осциллятора (импульс фотонного поля). Математическая эквивалентность объясняется тем, что уравнения движения систем одинаковы с точностью до замены $P \rightarrow Q$.

3. Дисперсионное соотношение в случае: $lk \ll 1$ имеет вид:

$$\omega^2 - k^2 v^2 + \pi \frac{\beta N}{ml} \left(\frac{\omega + E_J}{(\omega + E_J)^2 + \frac{1}{\tau^2}} - \frac{\omega - E_J}{(\omega - E_J)^2 + \frac{1}{\tau^2}} \right) = 0.$$

Когда же $kl \gg 1$, то соотношение принимает вид:

$$\hbar^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{\zeta}{v^2} K^0(\omega) - \frac{\zeta}{v^2} |\tilde{M}_0|^2 K^1(\omega).$$

В случае с аномальной дисперсией получаем:

Когда $N \ll 1, l \approx L_d, l \ll L_{nl}$, то

$$M_0(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{1}{1-i\chi}} \exp\left(\frac{\tau^2}{2T_0^2(1-i\chi)}\right).$$

Этот солитон сохраняет неизменной свою форму в пространстве в процессе распространения, но его ширина становится увеличивается.

Когда $N \gg 1, l \ll L_d, l \approx L_{nl}$, то

$$M_0(\chi, \tau) = M_0(0, \tau) \exp(i\phi_{nl}(\chi, \tau)).$$

$$\phi_{nl}(\chi, \tau) = N^2 |M_0(0, \tau)|^2 \chi.$$

Когда $l > L_d, l > L_{nl}$, то решение уравнения для $N^2 = 1$ имеет следующую форму:

$$M_0(\chi, \tau) = \text{sech}(\tau) e^{\frac{i\chi}{2}}.$$

Этот вид солитона называется оптическим, так как не изменяет свою форму в процессе распространения. В случае $N^2 = 2$, решение принимает следующую форму:

$$M_0(x, t) = \frac{4(\cosh(3\tau) + 3e^{4i\chi} \cosh(\tau))e^{\frac{i\chi}{2}}}{\cosh(4\tau) + 4 \cosh(2\tau) + 3 \cos(4\chi)}$$

Этот солитон изменяет свою форму периодически с периодом: $\chi = \frac{\pi}{2}$.

В случае с нормальной дисперсией также наблюдаются следующие виды солитонов.

Когда $N \ll 0, l \approx L_d, l \ll L_{nl}$, то

$$M_0(\chi, \tau) = \sqrt{\frac{1}{1+i\chi}} \exp\left(\frac{\tau^2}{2T_0^2(1+i\chi)}\right).$$

Когда $N \gg 1, l \ll L_d, l \approx L_{nl}$, то

$$M_0(\chi, \tau) = M_0(0, \tau) \exp(i\phi_{nl}(\chi, \tau)).$$

$$\phi_{nl}(\chi, \tau) = -N^2 |M_0(0, \tau)|^2 \chi$$

Когда $l > L_d, l > L_{nl}$, то решение для $N^2 = 1$ принимает форму $M_0(\chi, \tau) = \tanh(\tau) \exp(i\chi)$. Черные солитоны высших порядков $M_0(\chi, \tau) = \tanh(N\tau) \exp(i\chi N^2)$ не стабильны в процессе распространения. Серые же стабильны и выражаются в качестве следующего решения:

$$M_0(\chi, \tau) = \exp(i\alpha\chi) v(\tau) \exp(ig(\tau)),$$

$$\text{где } v = \sqrt{1 - B^2 \text{sech}^2(N\tau)}, g = \beta B^2 \left(\tau - \frac{B \text{atanh}\left(B \tanh\frac{(N\tau)}{\sqrt{1-B^2}}\right)}{N\sqrt{1-B^2}} \right).$$

4. Было теоретически изучено распространение электромагнитной волны через одномерный массив сверхпроводящих кубитов, то есть когерентные двухуровневые системы, встроенные в низкодиссипативную линию передачи. Была изучена околорезонансная динамика. Было получено эффективное нелинейное волновое уравнение, учитывающее неравновесное состояние кубитов.

5. Получены зависимости коэффициента прохождения D в зависимости от частоты и мощности P приложенного микроволнового излучения:

Для $kl \ll 1$ в линейном случае одного кубита:

$$D = |d|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{4v^2\omega_f^2(E_j - \omega_f)^2 + \frac{1}{T_2^2}}}.$$

В случае ансамбля кубитов:

$$D = |d|^2 = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\omega_f^2 v^2 \left((2\varepsilon_j - \omega_f)^2 + \gamma^2 |d|^2 + \frac{1}{T_2^2}\right)^2}\right)}.$$

В нелинейном случае:

$$D = \left| \frac{M_0(NL)}{M_0(0)} \right| = \left| \cos\left(\frac{\omega_f}{v} L \sqrt{\alpha K(\omega_f)}\right) + i \frac{\sqrt{\alpha K(\omega_f)}}{2} \sin\left(\frac{\omega_f}{v} L \sqrt{\alpha K(\omega_f)}\right) \right|^{-1}.$$

Для $kl \gg 1$ в линейном случае:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta}{4} \sin^2(lk\sqrt{\zeta})}}.$$

И в нелинейный случай

$$\sqrt{1 + \chi \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c}{(D^2 P^2 + 1)}}\right)\right)} = \frac{1}{D}.$$

6. В частности, для обоих случаев одного кубита и ансамбля кубитов было обнаружено резонансное подавление D . Однако резонансная передача с D была обнаружена в ансамбле кубитов, сильно взаимодействующих с электромагнитным полем. В пределе высокой мощности применяемых электромагнитных волн высокое значение коэффициента прохождения восстанавливается. Сильные вариации коэффициента передачи D в зависимости от частоты и мощности электромагнитных волн могут быть использованы в электронных устройствах с квантовой эффективностью.

Список использованных источников

- 1 Mukhin S.I Instanton Sector of correlated electron systems as the origin of populated pseudo-gap and flat “Band” Behavior: analytic solution // Springer Science + Business Media. - 2009.
- 2 Jerger M Ustinov A. V, Spectroscopy of a Qubit Array via a Single Transmission Line // PACS numbers: 03.67.Lx 85.25 - 2011.
- 3 Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводимости. - М.: МЦНМО, 2000.
- 4 Кравченко В.Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- 5 Де-Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. - М.: МИР, 1968.
- 6 Лифшиц И.М. Кирпиченков В.Я, О туннельной прозрачности неупорядоченных систем. - М.: Наука, 1979.
- 7 Shevchenko S.N., Omelyanchouk A.N. Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits //Low Temperature Physics.Fizika Nizkikh Temperatur - 2012.
- 8 Пайерлс Р. Точное решение модели Пайерлса с произвольным числом электронов на элементарную ячейку. - М.: Издательство иностранной литературы, 1965.
- 9 Смолянов О.Г, Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. - М.: МГУ 1990.
- 10 Зинн-Жюстен Ж. Континуальный интеграл в квантовой механике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- 11 Маслов В.П. Комплексные Марковские цепи и континуальный интеграл в квантовой механике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- 12 Шестакова Т.П. Метод континуального интеграла в квантовой теории поля. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- 13 Брагута В.В. Континуальный интеграл в физике. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

- 14 Свидзинский А.В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости. - М.: Наука, 1982.
- 15 Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика том V: Статистическая физика, часть I. - М.: Наука, 1976.
- 16 Ландау Л.Д, Лифшиц Е.М. Теоретическая физика том IX: Статистическая физика, часть II, теория конденсированного состояния. - М.: Наука 1976.
- 17 Квасников И.А, Термодинамика и статистическая физика. Том 4: квантовая статистика. - М.: Наука, 2005.
- 18 Fradkin E. Field theories of condensed matter systems. - М.: Наука, 1991.
- 19 S. I. Mukhin¹ and M. V. Fistul, "Generation of non-classical photon states in superconducting quantum metamaterials", Superconductor Science and Technology, vol. 26, 084003 (2013).
20. Богуш А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий. - М.: Наука 2003.
21. S. I. Mukhin, «Spontaneously broken Matsubara's time invariance in fermionic system: macroscopic quantum ordered state of matter», J. Supercond. Nov. Magn., vol. 24, 1165-1171 (2011).
- 22 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Том 2. - М.: Наука, 1973.