

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

*На правах рукописи*

Халкечев Руслан Кемалович

**РАЗРАБОТКА КАРКАСНОЙ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНО-МОДЕЛЬНОЙ  
МЕТОДОЛОГИИ ПОСТРОЕНИЯ АСНИ И АСУ ТП В ГОРНОЙ  
ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

Специальность: 05.13.06 – «Автоматизация и управление технологическими  
процессами и производствами (промышленность)»

Диссертация на соискание ученой степени

доктора технических наук

Москва 2020г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	7
<b>1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ АВТОМАТИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ АСНИ И АСУ ТП В ГОРНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ</b> .....	16
1.1. Научные исследования как объект автоматизации .....	16
1.2. Основные требования, предъявляемые к АСНИ .....	22
1.3. Составные части типовой АСНИ .....	25
1.4. Анализ существующих подходов к разработке АСНИ .....	28
1.4.1. Анализ существующих работ в области системно- ориентированного подхода к разработке АСНИ .....	29
1.4.2 Анализ существующих работ в области интеграционного подхода к разработке АСНИ .....	38
1.5. Автоматизация научных исследований в области физических процессов горного производства и технологических процессов в горной промышленности .....	45
1.5.1. Функциональная задача определения деформационных свойств геоматериалов .....	48
1.5.2. Функциональные задачи определения тепловых и электрических свойств геоматериалов .....	58
1.5.3. Функциональная задача определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив .....	71
1.5.4. Функциональная задача разработки математических моделей разрушения геоматериалов .....	75
1.5.5. Административные функциональные задачи.....	78
1.6. Формулирование задач исследований .....	80
<b>2. КАРКАСНЫЙ МЕТОД РАЗРАБОТКИ АС. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ АСНИ И АСУ ТП В ГОРНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ</b> .....	86

<b>2.1. Формулирование концепции высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП .....</b>	<b>96</b>
<b>2.2. Формулирование требований к функциональным задачам высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП .....</b>	<b>98</b>
<b>2.3. Мультифрактальное математическое моделирование функциональной задачи определения деформационных свойств геоматериалов .....</b>	<b>111</b>
<b>2.3.1. Мультикомпонентная математическая модель минерала относительно деформационных свойств .....</b>	<b>112</b>
<b>2.3.2. Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными флюидом порами относительно деформационных свойств .....</b>	<b>158</b>
<b>2.3.3. Мультифрактальная математическая модель минерала с флюидными включениями относительно деформационных свойств .....</b>	<b>165</b>
<b>2.3.4. Мультифрактальная математическая модель горной породы относительно деформационных свойств .....</b>	<b>169</b>
<b>2.3.5. Мультифрактальная математическая модель породного массива относительно деформационных свойств .....</b>	<b>181</b>
<b>2.4. Мультифрактальное математическое моделирование функциональной задачи определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив .....</b>	<b>187</b>
<b>2.4.1. Мультифрактальная математическая модель горной породы относительно поля напряжений .....</b>	<b>188</b>
<b>2.4.2. Мультифрактальная математическая модель минерала с флюидными включениями относительно поля напряжений .....</b>	<b>189</b>
<b>2.4.3. Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными флюидами порами относительно поля напряжений .....</b>	<b>191</b>
<b>2.4.4. Мультифрактальная математическая модель минерала относительно поля напряжений .....</b>	<b>195</b>

<b>2.4.5. Мультифрактальная математическая модель зерна относительно поля напряжений</b>	199
<b>2.4.6. Мультифрактальная математическая модель зерна с наполненной флюидом порой относительно поля давлений</b>	201
<b>2.4.7. Перколяционная модель экспериментального исследования образования трещин в минерале под действием внешнего поля напряжений</b>	203
<b>2.5. Мультифрактальное моделирование функциональных задач определения тепловых и электрических свойств геоматериалов</b>	216
<b>2.6. Верификация мультифрактальных математических моделей геоматериалов</b>	227
<b>3. КАРКАС МАТЕМАТИЧЕСКОГО, ИНФОРМАЦИОННОГО И ПРОГРАММНОГО ВИДОВ ОБЕСПЕЧЕНИЯ АСНИ И АСУ ТП</b>	238
<b>3.1. Каркас математического обеспечения АСНИ и АСУ ТП</b>	238
<b>3.1.1. Математические модели и алгоритмы определения деформационных свойств мультифрактальных объектов</b>	240
<b>3.1.2. Математические модели и алгоритмы определения тепло- и электропроводных свойств мультифрактальных объектов</b>	279
<b>3.1.3. Алгоритм определения внешнего поля напряжений, действующего на мультифрактальный объект четвертого или пятого порядков сложности</b>	290
<b>3.2. Каркас информационного обеспечения АСНИ и АСУ ТП</b>	300
<b>3.3. Высокоуровневый каркас программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП</b>	304
<b>4. РАЗРАБОТКА АСНИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА И АСУ ТП ЗАБИВКИ СВАЙ В ОПОЛЗНЕОПАСНЫХ УЧАСТКАХ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ</b>	317
<b>4.1. Формулирование концепции АСНИ физических процессов горного производства</b>	317

<b>4.2. Формулирование требований к функциональным задачам АСНИ физических процессов горного производства .....</b>	<b>318</b>
<b>4.3. Экспертная система принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов .....</b>	<b>325</b>
<b>4.3.1. О представительном объеме геоматериалов различных порядков сложности .....</b>	<b>331</b>
<b>4.3.2. Алгоритм анализа минерала на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры .....</b>	<b>336</b>
<b>4.3.3. Алгоритм анализа минерала с наполненными флюидом порами на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры .....</b>	<b>344</b>
<b>4.3.4. Алгоритм анализа минерала с флюидными включениями на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры .....</b>	<b>347</b>
<b>4.3.5. Алгоритм анализа горной породы на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры .....</b>	<b>356</b>
<b>4.3.6. Алгоритм анализа породного массива на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры .....</b>	<b>366</b>
<b>4.3.7. Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры .....</b>	<b>369</b>
<b>4.3.8. Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам, адекватно описываемым изотропной или анизотропной сплошной средой .....</b>	<b>378</b>
<b>4.3.9. Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам, адекватно описываемым однородной или неоднородной сплошной средой .....</b>	<b>384</b>

<b>4.3.10. Алгоритмы идентификации теорий моделирования .....</b>	<b>386</b>
<b>4.3.11. Продукционные правила, определяющие выбор теории моделирования .....</b>	<b>395</b>
<b>4.3.12. Архитектура подсистемы механизма логического вывода .....</b>	<b>401</b>
<b>4.4. Программное обеспечение АСНИ физических процессов горного производства .....</b>	<b>405</b>
<b>4.5. Техническое обеспечение АСНИ физических процессов горного производства .....</b>	<b>426</b>
<b>4.6. Формулирование концепции АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов .....</b>	<b>428</b>
<b>4.7. Формулирование требований к функциональным задачам АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов .....</b>	<b>430</b>
<b>4.8. Математическое моделирование и алгоритмизация функциональной задачи определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник свай .....</b>	<b>433</b>
<b>4.9. Программное обеспечение АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов .....</b>	<b>448</b>
<b>4.10. Техническое обеспечение АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породных массивов .....</b>	<b>462</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>464</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>470</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>492</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А .....</b>	<b>492</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б .....</b>	<b>493</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В .....</b>	<b>494</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Г .....</b>	<b>495</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность и степень разработанности темы исследования**

Всевозрастающие темпы добычи полезных ископаемых, истощение эксплуатируемых месторождений и конкуренция на мировых минерально-сырьевых рынках требуют разработки новых и совершенствования существующих автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) в горной промышленности. В свою очередь, разработка таких систем невозможна без проведения комплексных научных исследований в области физических процессов горного производства – междисциплинарной науки, занимающейся изучением физических свойств геоматериалов (материалов геологического происхождения) при их взаимодействии с естественными и искусственно создаваемыми полями.

Анализ состояния информационных технологий в области горного дела свидетельствует о том, что в большинстве существующих научных организаций при разработке инноваций в области физических процессов горного производства, пользуются совокупностью пакетов прикладных программ и технических средств, несогласованных между собой ни по форматам данных, ни по интерфейсам взаимодействия. И лишь в некоторых из организаций для повышения качества и снижения трудоемкости научной деятельности разрабатываются и используются автоматизированные системы научных исследований (АСНИ), определяемые как программно-аппаратные комплексы, позволяющие получить новые знания об изучаемых объектах путем планирования, реализации, анализа и управления экспериментальными и теоретическими исследованиями. Анализ тех немногих экземпляров АСНИ, применяемых в области физических процессов горного производства, свидетельствует о том, что при их разработке используется интеграционный подход. В рамках данного подхода построение любой АСНИ осуществляется посредством конфигурации и последующего объединения готовых компонентов программного и технического видов обеспечений. Среди работ, выполненных в

рамках интеграционного подхода, особо следует отметить труды Накагавы А.С. [207], Стаффорда Дж.Э. [225], Макдауэлла Р.Д. [203], Де Сильвы Т. [180], Крука М.Дж. [179], Рудольфи Ф. [217], Ачуры З. [167], Рубачи М. [215], Милстеда А.Дж. [206] и др.

К достоинствам интеграционных АСНИ можно отнести их высокую степень гибкости и расширяемости, обусловленную тем, что любой компонент программного и технического видов обеспечения данных систем может быть настроен или потенциально подвергнут замене. Несмотря на все преимущества интеграционного подхода, есть у него ряд недостатков, особенно проявляемых при осуществлении проектов по автоматизации научных исследований в области физических процессов горного производства. Так, в частности программное обеспечение (ПО) АСНИ, реализованное с помощью данного подхода, функционирует в «разнородной» среде, что нередко приводит к появлению большого количества сбоев. Другой недостаток рассматриваемых систем связан с тем, что при их разработке компоненты математического обеспечения (математические методы и модели) практически не документируются и поставляются исследователям уже реализованными в составе компонентов программного обеспечения, не поддающихся необходимым в процессе исследований изменениям.

Но все же главным недостатком интеграционных АСНИ, и как следствие – разработанных с их помощью АСУ ТП, является низкое качество результатов решения данными системами своих основных функциональных задач: определение деформационных, тепло- и электропроводных свойств; определение внешнего поля напряжения, действующего на породный массив; математическое моделирование разрушения геоматериалов. При этом здесь и далее под функциональной задачей следует понимать любую задачу, связанную с основным назначением функционирования соответствующей конкретной автоматизированной системы или ее части [18]. Существующие АСНИ и АСУ ТП при решении своих основных функциональных задач не учитывают того факта, что для каждого геоматериала существует представительный объем, т.е.

минимальный объем, начиная с которого исследуемые объекты обладают природной мультифрактальной структурой, и вследствие этого проявляют свои макроскопические физические свойства. Другими словами, если при использовании экспериментальных и (или) теоретических методов размеры исследуемого геоматериала превышают соответствующую величину представительного объема (которую необходимо определить), то получаемые значения параметров физических свойств будут статистически совпадать, в противном случае – носить приближенный характер, не имея устойчивого среднего. Однако для большинства геоматериалов размеры представительного объема настолько велики, что применение существующих экспериментальных методов приведет к значительным ошибкам в определении параметров физических свойств и моделировании процессов разрушения. Выходом в сложившейся ситуации является применение методологии математического моделирования функциональных задач, проводимой вне рамок существующих теорий и методов, не позволяющих учесть мультифрактальную структуру геоматериалов.

Итак, интеграционный подход к разработке автоматизированных систем (АС) не в состоянии решить проблему автоматизации научной деятельности в области физических процессов горного производства. На первый взгляд для решения рассматриваемой проблемы можно воспользоваться другим подходом, при котором разработка АСНИ производится в рамках единого целостного проекта, включающего анализ, проектирование и последовательную реализацию математического, информационного, программного и технического видов обеспечений системы. Развитию методов такого системно-ориентированного подхода посвящено множество отечественных научных работ, среди которых применительно к разработке АСНИ, следует отметить труды Ветренко М.С.[17], Шотина А.Б.[163], Поезжаловой С.Н.[72], Селиванова С.Г.[81], Сладковского Д.А.[82] и др. Анализ работ в данном направлении позволяет сделать вывод, что системно-ориентированные АСНИ, несмотря на свою высокую степень проработанности и устойчивости, имеют малую степень расширяемости и

повторного использования полученных проектных решений.

В сложившейся ситуации приобретает актуальность разработка новой каркасной мультифрактально-модельной методологии построения АС, сочетающей в себе достоинства интеграционных и системно-ориентированных подходов. Такая методология, с одной стороны должна основываться на механизмах конфигурирования, а с другой – на разработке и использовании мультифрактальных математических моделей (формирующих соответствующее математическое и информационное виды обеспечения), предназначенных для решения функциональных задач АС в нескольких предметных областях. При этом для достижения большей степени гибкости, расширяемости и повторного использования проектных решений предлагаемая методология должна быть эффективно применимой не только при построении АСНИ, но и при разработке систем класса АСУ ТП, поскольку в соответствии со сферой применения методы решения многих функциональных задач данных систем совпадают.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод об актуальности разработки каркасной мультифрактально-модельной методологии построения АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности.

**Цель исследования** – разработать новые формализованные методы и средства построения АСНИ и АСУ ТП вместе составляющие основы каркасной мультифрактально-модельной методологии построения АС.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие **задачи**:

- 1) разработка и формализация каркасного метода построения АС;
- 2) разработка теоретических основ мультифрактального математического моделирования функциональных задач определения деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов, а также величины внешнего поля напряжений, действующего на породный массив;
- 3) разработка программного фреймворка (высокоуровневого каркаса ПО) АСНИ и АСУ ТП, функциональные задачи которых связаны с определением напряженно-деформированного состояния, процесса тепло- и электропроводности, а также разрушения различного рода объектов мультифрактальной структуры;

4) проектирование и реализация экспертной системы поддержки принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов;

5) построение в рамках предложенной методологии АСНИ физических процессов горного производства и АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов.

**Методология и методы исследований.** Для решения поставленных научных задач использованы: математическое моделирование, объектно-ориентированный анализ, проектирование и программирование, информационное моделирование баз данных, методы искусственного интеллекта.

**Основные научные положения, выносимые на защиту:**

- каркасный метод построения АС, который позволил спроектировать и реализовать программно-технические архитектуры систем посредством конфигурирования взаимосвязанной совокупности классов, получаемых на основе построения математических моделей универсального типа, и отвечающих за решение основных функциональных задач во многих предметных областях;
- теоретические основы мультифрактального моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности, позволяющие в отличие от своих аналогов за счет учета различных видов неоднородностей (газовых и жидкостных включений, границ между структурно-текстурными составляющими) установить количественно адекватные значения эффективных тензорных характеристик (погрешность менее 5%), определяющих деформационные, тепло- и электропроводные свойства геоматериалов, а также установить величину внешнего поля напряжений, действующего на породный массив;
- высокоуровневый программный фреймворк, позволивший разработать устойчивое, гибкое и расширяемое ПО АСНИ и АСУ ТП, функциональные задачи которых связаны с определением напряженно-деформированного состояния, процессов тепло- и электропроводности, моделирования разрушения объектов мультифрактальной структуры и других подзадач административного типа;
- гибридный метод разработки экспертных систем, который решает частично-

формализуемые задачи посредством создания базы знаний предметной области на основе эвристик и программных реализаций алгоритмов, а также использования механизма логического вывода, базирующегося на применении взвешенного ориентированного графа;

– АСНИ физических процессов горного производства, предназначенная для разработки количественно адекватных математических моделей, допускающих интеграцию в программное обеспечение АСУ ТП, АСТПП и других систем, применяемых в горной промышленности;

– АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов, основанная на многоуровневой архитектуре ПО, позволяющего в режиме реального времени контролировать и регулировать величину осевой нагрузки на наголовник свай, тем самым снижая риски схода оползня.

**Научная новизна** работы состоит:

– в разработке нового каркасного метода построения АС, заключающегося: в анализе требований, проектировании соответствующего математического и информационного видов обеспечений, и последующей реализации на их основе программно-технической архитектуры, детализация которой посредством механизмов наследования, агрегирования, добавления классов позволяет получить полноценно действующий образец системы;

– в разработке теоретических основ мультифрактального моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности в виде определения деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов, а также установления величины внешнего поля напряжений, действующего на породный массив;

– во введении нечеткого тензора – нового научного понятия, развивающего методы математического моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в условиях отсутствия достаточно точных знаний о свойствах изучаемых неоднородных анизотропных объектов;

– в разработке высокоуровневого программного фреймворка (каркаса), детализация которого позволяет спроектировать и реализовать программное

обеспечение АСНИ, АСУ ТП и других систем, функциональные задачи которых связаны с определением напряженно-деформированного состояния, коэффициентов тепло- и электропроводности объектов мультифрактальной структуры, аутентификации, резервного копирования данных и других административных подзадач;

– в разработке гибридного метода построения экспертных систем, в котором взвешенный ориентированный граф используется в качестве модели формирования рассуждений механизма логического вывода и базы знаний, содержащей в качестве фактов программные реализации алгоритмов (основанных на математических моделях анализа объектов) и эвристические правила;

– в разработке АСНИ физических процессов горного производства, предназначенной для получения новых знаний в виде количественно адекватных математических моделей геоматериалов, при их взаимодействии с естественными и искусственно создаваемыми полями;

– в разработке АСУ ТП забивки свай с целью снижения рисков возникновения оползней, позволяющей в зависимости от напряженно-деформированного состояния геоматериалов, глубины залегания и размеров сваи, определять оптимальную величину осевой нагрузки гидравлического молота на сваю, при которой отсутствует излишняя динамическая нагрузка на породный массив.

**Достоверность и обоснованность** научных положений и результатов исследований подтверждается следующим:

– корректностью применения апробированного математического аппарата: методов математического моделирования трудноформализуемых объектов, теории потенциала, тензорного исчисления, теории псевдодифференциальных операторов, методов нечеткого моделирования систем, теории интегральных уравнений, методов фрактальной и мультифрактальной геометрии, нечеткой теории динамических систем, уравнений в частных производных, понимаемых в смысле обобщенных функций;

– корректностью применения методологий информационных технологий: объектно-ориентированного анализа, проектирования и программирования,

унифицированного языка моделирования, искусственного интеллекта;

– согласованием результатов, полученных на основе использования предложенных математических моделей, с данными других исследователей и натурных наблюдений.

#### **Теоретическая и практическая значимость работы:**

– разработана совокупность взаимосвязанных математических моделей и методов, вместе составляющих теоретические основы мультифрактального математического моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности;

– разработан каркасный метод построения АС, основанный на проектировании и реализации математического, информационного, программного и технического видов обеспечения, предназначенных для решения функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в нескольких предметных областях;

– в рамках каркасного метода разработана АСНИ физических процессов горного производства, отличающаяся от своих неполных аналогов высокой степенью гибкости и устойчивости, свойственным системам, функционирующим в рамках единого программного адресного пространства;

– в рамках каркасного метода получена АСУ ТП забивки свай, позволяющая в режиме реального времени поддерживать оптимальную величину осевой нагрузки ударника на наголовник свай с целью обеспечения устойчивости оползнеопасного участка массива.

#### **Реализация выводов и рекомендаций работы**

Результаты диссертационной работы внедрены: на предприятии ЗАО «Известняк» Джегонасский карьер в части использования АСНИ физических процессов горных работ при решении задач проектирования открытых горных работ и управления технологическими процессами дробления и измельчения известняков, а также АСУ ТП забивки свай при проведении горно-строительных работ (Приложение А); в научно-исследовательской деятельности Высокогорного геофизического института Росгидромета в части АСНИ физических процессов горного производства при определении напряженно-деформированного состояния

селе- и лавиноопасных снежных пластов (Приложение Б); в деятельности ООО «ЮГЭНЕРГОРЕМОНТ» в части АСУ ТП забивки свай при проведении ремонтно-строительных работ (Приложение В); в деятельности ООО «СНАБ» в части применения АСУ ТП забивки свай при строительстве фундаментов зданий и сооружений (Приложение Г).

**Апробация работы.** Основные результаты работы по мере их получения докладывались:

- на девятом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике. Весенняя и Осенняя сессии (г. Кисловодск – г. Волгоград, 2008г.);
- на тринадцатом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике. Летняя и Осенняя сессии (г. Петрозаводск – г. Сочи, 2012г.);
- на двадцать седьмой международной конференции «Актуальные проблемы в современной науке и пути их решения» (г. Москва, 2016г.);
- на двадцать пятом международном научном симпозиуме «Неделя горняка – 2017» (г. Москва, 2017г.).

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в 60 научных трудах, в том числе 7 свидетельств о регистрации программы для ЭВМ, 47 статей в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, 6 работ в изданиях, входящих в базы международного цитирования Scopus.

**Структура диссертации.** Работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы из 237 наименований, 4 приложений, включает 3 таблицы, содержит 129 рисунков.

# 1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ АВТОМАТИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ АСНИ И АСУ ТП В ГОРНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

## 1.1. Научные исследования как объект автоматизации

Перспективы достижения стратегических целей повышения конкурентоспособности и значительного увеличения доли российских компаний на высокотехнологичных мировых рынках во многом зависят от повышения эффективности внедрения инноваций в промышленном секторе экономики. В свою очередь разработка инноваций невозможна без проведения комплексных научных исследований, направленных на приобретение новых знаний о признаках, свойствах, связях и отношениях изучаемых объектов, явлений или процессов производства. Для повышения качества и снижения трудоемкости такой деятельности производят автоматизацию исследовательских работ.

Научные исследования существенно отличаются от других объектов автоматизации. В связи с этим рассмотрим, как организован процесс научных исследований, и что с позиций современного состояния информационных технологий в этом процессе поддается автоматизации.

Как известно, научные исследования значительно отличаются друг от друга используемыми методами и средствами. Несмотря на это, можно выделить совокупность этапов, которые присутствуют в каждом научном исследовании. К ним относятся: формулирование целей и задач исследования; теоретическое исследование; экспериментальное исследование; анализ результатов. При этом необходимо отметить, что научные исследования носят итерационный характер, т.е. одни и те же этапы повторяются несколько раз. Более того, порядок следования данных этапов от одной итерации к другой может меняться.

Любое научное исследование начинается с формулирования целей, выражающих его основной смысл, обосновывается их актуальность для науки и практики. Далее, с помощью разработанных в науке понятий, категорий,

принципов, суждений формулируются задачи исследований. Очевидно, что первый этап является творческим процессом, и не поддается автоматизации.

Этап теоретического исследования, основывается на применении общелогических (анализ, синтез, дедукция, индукция и др.) и теоретических методов (моделирование, аксиоматический метод и др.), позволяющих получать новые знания путем осмысления и обобщения данных об изучаемом объекте. При этом здесь и далее, под термином «объект» понимается не только то, что обычно именуется этим словом, но и любая ситуация, явление, процесс и т. д.

Одной из наиболее эффективных и распространенных методологий теоретического исследования, применяемых для изучения объектов производства, является математическое моделирование. Остановимся на ней более подробно. С момента появления данная методология претерпела значительные изменения, как в части инструментальных средств, обеспечивающих ее реализацию, так и в части появления новых методов построения адекватных математических моделей. Несмотря на это, основные стадии математического моделирования остались неизменными, а именно – выбор реального объекта, построение содержательной модели, построение математической модели, изучение математической модели [62].

На первой стадии производится выбор объекта. В нашем случае этот выбор полностью определяется первым этапом – формулированием целей и задач исследования.

На второй стадии производится построение содержательной модели, т.е. формулируются интересующие исследователя свойства на языке той или иной науки, другими словами, строится механическая, либо физическая, либо биологическая, либо социальная и т. п. модель объекта. При построении содержательной модели исследователь отвлекается от различного рода неидеальностей, неправильностей изучаемого реального объекта (конечно, если эти неидеальности не являются сами предметом исследования), переходит к его упрощенному, схематическому описанию.

На следующей стадии производится перевод содержательной модели на

формальный математический язык, т.е. строится математическая модель рассматриваемого объекта. Данная стадия существенно опирается на неформальное обсуждение постановки задачи и необходимую квалификацию исследователя в рассматриваемой области.

Заключительная стадия состоит в изучении математической модели, или другими словами – решении полученной математической задачи посредством выбора (или разработки) надлежащих аналитических и (или) вычислительных методов и их реализацией в виде программы для ЭВМ.

Полученная программа является компьютерной реализацией математической модели рассматриваемого объекта, в которой все участвующие величины являются метками соответствующих реальных свойств. Это дает возможность в процессе решения математической задачи привлекать дополнительные сведения, которые могут упростить этот процесс, либо выбирать из нескольких решений то, которое нужно, и т. д.

Таким образом, этап теоретического исследования преимущественно является творческим процессом и поддается лишь частичной автоматизации, да и то, только на заключительной стадии в части реализации на ЭВМ аналитических и численных методов решения поставленных задач. При этом на сегодняшний момент выбор того или иного метода решения математической задачи как правило осуществляет сам исследователь, опираясь на свои знания и личный опыт.

Перейдем к следующему этапу – экспериментальное исследование. Он в значительной степени основан на получении новых знаний и закономерностей на основе эмпирических методов (наблюдение, сравнение, описание, измерение и др.) и направлен на проверку ранее выдвинутых теоретических положений путем воздействия на изучаемый объект различных инструментальных средств, приборов, установок и др.

Рассматриваемый этап можно условно разделить на две стадии. Первая из них связана с разработкой методологии эксперимента – формулирование идеи и планирование эксперимента, способов его проведения, проектирование,

изготовление и (или) настройка экспериментальной установки и др.

Вторая стадия – проведение эксперимента, в рамках которого осуществляется сбор и первичная обработка опытных данных, контроль параметров установки, а также поиск функциональной зависимости между параметрами, описывающими состояние рассматриваемого объекта. Поскольку на второй стадии все действия выполняются по заранее известному алгоритму, то он поддается высокой степени автоматизации. Первая же стадия, безусловно, является творческим процессом.

Требуется особо отметить, что зачастую прямой натурный эксперимент над объектом исследований оказывается дорогостоящим, занимает много времени, либо опасен, либо попросту невозможен [80]. В таком случае рассматриваемый этап в процессе научных исследованиях будет отсутствовать.

Перейдем к заключительному этапу – анализу результатов. На этом этапе производится контроль правильности (или как говорят верификации) полученных результатов теоретического исследования с экспериментальными и другими известными фактами. Сюда, как правило, входит и объяснение обнаруженных в процессе научного исследования закономерностей.

В случае использования методологии математического моделирования в качестве основного метода теоретических исследований, на этапе анализа результатов осуществляется проверка каждой разработанной математической модели на соответствие требованию ее адекватности (правильного соответствия) изучаемому объекту. Под этим прежде всего понимается [62]:

1) правильное качественное описание рассматриваемых свойств объекта, например, возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, об их взаимосвязи, и т. п.; 2) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

В соответствии с тем, ставится ли второе условие или нет, говорят соответственно о количественных или качественных моделях. Вместо количественной адекватности говорят также о точности модели [62].

В случае удовлетворения разработанной математической модели требованию адекватности принимается решение о завершении научного исследования. В противном случае осуществляется еще одна итерация научного исследования с необходимыми коррекциями на каждом из этапов (например, учет новых свойств объекта при построении содержательной и математической моделей, проведение экспериментов с другим оборудованием и др.)

Таким образом, рассматриваемый этап поддается автоматизации, но только в той его части, которая касается оценки погрешностей разработанных математических моделей. В остальном же этап анализа результатов является творческим процессом.

Проведенный выше анализ показывает, что процесс научных исследований обладает рядом специфических особенностей, отличающих его от других объектов автоматизации. К данным особенностям можно отнести следующее [93, 71].

1. Малая степень автоматизации процесса научных исследований. Различные стороны научной деятельности в неодинаковой степени поддаются автоматизации. Сравнительно просто автоматизируются процедуры, связанные со стадией проведения эксперимента (регистрация, обработка, накопление, отображение информации и т.п.). В тоже время, такие стороны научной деятельности, как формулирование целей и задач исследований, построение содержательной и математической моделей, анализ результатов и др., с позиций современного состояния информационных технологий являются творческими процессами, и автоматизации не подлежат.

2. Высокий уровень неопределенности хода и результата процесса научных исследований. Порядок и состав каждого этапа научных исследований заранее не определен, что существенно осложняет процесс автоматизации. Подобная неопределенность следует из специфики научного познания, вероятностного характера как самого процесса исследований, так и получаемых результатов. Также следует отметить, что наличие неопределенности в исследовательских работах приводит к неполной предсказуемости результатов, а иногда

непредсказуемости вообще, что также накладывает трудности при проведении работ по автоматизации.

3. Необходимость обработки больших объемов несистематизированной информации. Важнейшей особенностью научных исследований является наличие значительного объема информации, роль которой очень значительна, разнообразна и специфична. Проведение научно-исследовательских работ сопровождается колоссальным потоком информации, получаемой на различных стадиях исследований и требующей специальных методов обработки. Так, например, только этап экспериментальных исследований дает большой объем данных, поступающих с различных датчиков, экспериментальной установки и др. При этом для автоматизации данного этапа необходимо предусмотреть разработку методов получения и обработки данных от участвующих в эксперименте технических средств.

4. Уникальность научного исследования. Каждое научное исследование имеет определенные признаки, отличающие его от других аналогичных исследований. Данные признаки могут проявляться в различных исследованиях в неодинаковой степени, однако их присутствие обязательно, поскольку иначе такое исследование уже не может относиться к категории научного. Черты уникальности научного исследования связаны с особенностями самого изучаемого объекта, постановкой целей и задач, методами и средствами проведения экспериментальных исследований и др.

5. Значительная роль человеческого фактора. Научные работники занимают особое положение в процессе проведения научных исследований и от того, какова их квалификация, зависит успех всего исследования в целом. Современные комплексные исследования проводятся большими группами ученых. В связи с этим, одной из целей автоматизации научных исследований является обеспечение эффективного взаимодействия между всеми лицами, участвующими в данном процессе.

Для автоматизации процесса научных исследований традиционно разрабатывается и используется специальный класс систем. В отечественной

науке этот класс получил название – автоматизированных систем научных исследований (АСНИ), также в литературе встречаются такие термины-синонимы как САНИ – система автоматизации научных исследований, САЭ – система автоматизации эксперимента, АСОЭД – автоматизированная система обработки экспериментальных данных, САНТЭ – система автоматизации научно-технических экспериментов [84].

Первые системы, которые в той или иной степени можно отнести к классу АСНИ, появились в конце 50-х годов прошлого века, и были предназначены лишь для обработки экспериментальных данных отдельных научных исследований [84]. В 60–70-х годах начала формироваться методология автоматизации научных исследований [39, 83], появился первый успешный опыт разработки и использования данного класса систем. И лишь с начала 80-х годов сформировались следующие основные цели создания АСНИ, которые справедливы и по сегодняшний день: обеспечение высоких темпов разработки инноваций; повышение эффективности и качества научных исследований; получение качественно новых научных результатов; сокращение сроков, уменьшения трудоемкости научных исследований; улучшение условий труда персонала, участвующего в проведении экспериментов.

## **1.2. Основные требования, предъявляемые к АСНИ**

Как известно, каждая АСНИ обладает своими индивидуальными свойствами, отличающими ее от других систем данного класса. Несмотря на это, перечисленные выше особенности научных исследований как объектов автоматизации позволяют сформулировать основные требования, которым должна удовлетворять любая АСНИ.

Одним из главных требований, предъявляемых к АСНИ, является гибкость [71, 64], определяемая как способность системы перестраивать свою работу в соответствии с возникающими изменениями, сохраняя при этом заданный уровень эффективности. При этом перестройка функционирования системы

происходит без привлечения дополнительных ресурсов, а за счет оперативного изменения технических характеристик используемого оборудования, алгоритмов и методов обработки информации, математического обеспечения и пр. Данная особенность АСНИ является принципиальной, поскольку подобные системы создаются и эксплуатируются в условиях дефицита информации о свойствах изучаемого объекта, так как именно для получения такой информации они и предназначены.

Однако возникают ситуации, когда АСНИ не в состоянии поддерживать заданный уровень эффективности без привлечения дополнительных средств и принципиальных изменений в своей архитектуре. Вследствие этого вторым важным требованием, предъявляемым к АСНИ, является расширяемость. Необходимость расширяемости следует из появления новых научных проблем и задач, для решения которых ни архитектура, ни математическое обеспечение, ни технические средства системы не были рассчитаны. Отсюда является очевидным, что требование расширяемости может быть выполнено при появлении у АСНИ новых функций, которыми она не обладала на момент возникновения указанных изменений. При этом добавление новой функциональности невозможно осуществить без соответствующих модификаций в системе. Именно поэтому при проектировании АСНИ необходимо предусмотреть использование таких программных и технических решений, которые бы делали возможным дальнейшее быстрое развитие системы без переделок и изменений принципиального характера [93].

К другому требованию, предъявляемому практически к любой АСНИ, можно отнести коллективность использования. Оно выражается в том, что система должна быть многопользовательской и направленной на координацию научной деятельности ученых, инженеров, конструкторов и других лиц, участвующих в процессе научных исследований. Соответствие системы данному требованию является одной из самых главных предпосылок реализации основных целей создания АСНИ – ускорять ход научных исследований, снижать их трудоемкость и изучать сложные объекты в наиболее полном и точном объеме.

Следующим основным требованием является – способность к решению широкого класса задач. Это требование указывает на то, что система должна быть многозадачной, т.е. предназначенной для решения разнообразных научных задач любой сложности. Именно поэтому на данный момент в информационных технологиях превалирует подход, при котором разрабатываемые АСНИ направлены на автоматизацию научных исследований в различных предметных областях. Несмотря на это, иногда на практике встречаются научные задачи настолько сложные и трудоемкие, что для решения каждой из них создаются отдельные АСНИ. Но, как показывает опыт, каждая такая АСНИ впоследствии находит большое применение и для решения задач, смежных с той, для которой система изначально создавалась.

Одним из главных требований, предъявляемым к АСНИ, является модельная ориентированность результата исследования. Основным видом информации, получаемой на выходе АСНИ, являются обработанные или обобщенные экспериментальные данные, а также самое главное – построение и (или) исследование на их основе математических моделей [64]. Количественная и качественная адекватность данных моделей должна обеспечиваться всем комплексом технических, программных и других средств системы. При этом следует особо отметить, что в системах рассматриваемого класса при построении математических моделей могут использоваться уже разработанные модели. Следовательно, АСНИ можно считать предназначенной для получения и (или) исследования математических моделей, которые могут использоваться затем в других автоматизированных системах.

Таким образом, приходим к последнему основному требованию, которому должна удовлетворять любая АСНИ, – возможность интеграции с другими классами систем. Именно тесное взаимодействие АСНИ с другими системами, такими как АСУ ТП, АС ТПП (автоматизированная система технологической подготовки производства) и др., позволяет результатам научных исследований реализоваться на практике в продуктах, услугах или технологиях. В этом контексте особого внимания заслуживает наиболее распространенная на практике

интеграция типа АСНИ – АСУ ТП, когда одни и те же средства применяются как для проведения научных исследований, так и для целей управления соответствующими технологическими процессами. При этом результаты исследований в виде соответствующих математических моделей выступают в качестве основы для разработки методов управления технологическими процессами.

### **1.3. Составные части типовой АСНИ**

Согласно стандартам серии ГОСТ 34.201-89, любая автоматизированная система, в том числе и АСНИ, должна обязательно включать пять видов обеспечения: техническое, математическое, информационное, организационное и программное. Рассмотрим их более подробно.

Техническое обеспечение АСНИ представляет собой совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих технических средств, предназначенных для автоматизации процесса научных исследований. К числу основных технических средств, входящих в состав любой из рассматриваемого класса систем, можно отнести: ЭВМ любого типа, устройства сбора и хранения информации (внешние запоминающие устройства), устройства передачи данных и линии связи (модемы, сетевые карты и др.), измерительную аппаратуру (различные рода датчики, микроскопы и др.) и экспериментальную установку.

Математическое обеспечение АСНИ является одним из самых важных видов обеспечений. От его состава зависит успех функционирования любой системы рассматриваемого класса. Данное обеспечение включает совокупность математических методов, моделей и алгоритмов, используемых при автоматизации процесса научных исследований. Элементы математического обеспечения существенно зависят от предметной области, на которой специализируется АСНИ. Так, например, если система АСНИ направлена на решение задач такой области знаний как материаловедение, к подобным элементам могут быть отнесены – численные методы решения

дифференциальных уравнений в частных производных, методы принятия решений, теории катастроф и др. Однако, прежде всего специфика предметных областей проявляется в математических моделях исследуемых объектов, а именно в том, будут ли они динамическими или статическими, функциональными или структурными и т.д.

Таким образом, состав математического обеспечения от одной АСНИ к другой может весьма отличаться, но его практическое использование в процессе исследований происходит только после реализации его в программном обеспечении.

Следующим видом обеспечения, входящим в состав любой АСНИ является информационное обеспечение. Оно объединяет всевозможные данные, необходимые для выполнения научных исследований. Эти данные могут быть представлены в виде тех или иных документов на различных носителях, содержащих сведения справочного и (или) нормативного характера о методах и средствах проведения экспериментов, текущем состоянии исследований, структур и параметров изучаемых объектов и т.д. Однако основную часть информационного обеспечения любой АСНИ составляют базы данных (БД), которые содержат структурированную информацию о промежуточных и конечных результатах экспериментальных и теоретических исследований. Такой подход позволяет АСНИ обеспечить централизованное накопление и коллективное использование информации об изучаемом объекте.

Организационное обеспечение АСНИ представляет собой совокупность документов, устанавливающих организационную структуру, права и обязанности пользователей и эксплуатационного персонала в условиях функционирования системы. С момента введения стандарта ГОСТ 34.201-89, в связи с интенсивным развитием информационных технологий, роль данного вида обеспечения заметно снизилась и на данный момент носит явно вспомогательный характер. По этой причине организационное обеспечение АСНИ в дальнейшем рассмотрении учитывать не будем.

Последней части АСНИ – программному обеспечению (ПО) отводится

очень важная роль, так как именно оно настраивает систему на проведение конкретного научного исследования, а также определяет что, как и когда должно делать оборудование [93]. Данное обеспечение включает в себя набор взаимодействующих программ, согласованных по функциям и форматам данных, предназначенных для функционирования автоматизированной системы.

Рассмотрим архитектуру программного обеспечения типовой АСНИ [93]. Архитектура такой системы имеет многоуровневую структуру. Количество таких уровней от одной системы к другой отличается. Несмотря на это, достаточно часто в архитектуре АСНИ обязательно присутствуют два уровня – инфраструктурный и прикладной.

Инфраструктурный уровень тесно связан с объектом исследований. На данный уровень возлагается организация процесса экспериментирования – управление экспериментальной установкой, получение и обработка данных, накопление и представление первичных результатов, контроль работоспособности технического и программного обеспечения всей системы в целом и др. Необходимо особо отметить, что наличие именно инфраструктурного уровня отличает ПО АСНИ от комплексов программ другого класса систем (АС ТПП, АСУ ТП и др.). Поэтому на этом уровне проявляется главная особенность систем данного класса, а именно непосредственное взаимодействие исследователя с изучаемым объектом.

Прикладной уровень предназначен для проведения достаточно сложных видов статистической обработки экспериментальных данных, различных научных расчетов, и самое главное – математического моделирования исследуемого объекта. На этом уровне осуществляется накопление и длительное хранение информации, полученной в результате исследований, создаются и пополняются базы данных по отдельным проблемам исследований и др.

В случае если в процессе научных исследований участвует достаточно большое количество ученых, и каждому из них непостоянно, а лишь периодически для моделирования и обработки результатов эксперимента требуются ЭВМ большой мощности и объема памяти, то с целью повышения

экономической эффективности научных работ используют трехуровневую архитектуру ПО АСНИ. Третий уровень, называемый сервисным, в данном случае является обеспечивающим по отношению к прикладному. Это означает, что доля функциональности прикладного уровня (многомерный статистический анализ данных, исследование математических моделей и др.) передается сервисному.

Итак, любая АСНИ состоит из четырех видов обеспечения – технического, программного, математического и информационного. Последние два вида в конечном счете реализуются как отдельные компоненты программного обеспечения. Таким образом, конечные пользователи взаимодействуют с АСНИ через техническое и программное обеспечение, последнее из которых осуществляет доступ к базам данных (информационному обеспечению) и моделирующим программам (математическому обеспечению). Вследствие этого является оправданным использование в различных источниках, например в [93, 17], определения АСНИ как программно-технического комплекса, направленного на получение новых знаний об изучаемом объекте.

#### **1.4. Анализ существующих подходов к разработке АСНИ**

На данный момент существует большое количество работ, посвященных разработке АСНИ. По применяемому подходу их можно разделить на два направления.

В работах первого направления, основывающегося на системно-ориентированном подходе, разработка АСНИ производится в рамках единого целостного проекта, включающего анализ, проектирование и реализацию всех (или большей части) компонентов системы – программного, математического, информационного и технического видов обеспечений.

Труды второго направления посвящены разработке различного вида компонентов, допускающих настройку и многократное использование в различных АСНИ. В основе данных научных трудов лежат идеи интеграционного подхода, при котором разработка АСНИ осуществляется посредством

конфигурации и последующего объединения готовых компонентов программного и технического видов обеспечений.

Произведем анализ наиболее существенных работ каждого из данных направлений с точки зрения их вклада в развитие технологий разработки АСНИ. Определим достоинства и недостатки системно-ориентированного и интеграционного подходов, лежащих в основе данных работ.

#### **1.4.1. Анализ существующих работ в области системно-ориентированного подхода к разработке АСНИ**

Системно-ориентированный подход нашел наибольшее распространение в отечественной науке при разработке широкого класса автоматизированных систем (АС) – АСНИ, АСУ ТП, АС ТПП. В нашей стране основные идеи данного подхода легли в основу стандартов серии ГОСТ 34, регламентирующих процессы создания автоматизированных систем. Несмотря на то, что с момента публикации данных стандартов прошло более 25 лет, изложенные в них основные понятия и положения по-прежнему являются актуальными и являются базой практически для всех далее анализируемых работ.

Рассмотрим процесс разработки АСНИ с позиций основных стандартов серии ГОСТ 34. Процесс создания системы, согласно ГОСТ 34.601-90, осуществляется в восемь стадий: 1) формирование требований к АС; 2) разработка концепции АС; 3) техническое задание; 4) эскизный проект; 5) технический проект; 6) рабочая документация; 7) ввод в действие; 8) сопровождение АС.

На первой стадии осуществляется анализ объекта автоматизации – конкретного процесса научного исследования в заданной предметной области. В этот анализ входит подробное описание требований к качеству результатов функционирования и тенденций развития разрабатываемой системы, а также формулирование научно-технических и экономических целей ее создания. После этого определяется перечень функциональных требований к проектируемой

системе в целом и ее частям, учитывающим специфику предметной области научных исследований. Далее производятся экономические расчеты, определяющие затраты на создание и эксплуатацию разрабатываемой системы и другие показатели, характеризующие экономическую эффективность предлагаемого проекта. В заключение, на первой стадии на основании проведенных расчетов принимается положительное или отрицательное решение о создании АСНИ. В случае положительного решения – переходят ко второй стадии разработки системы, иначе процесс создания АСНИ завершается.

На второй стадии – разработки концепции АС – формулируются несколько вариантов реализации АСНИ, включающих решения по: организационной и функциональной структуре создаваемой АС; составу и характеристикам подсистем и видов обеспечения АС; рациональной организации разработки и внедрения АС и др. Далее, посредством обсуждений с заказчиком и других технико-экономических расчетов находят оптимальный вариант разработки АСНИ, или другими словами, формулируется концепция разрабатываемой системы.

На основании полученной концепции составляется техническое задание на разработку АСНИ, что является целью третьей стадии рассматриваемого процесса. Состав и содержание данного документа достаточно подробно описаны в стандарте ГОСТ 34.602-89. Вследствие этого не будем на нем подробно останавливаться. Однако отметим, что техническое задание определяет перечень основных эксплуатационных, технологических, экономических и других требований, которым должна удовлетворять проектируемая АСНИ на всех этапах ее существования. Кроме того, впоследствии на стадии ввода в действие техническое задание является основным документом при верификации системы и решении о принятии ее к эксплуатации.

На четвертой стадии – эскизный проект, разрабатываются предварительные проектные решения по системе и ее частям. Результатом данной стадии является проектная документация, содержащая графическое и текстовое описание архитектуры системы в целом. Согласно стандарту РД 50-34.698-90 в этой

архитектуре особое внимание должно быть уделено описанию средств технического обеспечения АСНИ, их внутренних и внешних функциональных связей. При этом под внешними связями подразумеваются проектные решения по организации обмена данных с техническими средствами других систем (АСУ ТП, АСУ ПП, и др.).

Технический проект является пятой стадией рассматриваемого процесса. На данной стадии архитектура системы, полученная в результате эскизного проекта, подвергается детализации. Сначала производится разработка общесистемных проектных решений, определяющих подробную структуру подсистем АСНИ, с указанием функций и (или) задач, решаемой каждой из них. Далее разрабатываются алгоритмы, каждый из которых определяет последовательность действий, направленных на достижение целей, определяемых одной из указанных функций или задач. При этом, если в основе того или иного алгоритма лежит определенная математическая модель, то она обязательно приводится в документах, составляемых на данном этапе. После получения всех алгоритмов устанавливаются все входные и выходные данные, необходимые для реализации функций подсистем. В результате определяются наименование и назначение всех баз данных, используемых АСНИ. Далее, производится детальное проектирование технических средств системы, в частности особое внимание, уделяется составлению чертежей, схем и др. документов, определяющих разработку экспериментальной установки. И в заключение, на основе полученных алгоритмов и баз данных разрабатывается проектная документация на необходимые компоненты программного обеспечения АСНИ.

На следующей стадии осуществляется разработка, оформление, согласование и утверждение рабочей документации, содержащей все необходимые и достаточные сведения для обеспечения выполнения работ по вводу АС в действие и ее эксплуатации. И самое главное – на этой стадии осуществляется кодирование и тестирование компонентов программного обеспечения разрабатываемой системы.

После получения отлаженного программного обеспечения переходят к

стадии – ввод в действие, на которой, используя полученную рабочую документацию, производится реализация всех оставшихся компонентов АСНИ (сборка экспериментальной установки, прокладывание локальных вычислительных сетей, установка физических серверов и др.). Далее, осуществляется сборка всех разработанных компонентов системы программного и технического видов обеспечений. После подобной интеграции система подвергается тестированию на предмет требований, подробно изложенных в техническом задании, т.е. АСНИ в целом и ее компоненты подвергаются верификации и валидации.

Сопровождение АС является заключительной стадией рассматриваемого процесса. На этой стадии определяется порядок внесения изменений в структуру и состав компонентов системы в целях исправления ошибок, повышения производительности или адаптации к изменившимся условиям работы или требованиям.

Итак, как показывает проведенный анализ, процесс создания АСНИ с позиций системно-ориентированного подхода (регламентированного стандартами серии ГОСТ 34) представляет собой совокупность упорядоченных во времени, взаимосвязанных, объединенных в стадии работ. В ходе выполнения данных работ происходит последовательная разработка всех компонентов технического, программного, математического и информационного видов обеспечений системы.

В виду малой гибкости, но большой глубины проработки, системно-ориентированный подход нашел наибольшее применение при реализации АСНИ специального назначения. Данный тип систем ориентирован на решение отдельных задач, или одного класса задач в какой-то одной предметной области. В частности, на сегодняшний момент с помощью системно-ориентированного подхода были разработаны АСНИ специального назначения для таких областей, как: ядерная физика (при исследованиях на реакторах, ускорителях и установках термоядерного синтеза) [84]; материаловедение [64]; гидродинамика [82]; кораблестроение [84]; химические технологии [71], экология [35], биотехнология [163], медицина [17] и др.

Среди работ, выполненных в рамках системно-ориентированного подхода, особого внимания заслуживают труды Ветренко М.С. [17], Шотина А.Б. [163], Поезжаловой С.Н. [72], Селиванова С.Г [81], Сладковского Д.А. [82] и др. Рассмотрим наиболее актуальные из них.

Одну из существенных работ в рассматриваемом направлении предложил Шотин А.Б. [163]. В своей работе автор путем соответствующих обобщений отечественной и мировой практик в области автоматизации лабораторных исследований предложил оригинальную методику разработки АСНИ. Ключевой особенностью данной методики является ориентация не только на автоматизацию научной деятельности, но и работы лаборатории, занятой в этом процессе.

Рассматриваемая методика является одной из вариаций системно-ориентированного подхода и состоит из пяти этапов. Первый из них заключается в изучении предмета исследования. Этот этап включает все действия, связанные с анализом предметной области и характером экспериментов, выполняемых сотрудниками лаборатории. В результате должна быть получена структурная схема объекта исследования.

На втором этапе разрабатываются структурно-функциональные схемы работы лаборатории, а также определяются требования, связанные с информационным обеспечением создаваемой системы.

Далее осуществляется совмещение схем объекта исследования и лаборатории, что составляет суть третьего этапа – формализации задач и определения функций разрабатываемой АСНИ. В результате получают структуру информационных потоков и перечень информационных объектов создаваемой системы. При этом каждый информационный объект характеризуется совокупностью соответствующих свойств и характерных функций. Здесь же, на этом этапе определяется характер взаимодействия между составными частями разрабатываемой системы.

На четвертом этапе с помощью соответствующих средств производится реализация программно-аппаратного комплекса АСНИ. При этом рекомендуется основной набор функций системы делегировать серверу, а возможности

формирования запросов и визуализации данных – клиентской машине.

На заключительном этапе производят отладку программного обеспечения системы и осуществляют ее пробные запуски.

К основным достоинствам данной методики можно отнести ее сравнительную простоту и ориентированность на всестороннее описание информационных потоков, возникающих в процессе научных исследований. В свою очередь, недостатками рассматриваемой методики являются неудовлетворительный учет роли математического обеспечения и стадии интеграции с АСУ ТП в процессе разработки АСНИ.

Используя вышеописанную методику, автор разработал АСНИ процессов биосинтеза [163]. Математическое обеспечение такой АСНИ составляет одна единственная математическая модель процесса биосинтеза лизина, представляющая собой систему из шести дифференциальных уравнений. Она используется для имитационного моделирования процесса ферментации с целью определения оптимальных условий для производства тех или иных продуктов – аминокислот, антибиотиков и др. Техническое обеспечение составляют персональные компьютеры и оригинальная, предложенная автором, лабораторная установка с дистанционным доступом, позволяющая проводить экспериментальные исследования процессов ферментации. Информационное обеспечение АСНИ составляет основанный на технологиях Oracle 10g – банк данных, содержащий экспериментальные данные и СУБД. И наконец, программное обеспечение системы состоит из приложения-сервера (устанавливается в лаборатории) и приложения-клиента (для просмотра информации на удаленном компьютере). Измерительная система интегрируется в Интернет с помощью программной технологии DataSocket.

Следующую работу, заслуживающую особого внимания, предложили Селиванов С.Г и Поезжалова С.Н. [81]. В ней предложена функциональная модель АСНИ высоких и критических технологий (ВКТ), которая является основой для разработки информационных технологий управления и инновационных проектов, а также для технологического обеспечения работ по

созданию технологических инноваций в авиадвигателестроении. Описываемая в рамках методологии IDEF0, рассматриваемая модель состоит из пяти функциональных блоков.

Первый из них – анализ технического уровня авиационных двигателей. Результатом функционирования данного блока АСНИ ВКТ являются значения основных параметров технического уровня изделия, например, тяги двигателя и требования по технологическому обеспечению конкурентоспособности новых изделий, которые должны дополнять результаты известных НИР по определению базовых показателей технологичности конструкции в карте технического уровня и качества изделия. Для осуществления задач данного блока активно используется разработанная автором обобщенно-регрессионная нейронная сеть (GRNN), позволяющая определить закономерности и тенденции развития авиационных двигателей.

Второй функциональный блок – систематизация патентной и научно-технической информации. Вначале на данном этапе осуществляется разработка единой базы данных по инновационному проектированию узловых технологий нового поколения. Далее, посредством методов искусственного интеллекта определяются технические предложения, выводы и обоснования по применению высоких и критических технологий в ходе дальнейших опытно-технологических работ и НИОКР авиационных двигателей нового поколения.

После этого, на основании данных патентной статистики и научно-технической информации устанавливается «ядро решений», т.е. перечень отдельных разработок инновационных проектов по всем узловым технологиям нового авиационного двигателя. В этом заключается задача третьего функционального блока – выбор высоких и критических технологий. При этом необходимо отметить, что определение «ядра решений» осуществляется с помощью разработанной авторами системы искусственного интеллекта [72, 81].

Четвертый функциональный блок – формирование единых технологий авиационных двигателей нового поколения. Выполнение данного блока начинается с того, что с помощью структурной модели полученный перечень

инновационных проектов подвергается анализу. Такая модель представляет собой многовариантный граф, описывающий развитие единой технологии авиационных двигателей нового поколения. Определив узловые и базовые технологии из «ядра решений» для интересующего узла авиационного двигателя, осуществляется имитационное моделирование инновационных проектов производства различных сборочных единиц и деталей. Полученные результаты позволяют сформировать весь спектр работ по трансферу высоких и критических технологий, технологическому обмену и передаче прав на все промышленные образцы, полезные модели и патенты, определяющие состав единой технологии.

Заключительный блок рассматриваемой функциональной модели – разработка комплектов проектной и директивной технологической документации. Этот функциональный блок включает в себя все действия по подготовке комплектов технологической документации инновационных проектов, построению календарных план-графиков, разработку бизнес-планов, которые необходимы не только для технологического проектирования, но и для оценки эффективности инвестиций в создание авиационных двигателей нового поколения.

Несмотря на то, что разработанная функциональная модель предназначена для разработки АСНИ авиадвигателестроения, она при определенных ограничениях и модификациях с успехом может быть применена для разработки систем в других предметных областях. К числу основных достоинств, предложенной авторами работы можно отнести:

- высокую степень интеграции АСНИ (разработанной на основе функциональной модели) с АС ТПП;
- анализ существующих инновационных технологий с точки зрения их дальнейшего развития производится на основе методов математического моделирования.

Главным недостатком представленной работы является то, что в ней процесс исследований ориентирован на нахождение решения научной проблемы в виде совокупности существующих инновационных технологий, описанных в

патентах и других научно-технических материалах. Однако найти такую совокупность довольно часто не представляется возможным, в этом случае требуется разработка новых решений в виде математических моделей изучаемых объектов, что в рассматриваемой работе не учитывается.

Другую работу в рассматриваемом направлении предложил Сладковский Д.А. [82]. В ней, последовательно разрабатывая техническое, математическое, программное и информационное виды обеспечений, получена АСНИ гидродинамики псевдооживленного слоя (ГПС). Так в составе технического обеспечения предложен оригинальный лабораторный стенд, моделирующий реактор ГПС. При этом для параметрической настройки реактора используется математическая модель, описываемая разностными уравнениями теплового и материального баланса для плотной и пузырьковой фазы с учетом межфазного обмена. Данная модель составляет основу математического обеспечения рассматриваемой системы.

Программное обеспечение АСНИ ГПС предназначено для имитации химико-технологических процессов и сконфигурировано на основе разработанной библиотеки шаблонных Java-классов с базовыми объектами. Обмен данными между распределенными узлами системы обеспечивается при помощи TCP-IP-сокетов.

Для управления лабораторным оборудованием разработаны компоненты подсистемы автоматизированного управления, состоящей из интерфейсов регулируемых и управляемых параметров процесса, ПИД-регуляторов, преобразующих сигналы приборов. Управление процессом исследования осуществляется посредством взаимодействующих программных модулей. Модули управления и обмена данными с оборудованием реализованы на управляющем Интернет - сервере, который является узлом, предназначенным для согласования между собой процесса запуска исследований и обучения, хранения и представления результатов проведенных работ.

Информационное обеспечение системы составляет объектная база данных, содержащая информацию об эксперименте и результатах автоматизированного

анализа экспериментальных данных.

Несмотря на все достоинства данной работы, есть у нее один существенный недостаток, а именно – разработанная автором АСНИ обладает малой степенью гибкости, что обусловлено наличием только одной математической модели, составляющей математическое обеспечение рассматриваемой системы.

#### **1.4.2 Анализ существующих работ в области интеграционного подхода к разработке АСНИ**

Другими учеными вопросы создания АСНИ рассматриваются с позиций интеграционного подхода, при котором разработка системы осуществляется посредством конфигурации и последующего объединения готовых компонентов технического и программного видов обеспечений.

Как показывает анализ, в работах, основанных на рассматриваемом подходе, внимание акцентируется на разработке различного вида компонентов, допускающих настройку и многократное использование в различных АСНИ. При этом в данных работах проблема объединения компонентов в единую систему практически не рассматривается. Считается, что подобная проблема решается путем настройки интерфейсов, интегрируемых в систему компонентов. Действительно, в большинстве случаев такой способ решения данной задачи оказывается достаточным, однако на практике встречаются компоненты, программно-аппаратные интерфейсы которых оказываются несовместимыми. В этом случае требуется разработка нестандартных инженерных решений, что требует дополнительных материальных и трудовых ресурсов.

Одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений в рамках рассматриваемого подхода является разработка различных компонентов программного обеспечения АСНИ. На данный момент наиболее интенсивно разрабатываемыми компонентами являются системы управления лабораторной информацией (LIMS – Laboratory Information Management System), представляющие собой комплексы программ, согласованные по функциям и

форматам данных, и предназначенные для решения задач по автоматизации деятельности лабораторий. На данный момент некоторые исследователи считают, что LIMS является зарубежным аналогом АСНИ. Подобное отождествление является ошибочным, поскольку LIMS в отличие от АСНИ ориентирована на административное управление лабораторией (планирование и контроль выполнения научно-исследовательских работ, составление различного рода отчетов, предоставление информации о ходе научных исследований всем сотрудникам лаборатории и др.), а также на сбор, хранение и первичную обработку экспериментальных данных. При этом ни одна из систем класса LIMS не предназначена для анализа таких данных и построения на их основе математических моделей.

Таким образом, LIMS не соответствует требованию модельной ориентированности, а потому полноценным аналогом АСНИ считаться не может. Вследствие этого подобные системы можно использовать лишь в качестве компонентов программного обеспечения АСНИ.

Среди научных работ, связанных с разработкой LIMS, особого внимания заслуживают труды Накагавы А.С. [207], Стаффорда Дж. Э. [225], Макдауэлла Р.Д. [203-205], Де Сильвы Т. [180], Крука М.Дж. [179], Стора И.Р. [226], Махаффи Р.Р. [202], Жанга С.А. [236], Жанга З.М. [237] и др. Анализ данных работ показывает, что практически все они, в той или иной степени посвящены разработке программных архитектур, реализация которых позволяет получить LIMS, обладающие высокой степенью надежности, расширяемости и кроссплатформенности. Все многообразие представленных программных архитектур LIMS можно разделить на четыре типа. Первый из них, называемый «толстым клиентом» (thick client), является классической реализацией клиент-серверных технологий. При ее использовании часть программного обеспечения системы размещается на автоматизированном рабочем месте в виде персональной ЭВМ (компьютере клиента), а остальная – на сервере. Подсистемы LIMS на компьютере клиента отвечают за обработку данных, а серверное программное обеспечение – только для хранения обработанных данных. При этом следует

отметить, что большинство изменений и обновлений в системе производятся на стороне клиента.

«Толстый клиент» был одним из первых типов архитектур, используемых при проектировании LIMS. Применение данного типа в проектах и по сегодняшний день позволяет обеспечить высокую скорость обработки данных (все основные функции системы выполняются на компьютере клиента, а не на сервере) и приемлемый уровень безопасности (программный доступ к серверу регулируется клиентским программным обеспечением). Кроме того, LIMS с архитектурой «толстый клиент» по сравнению с другими, рассматриваемыми ниже типами, обеспечивает приемлемую интерактивность и удовлетворенность требованиям заказчика. К недостаткам рассматриваемого типа архитектуры можно отнести повышенные требования к вычислительным мощностям компьютера клиента, значительные временные затраты при обновлении программного обеспечения, а также отсутствие удаленного доступа к функциям системы.

Следующим наиболее современным типом архитектуры является «тонкий клиент» (thin client). Его использование в проектах по реализации LIMS позволяет обеспечить полную функциональность системы через веб-браузер с различных устройств. При этом программное обеспечение системы располагается на сервере (хосте), который поставяет и обрабатывает информацию без сохранения на жестком диске пользователя. Любые необходимые изменения, обновления и другие модификации осуществляются со стороны серверного программного обеспечения LIMS. Таким образом LIMS, реализованная с помощью архитектуры «тонкого клиента», не оставляет «следов» на компьютере клиента, и конечному пользователю для доступа к функциям системы необходимо воспользоваться стандартным веб-браузером, входящим в состав любого вычислительного устройства. Преимущества такой системы заключаются в значительно более низкой цене реализации проекта и меньших затратах на техническое обслуживание. Однако у рассматриваемого типа архитектуры есть недостатки, связанные с требованием постоянного обеспечения доступа к серверу в режиме

реального времени и потребностью в увеличенной сетевой пропускной способности между сервером и компьютером клиента.

Третьим типом является веб-включенная архитектура (web-enabled architecture). Данный тип по существу представляет собой архитектуру «толстого клиента» с добавлением программного компонента, реализующего функции веб-браузера. При таком подходе у программного обеспечения клиентской стороны LIMS появляется дополнительная функциональность, позволяющая пользователям взаимодействовать с программным обеспечением системы через браузеры их вычислительных устройств. Эта функциональность, как правило, ограничена возможностями веб-клиента. Главным преимуществом LIMS, разработанной на основе веб-включенной архитектуры, является то, что конечный пользователь может получить доступ к данным как на стороне клиента, так и на стороне сервера. Как и в архитектуре толстого клиента, обновления в программном обеспечении системы должны производиться на каждой клиентской машине. К недостаткам представленного типа архитектуры можно отнести то, что для реализации представленного типа архитектуры требуется обеспечить постоянный доступ к хост-серверу и кросс-платформенную функциональность, что приводит к дополнительным накладным расходам на всех этапах разработки и сопровождения LIMS.

Последним типом программной архитектуры, используемым при проектировании LIMS, является веб-ориентированная архитектура (web-based architecture). Данный тип архитектуры представляет собой гибрид архитектур «толстого» и «тонкого» клиентов.

При использовании данного типа архитектуры функциональность клиентской стороны обеспечивается посредством веб-браузера и установленной на вычислительном устройстве клиента программной платформы (NET Framework, Java и др.). Конечный результат обработки данных наблюдается пользователем через веб-браузер, но сам процесс обработки выполняется в фоновом режиме на вычислительном устройстве пользователя. В этом случае рассматриваемый тип архитектуры имеет преимущество, состоящее в

обеспечении функциональности системы при сохранении возможностей веб-интерфейсов. В свою очередь к недостаткам веб-ориентированной архитектуры можно отнести дополнительные затраты на системное администрирование и ограниченную функциональность на мобильных платформах.

Анализ существующих работ в области информационных технологий указывает на то, что вне зависимости от типа архитектуры, существующие LIMS как правило обладают следующей базовой функциональностью: учет и отслеживание образцов; планирование задач и событий; анализ и представление экспериментальных данных в различных формах и форматах; многопользовательский доступ к экспериментальным данным; импорт данных из различных приложений; контроль производства образцов; управление научными проектами и задачами; учет материалов и ресурсов; создание отчетов; штрихкодирование образцов и материалов; интеграция с мобильными устройствами; отправление сообщений пользователям системы; резервирование экспериментальных данных.

Следующая часть работ в области разработки различных компонентов программного обеспечения АСНИ связана с проектированием и реализацией электронных лабораторных журналов (ELN – Electronic Lab Notebook), представляющих собой пакеты прикладных программ, предназначенных для документирования, хранения, извлечения и обмена лабораторными записями, отвечающим всем юридическим, регулирующим, техническим и научным требованиям. Среди работ, выполненных в данном направлении, необходимо отметить труды Рудольфи Ф. [216, 217], Ачуры З. [166], Рубачи М. [215], Милстеда А. Дж. [206] и др. Анализ данных работ указывает на то, что существующие ELN можно разделить на две категории: специальные и универсальные. Первые из них содержат функции, разработанные для работы со специальными приложениями, научной аппаратурой или типами данных. Вторая категория ELN, предназначена для обеспечения доступа ко всем данным и информации, зарегистрированным в лабораторном журнале.

Анализ существующих работ указывает, что вне зависимости от категории,

типовой ELN должен обладать следующими функциями:

- импорт данных, полученных в других приложениях;
- прямая запись данных в различном виде (текст, изображения и таблицы);
- предоставление данных с помощью предварительно отформатированных или настраиваемых шаблонов;
- создание связей между отчетами;
- хранение полностью доступных для поиска отчетов в формате базы данных;
- безопасная и гибкая вычислительная среда, обеспечивающая защиту и целостность данных, и допускающая их изменение;
- интеграция с LIMS;
- генерация безопасных форм, принимающих лабораторные данные через вычислительное устройство и/или лабораторное оборудование.

Заключительный компонент программного обеспечения, обязательно входящий в любую АСНИ, связан с разработкой моделирующих программ, являющихся компьютерной реализацией полученных исследователями математических моделей. На заре развития информатики и вычислительной техники все моделирующие программы писались на существующих в то время языках программирования (Алголе, Фортране и др.). Однако для создания даже простой моделирующей программы непосредственно на одном из этих языков требовалось много времени. Причиной этому – существенная разница в уровнях абстракции математической модели и разработкой ее компьютерного аналога. И как результат в процессе научного исследования при всяком изменении математической модели программисты вынуждены были осуществлять перевод математического описания поставленной задачи в низкоуровневый процедурный программный код, что приводило к большим временным затратам и возникновению логических ошибок в получаемых моделирующих программах.

Для решения подобных проблем были предложены системы компьютерного моделирования (CMS – Computer Modeling System), позволяющие разрабатывать моделирующие программы, не отвлекаясь на детали ее низкоуровневой программной реализации. На сегодняшний момент системы компьютерного

моделирования являются обязательными компонентами программного обеспечения любой АСНИ, и зачастую от того, насколько высока квалификация исследователей в части владения инструментальными средствами, предоставляемыми CMS, зависит успех любого научного проекта. В настоящее время на рынке информационных технологий существует большое количество CMS. Их можно разделить на два типа: специализированные и универсальные [47]. Специализированные CMS позволяют решать определенную группу задач какой-то одной предметной области (электротехника, теплотехника и др.). В свою очередь универсальные системы компьютерного моделирования (Mathcad, MATLAB, Mathematica, Maple, Scilab и др.) ориентированы на определенный класс математических моделей и применимы для любой прикладной области, в которой данные модели используются.

Как известно разработка CMS (как специализированного, так и универсального типов) требует больших материальных и трудовых затрат. Вследствие этого в большинстве научных работ, связанных с CMS, внимание обращено на проектирование и реализацию различных программных дополнений, расширяющих функциональность данных систем, как правило, в части разработки математических моделей для отдельных предметных областей. В этом контексте особого внимания заслуживают труды Васкеза Р. [229], Гиулани М. [181], Чена Я. [176], Виктории М. [230], Реутера Б. [214] и др. К ключевым достоинствам предлагаемых данными авторами программных дополнений можно отнести их кроссплатформенность и возможность интеграции с системами компьютерного моделирования различных производителей. Недостатки же данных дополнений связаны с отсутствием справочной информации о предлагаемых авторами математических методах решения задач и невозможности их модификации.

Итак, согласно проведенному анализу можно заключить, что разработанное в рамках интеграционного подхода программное обеспечение АСНИ, состоит из набора согласованных между собой компонентов, в число которых обязательно должны входить LIMS, ELN и CMS. Вследствие того, что любой компонент из данного набора может быть сконфигурирован или потенциально подвергнут

замене, получаемые интеграционные АСНИ более полно отвечают требованиям гибкости и расширяемости, чем системы, реализованные с помощью системно-ориентированного подхода. Более того, как показывает практика, стоимость и время разработки таких интеграционных решений существенно меньше их системно-ориентированных аналогов. Все эти преимущества позволили рассматриваемому подходу найти большое распространение при проектировании и реализации АСНИ общего назначения, позволяющие решать научные задачи из различных предметных областей.

С другой стороны программное обеспечение интеграционных АСНИ функционирует в «разнородной» среде выполнения, что может привести к нестабильности их работы. В тоже время при использовании системно-ориентированного подхода (за счет более тщательной разработки интерфейсов) вероятность проявления подобной нестабильности у получаемых АСНИ намного ниже. Другой недостаток интеграционных АСНИ связан с тем, что при их разработке компоненты математического обеспечения (математические методы и модели) практически не документируются и поставляются исследователям уже реализованными в составе программных компонентов. В тоже время, в рамках одного и того же научного проекта достаточно часто требуется производить изменения в математических методах и моделях, что в свою очередь приводит либо к дополнительным затратам, либо к отказу от используемого программного компонента (например от CMS, поставляемой по лицензии с закрытым исходным кодом).

### **1.5. Автоматизация научных исследований в области физических процессов горного производства и технологических процессов в горной промышленности**

Несмотря на всеобщее использование АСНИ, до сих пор существуют предметные области, в которых применение систем рассматриваемого класса весьма ограничено. К одной из таких областей, имеющей существенное значение

для автоматизации горной промышленности нашей страны, относятся физические процессы горного производства – междисциплинарная наука, занимающаяся изучением физических свойств материалов геологического происхождения (минералов, горных пород и породных массивов) при их взаимодействии с естественными и искусственно создаваемыми полями.

Как известно, каждое научное исследование в любой отрасли знаний, и физические процессы горного производства в этом смысле не исключение, имеет уникальные особенности, отличающие его от других аналогичных. Несмотря на это, для исследований в любой предметной области можно выделить ряд основных задач, с которыми сталкивается любой ученый. Именно для решения подобных функциональных задач и предназначены системы класса АСНИ. К сожалению, на данный момент отсутствуют АСНИ специального назначения, позволяющие решать функциональные задачи в области физических процессов горного производства. По этой причине исследователи, специализирующиеся в данной области, в своих научных проектах, как правило, пользуются совокупностью приложений, несогласованных между собой ни по форматам данных, ни по интерфейсам взаимодействия. И лишь некоторые из организаций используют АСНИ общего назначения, основанные на интеграционном подходе.

Установим, какие функциональные задачи должна решать любая АСНИ, предназначенная для использования в научных проектах физических процессов горного производства, а также посредством каких компонентов программного обеспечения рассматриваемых систем осуществляется решение данных задач. При этом необходимо отметить, что большинство из устанавливаемых ниже функциональных задач относятся не только к АСНИ, используемым в исследованиях физических процессов горного производства, но и к системам класса АСУ ТП, применяемым в горной промышленности.

Междисциплинарная наука – физические процессы горного производства сформировалась в 60-х годах прошлого столетия как раздел горной науки, рассматривающей материалы геологического происхождения (далее – геоматериалы) одновременно как объекты геологических, физических и

горнотехнологических отраслей знаний. По своим методам данная наука близка к физике твердого тела, с точки зрения объектов исследований – к геологическим наукам, а с позиций решаемых ею практических задач – к горной технологии, направленной на совершенствование технологических процессов горного производства, в том числе с помощью методов и средств автоматизации.

Как известно, горное производство как в условиях открытых, так и подземных горных работ состоит в общем виде из следующих технологических процессов: бурения, взрывания, выемки взорванной массы, транспортирования пород, их складирования, первичной обработки и измельчения полезного ископаемого и наконец, его обогащения [78]. Данные технологические процессы добычи полезных ископаемых неразрывно связаны с воздействиями на геоматериалы различных машин и механизмов. При этом горное предприятие будет работать тем эффективнее, чем лучше приспособлены параметры машин и механизмов к изменяющимся физическим свойствам геоматериалов. Число таких свойств, проявляющихся во взаимодействии геоматериалов с другими объектами и явлениями материального мира, может быть сколь угодно велико. Однако для практики горного дела представляют интерес те свойства, которые непосредственно связаны с технологическими процессами современного горного производства. К их числу относятся деформационные, тепловые, электрические плотностные и прочностные свойства.

Анализ существующих работ в области физических процессов горного производства показывает, что в большинстве из них, так или иначе, используются параметры, характеризующие деформационные свойства геоматериалов. И это неудивительно, поскольку любой технологический процесс горного производства в той или иной степени сопровождается изменением деформационных характеристик геоматериалов, и без адекватного их учета провести успешное научное исследование не представляется возможным.

Таким образом, приходим к выводу, что для АСНИ, используемой в научных проектах физических процессов горного производства, и АСУ ТП, применяемой в горной промышленности – определение деформационных свойств

геоматериалов является первой основной функциональной задачей.

### **1.5.1. Функциональная задача определения деформационных свойств геоматериалов**

На данный момент данная задача преимущественно решается посредством выполнения экспериментов над макрообразцами геоматериала, регистрацией полученных результатов опытов и установления средних значений полученных величин. Однако при проведении подобного рода опытов проявляется масштабный эффект, заключающийся в том, что испытания над образцами с разными геометрическими характеристиками, изготовленными из одного геоматериала, приводят к различным значениям параметров деформационных свойств. Но при этом установлено, что если объемы образцов некоторого геоматериала из исследуемой совокупности превышают или равны некоторой величине (которую принято называть представительным объемом), то значения параметров, характеризующих деформационные свойства данных образцов, будут статистически совпадать. Полученные таким образом значения, характеризуют свойства этого геоматериала.

На основании изложенного, может сначала показаться, что для решения функциональной задачи определения деформационных свойств геоматериалов достаточно воспользоваться таким компонентом программного обеспечения как LIMS, позволяющим зарегистрировать результаты опытов над макрообразцами различного размера и провести статистическую обработку полученных экспериментальных данных. Однако для большинства типов геоматериалов размеры представительного объема настолько велики, что проведение опытов над макрообразцами таких размеров существующими экспериментальными методами не представляется возможным. Отсюда следует, что применение LIMS не позволяет получить адекватных значений параметров деформационных свойств геоматериалов. Однако отсутствие других автоматизированных средств вынуждает исследователей пользоваться результатами опытов над

макрообразцами, объемы которых меньше представительного, и как следствие – вынужденная ошибка в определении параметров деформационных свойств, приводящая к снижению ценности всего научного проекта.

Выходом в сложившейся ситуации является использование существующих или разработка новых математических моделей определения деформационных свойств геоматериалов с последующей их реализацией в виде компонентов программного обеспечения АСНИ.

На данный момент существует несколько подходов к математическому моделированию геоматериалов, каждый из которых можно использовать для определения деформационных свойств изучаемых объектов. Первый из них основан на методах механики деформированного твердого тела. Среди работ, выполненных в данном направлении, принципиальное значение имеют труды: И.В. Баклашова [6-9], Б.А. Картозии [7-9, 43], Б.А. Беликова [11], Г.Н. Кузнецова [51], С.В. Кузнецова [52], М.Я. Певзнера [67], И.М. Петухова [69] и др.

Как показывает практика, математические модели, построенные с использованием рассматриваемого подхода, имеют весьма малую степень адекватности. В первую очередь это связано с тем, что методы математического моделирования в рамках механики деформируемого твердого тела совсем не учитывают структурные особенности материалов, да и не могут учесть, поскольку соответствующие математические модели сводятся к локальным уравнениям. В то же время деформационные свойства любого геоматериала определяются наряду с химической природой и структурной особенностью. Таким образом, методы математического моделирования, основанные на механике твердого деформируемого тела, непригодны для исследования горных пород, породных массивов, и как показывает практика, в первом приближении могут описывать поликристаллы (минералы и металлы).

Следующий подход к математическому моделированию геоматериалов основывается на методах, разработанных в механике композиционных материалов и микронеоднородных сред. При данном подходе рассматриваются величины, усредненные по некоторой области, что позволяет учитывать

структурные особенности материалов. В зависимости от использованных для усреднения математических выражений или уравнений существуют следующие математические методы определения деформационных свойств геоматериалов.

1. Непосредственное усреднение коэффициентов из локального уравнения, которые характеризуют упругие свойства. Данный метод предполагает наличие математических моделей, сводящихся к локальным уравнениям, но не использующихся непосредственно. Так вычисляются усредненные значения тензора модулей упругости однофазных поликристаллов (минералов и металлов). Для этого достаточно записать тензор модулей упругости зерна, определенный экспериментально в лабораторной системе координат, и усреднить его по всевозможным ориентациям в пространстве. Этот метод усреднения был разработан В. Фойгтом и носит его имя [231]. А. Ройссом разработан метод, основанный на усреднении тензора упругих податливостей [213]. Примечательным является тот факт, что результаты, полученные этими методами для одних и тех же поликристаллов, имеют разные значения. Причем неизвестно, какой из них соответствует действительности. Именно поэтому в некоторых случаях к удовлетворительным результатам приводит метод Р. Хилла [191, 192] – среднее арифметическое значений, полученных усреднением по В. Фойгту и А. Ройссу. Отметим, что в методах Фойгта и Ройсса усреднение по ориентациям можно заменить вычислением тензорных свертков, учитывающих различные типы симметрии – кубической, орторомбической, тетрагональной, гексагональной, триклинной, моноклинной и тригональной. К недостаткам данных методов можно отнести то, что они при определении деформационных свойств не учитывают взаимодействие между собой элементов структуры геоматериалов.

2. Следующий метод усреднения связан с одним из уравнений системы, описывающей поликристаллы; это определяющие уравнения следующего вида:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \text{ или } \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}'\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

К ним сводятся математические модели поликристаллов (микронеоднородных сред) относительно деформационных упругих свойств. Здесь метод усреднения позволяет определить эффективные модули упругости и эффективные упругие

податливости, связывающие усредненные напряжения  $\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle$  и деформации  $\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle$ :

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = \overset{(ef)}{C} \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle \text{ или } \langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle = \overset{(ef)}{C'} \langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle, \quad (1.2)$$

где  $\overset{(ef)}{C}$  и  $\overset{(ef)}{C'}$  – эффективные величины, определяющие макроскопические упругие свойства;  $\langle \overset{(ef)}{C}(\mathbf{x}) \rangle \neq \overset{(ef)}{C}$  и  $\langle \overset{(ef)}{C'}(\mathbf{x}) \rangle \neq \overset{(ef)}{C'}$ ; буквенное сочетание «ef» является пометой, а не индексом, и во избежание путаницы здесь и далее будем располагать пометы над тензорной величиной и заключать их в скобки;

$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \sigma(\mathbf{x}) dx$ , при этом в качестве элемента объема следует брать

область достаточно большую по сравнению с характерным размером элемента неоднородности, но меньшую, чем характерный размер объема, в котором

существенно изменяется усредняемая величина;  $\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \varepsilon(\mathbf{x}) dx$ .

Именно эти модули измеряются экспериментально на макроскопических образцах, размеры которых существенно превышают средний диаметр зерна. Таким образом, экспериментальное измерение данных эффективных величин моделируется определяющим уравнением (1.3), т.е. сводится к нему.

Экспериментальное определение эффективных величин  $\overset{(ef)}{C}$  и  $\overset{(ef)}{C'}$ , определяющих деформационные свойства, как минимум трудоемкий и экономически неэффективный процесс, а в большинстве случаев для геоматериалов имеются принципиальные ограничения. Так для большинства геоматериалов величина представительного объема, т.е. объема по которому должна производиться процедура усреднения, настолько велика, что применение существующих технологий определения деформационных свойств становится невозможным. Поэтому есть необходимость в использовании не экспериментальных, а теоретических методов определения эффективных констант различных геоматериалов.

Итак, все изложенные методы учитывают структурные особенности

(причем косвенно через нечетко определенный объем усреднения) однофазных поликристаллов в виде минералов, и то в первом приближении, но они абсолютно непригодны для исследования таких геоматериалов как горные породы и породные массивы.

3. Данным недостатком лишен метод самосогласования, который был использован Е. Кренером [49, 197-199] для вычисления эффективных упругих модулей материалов кубической системы. Для материалов более низкой симметрии этот метод применялся Дж. Книром [196]. Метод самосогласования использовался для расчета модулей упругости композиционных материалов. При этом учитывалась структура, определенная следующей содержательной моделью: анизотропное зерно, заключенное в изотропную матрицу с неизвестными эффективными свойствами. Такое представление не полностью отражает реальную структуру; к недостаткам этого метода следует отнести и то, что он не позволяет получить явное выражение относительно эффективных упругих параметров. Даже в случае материалов кубической симметрии он приводит к уравнению третьей степени относительно модуля сдвига, и совсем невозможно получить уравнения в общем виде для тензора модулей упругости. Метод самосогласования, в котором каждое включение рассматривается как изолированное в среде с упругими свойствами, равными эффективным свойствам композитной среды, а поле, в котором находится любое включение, предполагается равным внешнему полю, можно считать разновидностью метода самосогласованного поля. Основные идеи последнего метода будут изложены ниже. Таким образом, метод самосогласования игнорирует явную взаимосвязь зерен как структурных элементов. В свою очередь это означает, что должным образом не учитываются структурные особенности моделируемых объектов.

4. Дальнейшее развитие методов расчета эффективных модулей упругости получило в работах И.М. Лифшица и Л.Н. Розенцвейга [56, 57], в которых предлагается метод корреляционного приближения теории случайных функций, получивший развитие в работах [25-29, 88-92, 161]. Метод теории случайных функций основан на разложении по малым параметрам, представляющим

относительную разность модулей упругости и податливостей. Сам подход, основанный на разложении по малому параметру, устанавливает границу применимости метода теории случайных функций. Для эффективного применения необходимо условие, при котором можно ввести два малых параметра, что возможно при малом показателе анизотропии зерен поликристалла и малом различии модулей упругости компонентов в геоматериале. Полученные методом теории случайных функций значения, как эффективные тензоры модулей упругости, так и эффективные тензоры упругих податливостей, имеют вид суммы среднего значения и корреляционных добавок, учитывающих взаимодействия между зернами. На практике используется корреляционное приближение теории случайных функций, которое ограничивается учетом парных взаимодействий зерен как структурных элементов. Также следует отметить, что учет парных взаимодействий структурных элементов недостаточен для учета структурных особенностей моделируемых объектов.

5. Следующее направление основано на вариационном методе, который был применен для вычисления эффективных упругих модулей З.В. Хашином [185-188] и С. Штрикманом [188, 189], в дальнейшем получивший развитие в других работах [33, 37, 38, 169, 170]. У данного метода имеется один очевидный недостаток: конечный результат имеет вид неравенства, т.е. определяются границы, между которыми находится величина эффективных модулей упругости.

Предполагая полную аналогию между однокомпонентными поликристаллами и минералами, данные методы без всяких изменений с упрощающими допущениями были использованы для исследования упругих свойств минералов и полнокристаллических мономинеральных горных пород [11]. И как показала практика, данные методы непригодны для исследования горных пород и тем более породных массивов.

6. Из всех существующих методов усреднения самым адекватным является метод самосогласованного поля, лишенный выше указанных недостатков, и впервые примененный С. Канауном для расчета эффективных модулей упругости и тензора эффективных упругих податливостей двухкомпонентного

композиционного материала [40]. Этот метод использует для усреднения следующую систему уравнений:

1) уравнения равновесия:

$$\partial_j [C^{ijkl}(x) \partial_k u_l(x)] = -f^i(x), \quad (1.3)$$

где  $\partial_{(k} u_{l)}(x) = \varepsilon_{kl}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$ ;  $f^i(x)$  – внешние силы.

2) кинематические уравнения:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (1.4)$$

3) определяющие уравнения:

$$\langle \sigma_{ij}(x) \rangle = C_{ijkl}^{(ef)} \langle \varepsilon_{kl}(x) \rangle \quad (1.5)$$

или

$$\langle \varepsilon_{ij}(x) \rangle = C'_{ijkl}{}^{(ef)} \langle \sigma_{kl}(x) \rangle, \quad (1.6)$$

где  $C'_{ijkl}{}^{(ef)} = \left( C_{ijkl}^{(ef)} \right)^{-1}$ .

К сожалению, данная модификация метода самосогласованного поля не может быть применена к исследованию реальных геоматериалов, в структуре которых присутствуют флюидосодержащие включения. Однако, математический аппарат, используемый в данном методе, может стать основой для моделирования такого рода геоматериалов. При этом становится необходимым разрешение следующего принципиального противоречия.

Предположения метода самосогласованного поля применительно к рассматриваемой задаче формулируются следующим образом: 1) каждое из включений любой конкретной реализации случайного поля неоднородностей рассматривается как изолированное эллипсоидальное включение в основной среде; 2) поле деформаций, в котором находится каждое из включений, складывается из внешнего поля и поля, наведенного окружающими неоднородностями. При этом поле предполагается одинаковым для всех

включений; 3) необходимо задаться той или иной аппроксимацией эквивалентного поля. Оно считается постоянным. Это справедливо, когда в пределах объема, занятого типичным включением, суммарное поле от всех окружающих неоднородностей меняется незначительно.

Такие предположения пришлось вводить из-за невозможности использования методов классической механики, и как следствие – необходимость ввода процедуры усреднения по ансамблю полей неоднородностей.

Отказ от механического описания ансамбля неоднородностей вызван непомерно огромным числом участников в исследуемой системе. Настолько огромным, что состояние индивидуальной неоднородности почти не сказывается на состоянии системы в целом. Поэтому система в целом является термодинамической, и в связи с этим для ее описания должны быть использованы термодинамические понятия. Но при этом система в целом является механической, и поэтому для ее описания используются макроскопические механические понятия, как в уравнениях, так и в ее решениях. И совсем не используются термодинамические понятия. При таком некорректном описании невозможно получить адекватную математическую модель геоматериала мультифрактальной структуры.

Данное противоречие может быть разрешено только одним методом, а именно: если не пренебрегать влиянием отдельной неоднородности на систему в целом.

При использовании выше изложенных методов математического моделирования (изначально примененных для исследования композиционных материалов, и предполагающих усреднение методом самосогласованного поля) для исследования минералов с достаточной инженерной практики точностью учитываются только особенности «правильной» структуры, predetermined первичными свойствами – свойствами атомов. Такого учета оказывается достаточно при существующем уровне технологии дробления и измельчения в горном производстве нашей страны, и недостаточно при дроблении горных пород, по причине их сложной структуры. И совсем непригодными становятся

данные методы математического моделирования, когда речь идет о минералах и горных породах как составной части породного массива.

Кроме того, во всех перечисленных методах предполагается процедура усреднения по некоторому объему. При этом величина такого объема в данных методах либо практически неизвестна, либо задается в нечетких величинах. Так, например, при усреднении в качестве элемента объема выбирается область достаточно большая по сравнению с характерным размером элемента неоднородности, но меньшая, чем характерный размер объема, в котором существенно изменяется усредняемая величина.

Наиболее эффективный подход к математическому моделированию геоматериалов, лишенный выше обозначенных недостатков, основывается на методах фрактальной теории. Согласно данным методам исследуемый геоматериал рассматривается в виде фрактального объекта, в котором составные части представляются идеальной структурой, предопределенной первичными свойствами. Теоретические основы такого подхода в связи с определением деформационных свойств геоматериалов впервые изложены в работах К.В. Халкечева [94, 95]. Во всех данных работах при построении и исследовании математических моделей привязывались к элементарному объему – наименьшему объему, свойства которого приписываются к свойствам всего объекта в целом. При этом в рамках принятой модели справедливо предполагается, что каждая структурная составляющая должна обладать объемом равным или большим соответствующего элементарного объема, и как следствие, усреднение также должно производиться по этим элементарным объемам. К главному достоинству работ, предложенных К.В. Халкечевым, можно отнести то, что в них заложены математические основы фрактального моделирования анизотропных неоднородных геоматериалов, что позволило впервые решить задачу определения деформационных свойств минералов при упругопластическом деформировании с учетом количества линейных дефектов в их структуре.

К основным недостаткам фрактального подхода к математическому моделированию геоматериалов относительно деформационных свойств можно

отнести следующее. Во-первых – не учитывается, что реальные породные массивы и его составляющие геоматериалы содержат наполненные газом (или жидкостью) поры и включения; доказательство фрактальности структуры таких сложных объектов носит описательный характер, который не дает точных знаний. Во-вторых, определение упругопластических свойств геоматериалов на основе фрактального подхода проводится без учета изменения количества дислокаций, что делает неполноценным полную диаграмму «напряжение – деформация» исследуемых геоматериалов. В-третьих, при определении деформационных свойств и полей напряжений используется метод самосогласованного поля, в рамках которого в принципе невозможно описывать геоматериалы, содержащие газовые или жидкостные включения. Ну и наконец, как показывают исследования, в подавляющем большинстве геоматериалы обладают мультифрактальной структурой, т.е. представляют собой несколько вложенных друг в друга фрактальных объектов, характеризуемых спектром целых размерностей, что никак не учитывается при рассматриваемом подходе.

Таким образом, ни один из существующих подходов к математическому моделированию геоматериалов не учитывает в полной мере реальную мультифрактальную структуру исследуемых объектов. Вследствие этого используемые в настоящее время компоненты программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП, основанные на вышеописанных математических моделях, не в состоянии с нужной для науки и практики точностью определить деформационные свойства геоматериалов.

Таким образом, на основании изложенного можно заключить, что разработка мультифрактального метода математического моделирования и использования его для решения функциональной задачи определения деформационных свойств геоматериалов является объективной необходимостью. А в свою очередь полученные с помощью данного метода мультифрактальные математические модели геоматериалов должны составить необходимую основу для разработки компонентов программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП, предназначенных для определения деформационных свойств геоматериалов.

### 1.5.2. Функциональные задачи определения тепловых и электрических свойств геоматериалов

Наряду с деформационными свойствами изучаемых объектов, при проведении научных исследований в рассматриваемой междисциплинарной науке и управлении технологическими процессами в горной промышленности широкое применение находят параметры, описывающие необратимые процессы переноса тепла и электричества в геоматериалах.

Таким образом, приходим к выводу, что для АСНИ в области физических процессов горного производства и АСУ ТП в горной промышленности определение тепловых и электрических свойств геоматериалов является соответственно вторыми и третьими основными функциональными задачами.

К основным параметрам, характеризующим тепловые свойства геоматериалов и имеющим существенное значения для разработки инноваций в горном производстве, можно отнести удельную теплоемкость  $C_{уд}$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda$  (или обратную к нему величину – удельное тепловое сопротивление) [32].

Поскольку удельная теплоемкость является масштабно нечувствительным параметром, то она с достаточной для научного исследования точностью может быть определена с помощью опытов над макрообразцами в рамках одного из существующих экспериментальных способов (методы охлаждения, смешения и др.). Следовательно, для решения существующими интеграционными АСНИ подзадачи определения удельной теплоемкости  $C_{уд}$  требуется конфигурируемый компонент программного обеспечения, позволяющий регистрировать результаты опытов над макрообразцами, осуществить расчет необходимого параметра согласно одному из используемых экспериментальных методов, и провести статистическую обработку полученных данных.

Однако подобный подход не решит проблему решения системами рассматриваемого класса задачи определения коэффициента теплопроводности (и

обратной величины – удельного теплового сопротивления) геоматериалов. Это обусловлено тем, что коэффициент теплопроводности наряду с химическим составом геоматериалов зависит от их структуры и текстуры. Вследствие этого, как и в случае с деформационными свойствами, при определении коэффициента теплопроводности геоматериала посредством экспериментальных способов (методы плоского и цилиндрического слоев, нагретой нити, оптического сканирования и др. [211, 34]) наблюдается вышеописанный масштабный эффект. По этой причине полученные в результате опытов значения коэффициента теплопроводности будут релевантными лишь в том случае, когда размеры испытуемых образцов превышают представительный объем исследуемого геоматериала. Однако как указывалось ранее, для большинства типов геоматериалов размеры представительного объема настолько велики, что проведение опытов над макрообразцами таких размеров существующими экспериментальными методами не представляется возможным.

В сложившейся ситуации при проведении научных исследований физических процессов горного производства и управлении технологическими процессами в горной промышленности для определения коэффициента теплопроводности следует соответственно пользоваться компонентами программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП, основанными на методологии математического моделирования. На данный момент существует большое количество математических моделей, предназначенных для определения коэффициента теплопроводности. Условно их можно разделить на два класса. К первому классу следует отнести бесструктурные модели, которые содержат только данные о теплопроводящих свойствах каждой компоненты исследуемого объекта и ее объемной доле, но не содержат никакой информации о структуре. Остановимся на работах данного направления более подробно.

Одну из моделей данного класса, нашедшую наибольшее распространение в исследованиях физических процессов горного производства, предложил К. Лихтенекер [200]:

$$\lambda_{\text{эф}} = \prod_{i=1}^n (\lambda_i)^{\eta_i}, \quad (1.7)$$

где  $\lambda_{\text{эф}}$  – эффективная теплопроводность многокомпонентной среды;  $\lambda_i$  – теплопроводность  $i$ -го компонента;  $\eta_i$  – концентрация  $i$ -го компонента.

Для учета поровых включений при определении коэффициента теплопроводности геоматериалов Ю. Асаад [168] предложил следующую модификацию модели К. Лихтенекера:

$$\lambda_{\text{эф}} = (\lambda_{\text{мс}})^{1-f \cdot \Phi} \cdot (\lambda_{\text{нф}})^{f \cdot \Phi}, \quad (1.8)$$

где  $\lambda_{\text{мс}}$  – теплопроводность минерального скелета;  $\lambda_{\text{нф}}$  – теплопроводность порового флюида;  $f$  – эмпирический коэффициент, устанавливаемый опытным путем;  $\Phi$  – пористость породы.

К. Хораи и С. Уеда в своей работе [193] для расчета эффективной теплопроводности жидкостьсодержащих осадочных горных пород разработали следующую модель

$$\lambda_{\text{эф}} = \lambda_2 \frac{3 - 2v \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + v \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}, \quad (1.9)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – соответственно теплопроводности минеральных частиц и воды;  $v$  – параметр, характеризующий весовое содержание воды, определяемое соотношением

$$v = \frac{\omega}{\left[ \omega + (1 - \omega) \frac{\delta_2}{\delta_1} \right]}, \quad (1.10)$$

где  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  – соответственно значения плотности минеральных частиц и воды;  $\omega$  – объемная влажность, выражаемая в процентном соотношении.

Другую модель предложил А.М. Мандель [60], она сводится к следующему выражению:

$$\lambda_{эф} = \lambda_1 \left[ 1 - \frac{3c(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\lambda_1 + \lambda_2} + O(c)^2 \right], \quad (1.11)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – теплопроводность матрицы и сферических включений;  $c$  – концентрация включений в матрице.

А. Лоеб получил уравнение для случая пористого тела, насыщенного газом [34]:

$$\lambda_{эф} = \lambda_1 \left[ \frac{1 - \frac{4sB\sigma d_L T^3}{\lambda_1}}{1 + \frac{4sB\sigma d_L T^3}{\lambda_1} \frac{1 - k_L}{k_L}} \right] (1 - k_c), \quad (1.12)$$

где  $k_c$  – пористость в поперечном сечении;  $k_L$  – пористость в продольном сечении;  $d_L$  – диаметр пор, измеренных по направлению потока тепла;  $s$  – коэффициент формы пор ( $s=1$  для пор цилиндрической формы, когда их оси параллельны направлению потока тепла;  $s=2/3$  для сферических пор;  $s=\pi/4$  – для пор цилиндрической формы, когда их оси перпендикулярны направлению потока тепла);  $B$  – коэффициент излучения;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $T$  – абсолютная температура.

Т.Е. Шуман и В. Васс в своей работе [220] для зернистых пород, пористость которых зависит от величины зерен, а насыщающая фаза повсеместная и может быть газовой или жидкостной, в предположении, что тепловые контакты в среде точечные и существуют лишь между зёрнами, вывели выражение

$$\lambda_{эф} = \lambda_2 \Phi^3 + (1 - \Phi^3) \lambda''. \quad (1.13)$$

Здесь  $\lambda$  – теплопроводность, вычисленная по уравнению Шумана-Васса

$$\lambda'' = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 + P(\lambda_2 - \lambda_1)} \left\{ 1 + \frac{P(1+P)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 + P(\lambda_2 - \lambda_1)} \ln \frac{\lambda_2(1+P)}{\lambda_1 P} \right\}; \quad \Phi = P(P+1) \ln \frac{1+P}{P} - P;$$

$P$  – отношение объема зерен к общему объему;  $\lambda_1$  – теплопроводность вещества зерен;  $\lambda_2$  – теплопроводность насыщающей фазы.

Как показала практика – величины, рассчитанные по уравнению (1.13), обычно бывают меньше экспериментальных, что связано с упрощением

механизма теплового взаимодействия между зёрнами.

Анализ математических моделей рассматриваемого класса показывает, что они недопустимо упрощают структуру и текстуру геоматериалов, не учитывая наличие тепловой анизотропии, флюидосодержащих включений на различных масштабах и др. Вследствие этого, использование данных моделей в исследованиях физических процессов горного производства существенно ограничивает точность получаемых с их помощью значений коэффициентов теплопроводности.

Более адекватные результаты дают модели второго класса, основывающиеся на теории эффективной среды. В основе данной теории лежит представление исследуемого объекта в виде статистически однородной среды, т.е. среды в которой можно ввести средние значения определенных параметров, значения которых не зависят от масштаба усреднения. Таким образом, данная теория позволяет перейти от свойств неоднородной среды, зависящих от координат, к свойствам, характеризующим среду в целом. При этом величина эффективной теплопроводности находится из условия, что «в среднем» включения не вносят существенных возмущений в эффективную среду (усреднение осуществляется по ансамблю полей неоднородностей).

К настоящему времени известно довольно много моделей определения коэффициентов теплопроводности, основанных на теории эффективных сред [210, 212, 41 и др.]. Как на наиболее характерной из них, остановимся на модели, представленной в работе [79].

Согласно данной работе материал представляется в виде неограниченной трехкомпонентной среды с периодической структурой, представляющей собой матрицу, содержащую цилиндрические изолированные включения радиуса  $R_1$ , каждое из которых отделено от матрицы слоем толщиной  $R_2 - R_1$ . Предполагается, что матрица, слои и включения являются изотропными средами, каждая из которых характеризуется своей плотностью, теплоёмкостью и коэффициентом теплопроводности.

В качестве механизма теплопередачи в исследуемом материале рассматривается кондуктивная теплопроводность, что всецело согласуется с существующими представлениями о механизме процессов переноса тепла в минералах и горных породах.

Процесс теплопереноса в рассматриваемой неоднородной изотропной среде задается следующим уравнением:

$$\rho(x,t)c(x,t)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}(x,t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x_j} \right), \quad (1.14)$$

где плотность  $\rho$ , теплоемкость  $c$  и компоненты тензора теплопроводности  $k_{ij}$  являются функциями координат  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

Данное уравнение дополняется граничными и начальными условиями, которые могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned} T(x,t)|_S &= T_1(t), \quad n_i \left[ k_{ij} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x_j} \right] \Big|_S = 0, \\ [T(x,t)]|_\Sigma &= 0, \quad m_i \left[ k_{ij} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x_j} \right] \Big|_\Sigma = 0, \\ T(x,t)|_{t=0} &= T_0(x), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $S$  – свободная поверхность среды, на которой заданы граничные условия;  $\Sigma$  – границы разделов различных компонентов материала;  $n_i$  – компоненты нормали к свободной поверхности;  $m_i$  – компоненты нормали к поверхности раздела различных компонентов материала. При этом в такой постановке задачи справедливо делается предположение о том, что объемные источники тепла отсутствуют, равно как и поток тепла через поверхность  $S$ .

Непосредственное численное решение уравнения (1.14) при условиях (1.15) для среды, содержащей большое число включений, весьма трудоемко в связи с необходимостью использовать разбиение тела сетками, размеры которых малы по сравнению с размерами включений и расстояниями между ними. Однако именно большое число включений позволяет применять процедуру усреднения по ячейке

периодичности, основная идея которой сводится к замене реальной неоднородной среды соответствующей однородной средой с эффективными характеристиками, в результате чего исходная задача с быстро осциллирующими коэффициентами заменяется аналогичной задачей для однородной среды с постоянными эффективными коэффициентами. Периодичность структуры рассматриваемого материала при условии  $l \ll L$  ( $L$  – характерный размер образца материала;  $l$  – сторона периодически повторяющейся ячейки, представляющей собой в сечении квадрат) обуславливает применение метода асимптотического усреднения [10], основанного на том, что решение ищется в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon = l / L$  с коэффициентами, зависящими как от медленных переменных  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , соответствующих глобальной структуре процессов, так и от быстрых переменных  $\xi = x / \varepsilon$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , соответствующих их локальной структуре и изменяющихся от 0 до  $l$  в пределах каждой ячейки периодичности.

При этом асимптотическое решение задачи (1.14)-(1.15) ищется в виде ряда [10]:

$$T = T^{(0)}(x, \xi, t) + \varepsilon T^{(1)}(x, \xi, t) + \varepsilon^2 T^{(2)}(x, \xi, t) + \dots + \varepsilon^n T^{(n)}(x, \xi, t), \quad (1.16)$$

Решая полученное уравнение, было найдено следующее выражение для определения коэффициента теплопроводности

$$k^{(ef)} = \left\langle k_{il}(\xi) \frac{\partial(\xi_j + N_j^{(1)}(\xi))}{\partial \xi_l} \right\rangle, \quad (1.17)$$

где  $N_j^{(1)}$  находится из условия  $T^{(1)}(x, \xi, t) = N_i^{(1)} \frac{\partial(T^{(0)}(x, \xi, t))}{\partial x_i}$ .

К ключевым достоинствам представленной работы и других моделей рассматриваемого класса следует отнести то, что при определении коэффициента теплопроводности наряду с данными о теплопроводящих свойствах каждой компоненты и ее объемной доле учитываются структурнотекстурные особенности исследуемых объектов (размеры включений, границы между зернами, минералами и др.). Вследствие этого, данные модели обладают большей степенью адекватности по сравнению с работами из ранее рассмотренного класса.

Несмотря на это, подавляющее большинство математических моделей

второго класса было разработано для композиционных материалов, структурная сложность которых на порядок меньше, чем у геоматериалов. И как результат, для исследования геоматериалов используются модели, упрощающие реальную мультифрактальную структуру исследуемых объектов – сводя ее к периодической (регулярной), не учитывающей в должной мере тепловую анизотропию, наличие флюидосодержащих включений на различных иерархических масштабах и др.

Кроме того, во всех разработанных к настоящему моменту моделях при проведении процедуры усреднения коэффициентов теплопроводности не учитываются особенности взаимодействия собственных полей неоднородностей на различных иерархических масштабных уровнях, что также снижает степень точности получаемых решений.

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать вывод, что использование существующих компонентов программного обеспечения АСНИ, в основе которых лежат вышерассмотренные математические модели обоих классов, не может дать количественно адекватных результатов значений коэффициентов теплопроводности геоматериалов.

Перейдем к рассмотрению следующей функциональной задачи – определение электрических свойств геоматериалов. Из широкого числа параметров, характеризующих электрические свойства геоматериалов, для физических процессов горного производства существенное значение имеет вызванная поляризация  $\eta$  и удельное электрическое сопротивление  $\rho$  (или обратная величина – удельная электропроводность  $\mu$ ) [32].

В лабораторных условиях удельное электрическое сопротивление определяют на макрообразцах геоматериалов методами сопротивлений, потенциалов и индукционным методом. В свою очередь вызванную поляризацию изучают на специальных установках [1, 2, 48].

Для определения удельного электрического сопротивления геоматериалов в условиях естественного залегания используют диаграммы бокового каротажного зондирования, микрозондов, кажущегося сопротивления, а также данные

интерпретации кривых зондирования у скважин или измерения электрического сопротивления на обнажениях пород [32].

Установлено, что при определении вызванной поляризации масштабный эффект не наблюдается. Вследствие этого, установление значения величины  $\eta$  любого типа геоматериалов полностью решается применением одного из экспериментальных способов. Таким образом, для решения рассматриваемыми системами подзадачи определения величины вызванной поляризации геоматериала требуется компонент программного обеспечения, способный выполнить последовательность следующих действий: 1) зарегистрировать результаты опытов над макрообразцами; 2) в соответствии с выбранным экспериментальным способом для каждого из образцов рассчитать определяемый параметр; 3) провести статистическую обработку полученных результатов.

В противоположность параметру вызванной поляризации удельное электрическое сопротивление (или удельная электропроводность) является масштабно чувствительной величиной. Поэтому для современных научных исследований и управления технологическими процессами применение существующих экспериментальных методов не позволяет получать значения удельного электрического сопротивления с необходимой точностью. В таком случае для установления значений определяемого параметра необходимо использовать компоненты программного обеспечения, основанные на методологии математического моделирования.

На данный момент существует большое количество математических моделей, предназначенных для определения величины удельного электрического сопротивления (или обратной ему величины – удельной электропроводности). По используемому подходу данные модели можно разделить на два класса.

Модели первого класса основываются на представлении о том, что удельное электрическое сопротивление полностью определяется объемной долей и электропроводными характеристиками компонентов, входящих в состав исследуемого объекта. Рассмотрим наиболее распространенные из них.

Среди большого многообразия моделей данного класса в исследованиях

физических процессов горного производства широкое распространение получила модель Дахнова-Арчи [167, 30]:

$$\rho_n = \frac{a}{k_n^m} \rho_v, \quad (1.18)$$

где  $\rho_n$  и  $\rho_v$  – соответственно удельные сопротивления матрицы геоматериала и жидкости заполняющей поры;  $k_n$  – коэффициент пористости;  $a$  и  $m$  – эмпирические коэффициенты, устанавливаемые экспериментально.

Простота и малая степень вычислительной сложности данной модели позволила ей найти большее применение в инженерной практике. Однако эмпирический характер данной модели, выражающийся в неоднозначности определения параметров  $a$  и  $m$ , позволяет получать лишь приблизительные значения удельного электрического сопротивления.

Как показала практика, модель Дахнова-Арчи дает неудовлетворительные результаты для геоматериалов, среди текстурных составляющих которых присутствует глина. Данное обстоятельство, а также производственная необходимость стали одними из главных причин, по которым многими авторами был предложен ряд математических моделей, способных определить удельное электрическое сопротивление (или электропроводимость) глинистых горных пород.

Одну из таких работ предложили М. Ваксман и Л. Смитс [232], согласно которой электропроводность геоматериала  $\mu_T$  определяется следующим образом:

$$\mu_T = (\mu_T + \mu_0)n^m, \quad (1.20)$$

где  $\mu_T$  и  $\mu_0$  – электропроводности твердой и жидкой фазы;  $n$  – пористость;  $m$  – геометрический фактор, характеризующий размер частиц и их упаковку.

К главному достоинству данной работы можно отнести то, что в ней впервые был учтен тот факт, что электропроводность твердой фазы геоматериала зависит от электропроводности входящей в него воды. В свою очередь недостатком данной работы является существенное упрощение реальной структуры исследуемых объектов, так, например, при построении математической

модели (1.20) считается, что частицы глины и электролит равномерно распределены в исследуемом геоматериале.

Установлено, что процесс переноса электричества сопровождается избыточной концентрацией ионов двойного электрического слоя.

Для учета данного факта Б.Ю. Вендельштейн и И.Е.Эйдман предложили следующую математическую модель [165]:

$$\frac{\rho_{\Pi}}{\rho_B} = \frac{1}{(K_{\Pi}K_B)^m} \frac{1}{1 - \frac{K_{ГЛ}\omega_{АДС}}{K_{\Pi}K_B} \left(1 - \frac{\rho_{СЛ}}{\rho_B}\right)}, \quad (1.21)$$

где  $\rho_{\Pi}$ ,  $\rho_B$  и  $\rho_{СЛ}$  – соответственно удельные сопротивления геоматериала, пластовой воды и двойного электрического слоя;  $K_{\Pi}$ ,  $K_B$ ,  $K_{ГЛ}$  – открытая пористость, водонасыщенность и объемная глинистость геоматериала;  $\omega_{АДС}$  – содержание адсорбированной воды в долях объема глинистого геоматериала.

К главному недостатку данной модели можно отнести ее малую степень адекватности при низких значениях минерализации воды [165]. Кроме того, как и в предыдущей модели, выражение (1.21) непригодно для определения удельного электрического сопротивления геоматериалов, в составе которых отсутствует глина.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что все вышеперечисленные модели носят преимущественно качественный характер и дают лишь приближенные значения определяемых величин. Обусловлено это тем, что удельное электрическое сопротивление геоматериалов зависит не только от электропроводных характеристик и объемного содержания компонентов, но и от структурно-текстурных особенностей изучаемых объектов.

Более адекватный учет данных особенностей при определении удельного электрического сопротивления (или электропроводности) геоматериалов дают модели второго класса.

Как известно, достаточно часто методы и результаты, разработанные и накопленные при математическом моделировании одних явлений, относительно

легко, «по аналогии», могут быть перенесены на широкие классы совсем других процессов. Поэтому неудивительно, что математические методы теории эффективной среды, зарекомендовавшие себя при исследовании деформационных и тепловых свойств, с успехом применяются и для определения электропроводности геоматериалов.

Таким образом, в основе моделей второго класса лежит подход, основанный на теории эффективной среды, обладающей по сравнению с вышерассмотренными моделями большей степенью количественной адекватности.

Для вычисления эффективной электропроводности предложено большое количество научных трудов, наиболее полный анализ которых проведен в работах [21, 36, 63].

Одну из наиболее характерных моделей в данном направлении предложил Д.А.Г. Бруггеман [174]. При построении данной модели делаются следующие допущения. В рамках рассматриваемого приближения считается, что каждое включение с соответствующими электропроводными характеристиками находится в некоторой эффективной среде. В первом приближении форма включения считается сферической. В результате полевое взаимодействие каждого сферического включения со всеми окружающими его неоднородностями заменяется учетом взаимодействия со средой, характеризующейся соответствующими эффективными электропроводными характеристиками. При этом считается, что на каждое сферическое включение действует поле, которое является усредненным по всему объему.

Впоследствии модель Д.А.Г. Бруггемана была модифицирована Т. Ханай [184] и Т. Сенем [221]. В результате было получено следующее выражение, названное в отечественной и зарубежной литературе моделью Бруггемана-Ханай-Сена:

$$\frac{\mu - \mu_T}{\mu_0 - \mu_T} \left( \frac{\mu_0}{\mu^{(ef)}} \right)^d = n, \quad (1.22)$$

где  $\mu_T$  и  $\mu_0$  – электропроводности твердой и жидкой фазы;  $n$  – доля воды в двухкомпонентной системе (пористость),  $d$  – коэффициент деполяризации частиц твердой фазы, принимающий значения от 0 до 1. В частности, для длинных цилиндрических частиц, параллельных направлению электрического поля  $d = 0$ , для сферических частиц  $d = 1/3$ , для тонких пластин, перпендикулярных полю  $d = 1$ .

К ключевым достоинствам данной модели можно отнести: 1) малую вычислительную сложность; 2) возможность обобщения получаемого выражения на случай анизотропных геоматериалов; 3) при определении эффективной теплопроводности горной породы учитывается влияние поверхностной проводимости.

К главному недостатку данной модели можно отнести ее непригодность для определения эффективной теплопроводности горных пород, в состав которых входит три и более текстурных составляющих. Кроме того, при построении данной модели не в достаточной степени учитывается воздействие внешнего поля, действующего на геоматериал.

Анализ данной модели, а также других работ из данного направления [219, 175, 222], свидетельствует, что для исследования геоматериалов используются модели, упрощающие реальную мультифрактальную структуру исследуемых объектов. Так, например, в данных работах многокомпонентная сплошная среда сводится к двух или трехкомпонентной, электропроводная анизотропия и наличие флюидосодержащих включений если и учитывается, то только на одном из масштабных уровней (структурном или текстурном) и т.д.

Кроме того, во всех существующих моделях, основанных на теории эффективной среды, при проведении процедуры усреднения коэффициентов электропроводности не учитываются особенности взаимодействия собственных полей неоднородностей на различных иерархических масштабных уровнях, что существенно снижает точность получаемых результатов.

Таким образом, анализ существующих математических моделей определения электропроводности геоматериалов свидетельствует о том, что

основанные на них компоненты программного обеспечения АСНИ не могут дать количественно адекватных результатов определяемых величин.

Итак, на основании вышеизложенного можно сделать вывод, что для эффективного решения функциональных задач определения тепловых и электрических свойств геоматериалов требуется проектирование и реализация новых компонентов программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП. С одной стороны такие компоненты должны обладать функциональностью систем класса LIMS, а с другой – реализовываться на основе математических моделей геоматериалов относительно процессов тепло- и электропроводности, разработанных в рамках нового мультифрактального метода моделирования функциональных задач, позволяющего учесть масштабный эффект и реальную мультифрактальную структуру исследуемых объектов.

### **1.5.3. Функциональная задача определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив**

Среди существующих теоретических и практических проблем физических процессов горного производства, особое место занимает проблема исследования напряженного состояния, реализуемого в породном массиве при ведении горных работ.

Изначально для решения данной проблемы исследователями использовался подход, направленный на разработку общих методов моделирования напряженного состояния породного массива, и построения на их основе математических моделей, предназначенных для решения широкого класса задач. Однако, несмотря на некоторые достижения такого подхода, разработка подобного рода математических моделей оказалась слишком трудоемкой и сложной проблемой. Выяснилось, что чем шире класс задач, которые может решать одна модель, тем меньше оказываются ее возможности при решении отдельных конкретных проблем.

В связи с этим в рассматриваемой предметной области на данный момент

превалирует направление разработки математических моделей напряженного состояния породных массивов, предназначенных для решения отдельных прикладных задач. Исключительная сложность объектов исследования и разнообразие решаемых задач обусловило наличие большого количества узкоспециализированных математических моделей, описывающих напряженное состояние породных массивов в разнообразных условиях и при ведении различных видов горных работ.

Анализ существующих работ в данном направлении свидетельствует о том, что наиболее релевантные значения дают математические модели, которые при определении напряженного состояния породного массива описывают его в виде неоднородной сплошной среды. Как показывают исследования, входные данные в таких моделях существенно отличаются друг от друга, как используемыми параметрами, так и методологией разработки. Несмотря на это, в составе любой из них среди используемых входных параметров обязательно присутствует величина внешнего поля, действующего на исследуемый породный массив. В таком случае, можно сделать вывод, что четвертой основной функциональной задачей АСНИ в области физических процессов горного производства и любой АСУ ТП в горной промышленности является определение внешнего поля напряжений, действующего на породный массив.

Рассмотрим существующие подходы к определению данной величины. В настоящее время для определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив, наиболее известны три подхода.

Согласно первому из них внешнее поле напряжения, действующее на некоторый участок (представительный объем) породного массива, определяется весом вышележащей толщи горных пород, т.е. имеет гравитационную природу [86]. В результате внешнее поле напряжений, действующее на породный массив и выраженное в главных напряжениях, определяется следующим выражением:

$${}^{(0pm)}\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где  $\sigma_3 = \gamma H$ ;  $\gamma$  – средний объемный вес пород массива;  $H$  – глубина рассматриваемого объема от земной поверхности;  $\sigma_1 = \sigma_2 = \xi \sigma_3$ ;  $\xi = \frac{\nu}{1-\nu}$ ;  $\nu$  – коэффициент поперечных деформаций (коэффициент Пуассона).

В случае, когда представительный объем рассматриваемого геоматериала находится ниже уровня грунтовых вод, то вертикальная составляющая внешнего поля напряжений из выражения (1.23) будет определяться следующим образом [194]:

$$\sigma_3 = \gamma_w H_0 + \gamma(H - H_0), \quad (1.24)$$

где  $\gamma_w$  – объемный вес воды;  $H_0$  – разница между начальным и конечным уровнем подземных вод.

В соответствии с другим подходом считается, что любой участок породного массива находится в гидростатическом напряженном состоянии, т.е. в этом случае все составляющие тензора внешнего поля напряжений равны между собой ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \gamma H$ ).

Согласно третьему подходу внешнее поле напряжений, действующее на породный массив, формируется под действием не только гравитационных сил, но и неотектонических процессов. В этом случае основное значение придается силам, возникающим в результате перемещения в горизонтальном направлении отдельных участков (плит) земной коры. Действительно, как показывают различные экспериментальные исследования, на многих месторождениях горизонтальная составляющая внешнего поля напряжений в несколько раз превышает вертикальную составляющую, определяемую весом пород до земной поверхности [86].

Согласно рассматриваемому подходу величина внешнего поля напряжений, действующего на породный массив, задается в следующем виде:

$$\sigma^{(0pm)} = \sigma^{(0g)} + \sigma^{(0t)}, \quad (1.25)$$

где  $\sigma^{(0g)}$  и  $\sigma^{(0t)}$  – гравитационная и тектоническая составляющие тензора внешнего

поля напряжений. При этом для определения гравитационной составляющей  $\sigma^{(0g)}$  используют соотношение (1.23), а для  $\sigma^{(0t)}$  – применяют один из экспериментальных методов (импульсный сейсмический, структурно-кинематический и др.).

Проанализировав выражение (1.25), можно сделать вывод, что в случае отсутствия или достаточной малости тектонических напряжений, рассматриваемый подход сводится к одному из рассмотренных ранее. Таким образом, задача определения внешнего поля напряжений полностью зависит от величины тектонической составляющей  $\sigma^{(0t)}$ .

К сожалению, применение существующих экспериментальных методов определения тектонических напряжений по причине масштабного эффекта (представительный объем породных массивов может достигать  $30,13\text{ м}^3$ ) не позволяет получить с достаточной для науки и практики точностью значения  $\sigma^{(0t)}$ . Ситуацию осложняет и то, что в рассматриваемом подходе, а следовательно, и во всех вышеперечисленных, определение значения тензора внешнего поля напряжений осуществляется в рамках недопустимой идеализации – породный массив представляется упругим изотропным телом, что, безусловно, приводит лишь к качественной оценке получаемых результатов.

Проведенный анализ существующих подходов к определению внешнего поля напряжений, действующего на породный массив, свидетельствует о большой степени погрешности, получаемых с их помощью значений устанавливаемой тензорной величины. Таким образом, ни один из существующих компонентов программного обеспечения, основанный на рассмотренных подходах, не в состоянии на должном уровне решать анализируемую функциональную задачу. И как результат – снижение степени количественной адекватности разрабатываемых моделей определения напряженного состояния в породном массиве, обусловленного ведением горных работ.

Выходом в сложившейся ситуации является разработка новых компонентов

программного обеспечения систем класса АСНИ-АСУ ТП, основывающихся на математическом обеспечении, спроектированным в рамках мультифрактального моделирования функциональной задачи экспериментального определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив. Именно данные компоненты программного обеспечения посредством анализа экспериментальных данных о трещинообразовании структурных и текстурных мультифрактальных составляющих изучаемого породного массива, с учетом взаимного влияния гравитационных и тектонических сил, должны решить задачу реконструкции внешнего поля напряжений, действующего на исследуемый объект.

#### **1.5.4. Функциональная задача разработки математических моделей разрушения геоматериалов**

Перейдем к следующей функциональной задаче. Данная задача относится исключительно к системам класса АСНИ, используемым при исследовании физических процессов горного производства. Как известно, каждый технологический процесс горного производства, помимо изменений деформационных свойств геоматериалов, сопровождается их разрушением. Вследствие этого разработка новой или совершенствование существующей АСУ ТП, применяемой в горной промышленности, невозможно без получения новых знаний о методах управления или прогнозирования процесса разрушения геоматериалов. А поскольку в основе каждого такого метода лежит соответствующая модель, приходим к тому, что вторая функциональная задача АСНИ физических процессов горного производства должна заключаться в разработке математических моделей разрушения геоматериалов.

Традиционно для разработки математических моделей разрушения геоматериалов используются системы компьютерного моделирования – СМС. Как указывалось ранее, системы подобного класса существуют двух типов: специализированные и универсальные.

Среди специализированных систем, применяемых при разработке

математических моделей разрушения геоматериалов, особого внимания заслуживают Plaxis, Itasca Software, Rocscience, GEO 5, COMSOL Multiphysics и др. Подавляющее большинство из них основано на методах конечных элементов и его вариациях. Как известно, при использовании данного метода производят дискретизацию сплошной среды, описывающей исследуемый объект, и в результате – непрерывная математическая модель сводится к дискретной. Предполагается по умолчанию, что между данными типами моделей нет принципиального барьера, и при видоизменении непрерывная картина может стать дискретной и обратно. Правомерность таких переходов лучше обнаруживается при обратном видоизменении от дискретной модели к непрерывной. Этот переход возможен, если удовлетворяются некоторые условия полноты, а именно: с уменьшением размеров конечных элементов и увеличением их числа поведение дискретной системы приближается к поведению «непрерывной» системы – сплошной среды. И в пределе при стремлении размеров конечных элементов к нулю совпадает с поведением сплошной среды. Это возможно при условии, что нет ограничений на уменьшение конечных элементов. Данные ограничения у геоматериалов обусловлены представительным объемом, так конечные элементы не могут быть меньше представительного объема, размеры которого для горных пород могут достигать  $5,21\text{м}^3$ , а у породного массива и того больше.

Поэтому математические модели разрушения геоматериалов, основанные на теории конечных элементов, адекватны изучаемым реальным объектам с малым представительным объемом и не отвечают требованиям адекватности в случае моделирования процессов, протекающих в объемах меньших, чем представительный.

Таким образом, использование одной лишь теории конечных элементов, а следовательно и выше перечисленных специализированных CMS, для решения рассматриваемой функциональной задачи явно недостаточно. И это не удивительно, сложная природа изучаемого явления и отсутствие полного

физического понимания его сущности не позволяют разработать единую теорию, гарантирующую получение адекватных математических моделей разрушения геоматериалов в условиях решения различных задач автоматизации технологических процессов горной промышленности. По этой причине при использовании той или иной теории построения математических моделей приходится учитывать лишь основные решающие факторы, которые в рамках разрабатываемой АСУ ТП играют определяющую роль в процессе разрушения. В противном случае поставленная задача становится либо чрезмерно сложной, либо неразрешимой.

Такое состояние дел привело к разработке большого количества теорий, в рамках которых производится построение и исследование математических моделей разрушения геоматериалов. Причем количество подобного рода теорий неуклонно растет. Именно поэтому для решения рассматриваемой функциональной задачи необходимо чтобы АСНИ, применяемые в исследовании физических процессов горного производства, были ориентированы на применение различных теорий моделирования. Вследствие этого в программном обеспечении анализируемых АСНИ должны использоваться СМS универсального типа, а не их специализированные аналоги.

К сожалению существующие СМS автоматизируют процесс разработки математических моделей разрушения геоматериалов только на заключительной стадии, т.е. тогда, когда модель исследуемого объекта уже построена и требуется ее реализация на ЭВМ. Однако перед этим необходимо осуществить выбор теории, в рамках которой будет производиться построение математической модели. Как указывалось ранее, процесс выбора такой теории относится к этапу построения содержательной модели, и ввиду отсутствия на сегодняшний день соответствующих средств не поддается автоматизации.

А между тем проблема выбора теории, применение которой в рамках разрабатываемой АСУ ТП позволит получить математическую модель, с наибольшей возможной степенью адекватности описывающей процесс разрушения геоматериалов, ставится перед исследователями в процессе каждого

научного проекта. На данный момент решение этой проблемы производится посредством неоднократного сравнения результатов опытов (или натурных наблюдений) с результатами вычислительных экспериментов, полученных с помощью различных математических моделей разрушения, отличающихся друг от друга теориями, лежащими в их основе. Однако подобное сравнение чаще всего оказывается невозможным – опыты над геоматериалами являются весьма дорогостоящими, трудоемкими и не могут быть многократно воспроизведены в одних и тех же условиях. Поэтому существует необходимость выбора теории моделирования без проведения сравнений опытных данных с результатами компьютерных экспериментов.

На сегодняшний момент современными исследователями накоплен большой объем знаний относительно границ применимости и эффективности теорий, использование которых позволяет получать адекватные математические модели, предназначенные для решения различных прикладных задач разрушения геоматериалов. К сожалению, данные знания в большей своей части являются разрозненными, неявными и неформализованными. В тоже время применение данных знаний позволило бы исследователям существенно снизить трудоемкость разработки математических моделей.

Для решения такой актуальной проблемы необходимо разработать экспертную систему, позволяющую исследователю принять решение относительно выбора теории, применение которой в рамках решаемой прикладной задачи позволит построить математическую модель, с наибольшей возможной степенью адекватности описывающую процесс разрушения геоматериалов.

### **1.5.5. Административные функциональные задачи**

Последующие функциональные задачи, которые должна решать любая АСНИ в области физических процессов горного производства, преимущественно связаны с выполнением административных функций.

Проводя анализ научных проектов, связанных с изучением физических процессов горного производства, было установлено, что любая используемая АСНИ в рассматриваемой предметной области должна решать следующие функциональные задачи: 1) анализ данных; 2) учет материалов и ресурсов; 3) планирование задач и событий; 4) управление научными проектами и задачами; 5) создание отчетов; 6) резервное копирование и восстановление данных; 7) аутентификация пользователей; 8) ведение электронного лабораторного журнала.

Строго говоря, данные задачи являются стандартными для любой АСНИ общего назначения и в принципе могут быть с успехом решены любой системой класса LIMS и пакетом прикладных программ типа ELN. Однако применительно к области физических процессов горного производства, представленные функциональные задачи имеют свои специфические особенности. Так, например, при проведении исследований физических процессов горного производства в рамках анализа данных осуществляется определение значений параметров плотностных, прочностных и других физических свойств геоматериалов, устанавливаемых экспериментальным способом. Для решения данной функциональной задачи требуется осуществить следующую последовательность действий: 1) зарегистрировать результаты опытов над макрообразцами; 2) в соответствии с используемым экспериментальным способом рассчитать определяемый параметр; 3) провести статистическую обработку полученных результатов. При этом в отличие от ранее рассмотренных подзадач определения удельной теплоемкости и вызванной поляризации геоматериалов, в процессе выполнения данной последовательности действий необходимо учитывать, что некоторые параметры физических свойств геоматериалов (например, прочностные свойства) чувствительны к масштабному эффекту. Вследствие этого, при проведении экспериментов над макрообразцами геоматериала необходимо принимать во внимание существование представительного объема.

К сожалению существующие LIMS и ELN не учитывают данные особенности рассматриваемой предметной области, вследствие чего основанные на них АСНИ не могут решать на должном уровне свои административные

функциональные задачи. При этом обычной настройкой LIMS и ELN эту проблему не решить – требуется реинжиниринг кода данных приложений, что является достаточно сложной и трудоемкой процедурой.

Также необходимо отметить, что часть из представленных административных функциональных задач, а именно – анализ данных; учет материалов и ресурсов; планирование задач и событий; создание отчетов; резервное копирование и восстановление данных; аутентификация пользователей – свойственны не только АСНИ, но и выполняются многими АСУ ТП в горной промышленности.

### **1.6. Формулирование задач исследований**

Перечисленные выше методы и средства, естественно, не охватывают все методологии разработки в столь широкой области, как автоматизация функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности, но они формируют основные направления, используемые в настоящее время.

Анализ существующих АСНИ, используемых при изучении физических процессов горного производства, и АСУ ТП, применяемых в горной промышленности, свидетельствует о том, что функциональные задачи данных систем (как в части методов, так и средств) в значительной степени совпадают. Более подробное рассмотрение показало, что существующие системы АСНИ и АСУ ТП, применяемые в горной промышленности не в состоянии в должной мере решать свои основные функциональные задачи.

К первой группе таких задач относится определение деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов. Существующие АСНИ и АСУ ТП как правило решают рассматриваемые задачи посредством выполнения экспериментов над макрообразцами, регистрацией полученных результатов опытов и определением средних значений установленных величин. Однако при проведении подобного рода опытов наблюдается масштабный эффект, проявляющийся в том, что испытания над макрообразцами с разными

геометрическими размерами, изготовленными из одного геоматериала, приводят к различным значениям параметров физических свойств. В тоже время установлено, что если объемы макрообразцов некоторого геоматериала из исследуемой совокупности превышают или равны некоторой величине – называемой представительным объемом, то значения параметров физических свойств данных образцов будут статистически совпадать. К сожалению, ни один из существующих компонентов программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП не учитывает проявления масштабного эффекта. В результате пользователи АСНИ и АСУ ТП вынуждены использовать компоненты, основанные на анализе экспериментальных данных над макрообразцами, объемы которых меньше представительного, что в конечном счете приводит к вынужденной ошибке в определении параметров физических свойств, приводящей к снижению качества решаемых функциональных задач.

Для решения данной проблемы необходимо, чтобы программное обеспечение АСНИ и АСУ ТП, проектировалось и реализовывалось на основе методологии мультифрактального математического моделирования функциональных задач определения деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов, позволяющей в отличие от существующих теорий и методов при определении физических свойств геоматериалов учесть масштабный эффект и реальную мультифрактальную структуру исследуемых объектов.

Следующая функциональная задача связана с определением величины внешнего поля напряжений, действующего на породный массив. Как правило, для решения данной задачи используются различные экспериментальные методы (импульсный сейсмический, структурно-кинематический и др.). Как показывают исследования, величины представительных объемов породных массивов могут достигать  $30,13 м^3$ , вследствие чего используемые экспериментальные методы по причине вышеописанного масштабного эффекта дают лишь качественную оценку определяемой величины тензора напряжения. Ситуацию осложняет и то, что

аналитическая составляющая данных методов (отвечающая за обработку полученных опытных данных) не учитывает реальную структуру исследуемых породных массивов, что также приводит к увеличению погрешности между реальными и определяемыми значениями компонентов тензора внешнего поля напряжений. В сложившейся ситуации для решения рассматриваемой функциональной задачи, необходимо, чтобы программное обеспечение реализуемой АСНИ или АСУ ТП, разрабатывалось на основе методологии, сочетающей в себе достоинства, как экспериментальных способов исследований, так и методологии мультифрактального математического моделирования, позволяющей при анализе опытных данных наиболее адекватно учесть реальную структуру породного массива.

Другой основной функциональной задачей, относящейся только к системам класса АСНИ, применяемым при исследовании физических процессов горного производства является разработка математических моделей разрушения геоматериалов. Именно данные модели являются результатом работы АСНИ, и от того, насколько они адекватны и обладают способностью к интеграции в математическое и программное обеспечение другого класса систем (АСУ ТП, АСТПП и др.), зависит успех научных проектов по разработке инноваций в технологических процессах горной промышленности. Для решения рассматриваемой функциональной задачи в составе АСНИ используются CMS – системы компьютерного моделирования (Matlab, Scilab, Octave и др.). К сожалению существующие CMS автоматизируют процесс разработки математических моделей разрушения геоматериалов только на заключительной стадии, т.е., когда модель исследуемого объекта уже построена и требуется ее реализация на ЭВМ. При этом процесс выбора теории, применение которой в рамках решаемой прикладной задачи позволит получить наиболее адекватную математическую модель разрушения геоматериалов, на сегодняшний момент не автоматизируется. И как результат, исследователь вынужден на основе различных теорий осуществить построение математических моделей разрушения, реализовать их на ЭВМ, и далее, сравнив результаты вычислительных

экспериментов с опытными данными, выбрать наиболее адекватную. Помимо того, что такой процесс является весьма трудоемким, есть еще принципиальное ограничение, проявляемое при исследовании физических процессов горного производства – опыты над геоматериалами являются весьма дорогостоящими, занимают много времени и достаточно часто по причине масштабного эффекта не могут быть релевантными. Поэтому существует необходимость разработки математических моделей разрушения геоматериалов без реализации различных моделирующих программ и выбора из них наиболее адекватной. Решить данную проблему может разработка экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов. Именно данная система посредством опроса исследователя должна подобрать соответствующую теорию, использование которой совместно с одной из CMS позволит для решаемой прикладной задачи горного производства разработать математическую модель с наибольшей степенью количественной адекватности, описывающей процесс разрушения геоматериалов.

Малая эффективность решения вышеописанных функциональных задач также во многом связано с несовершенством методологий разработки АСНИ и АСУ ТП. Так, например, для разработки АСНИ, используемой при изучении физических процессов в горной промышленности, применяется интеграционный подход, основанный на конфигурировании и последующем объединении готовых компонентов программного и технического видов обеспечений. Однако как показывает практика, в виду особенностей задач горной промышленности, требующей большей гибкости и устойчивости получаемых решений, интеграционные АСНИ не в состоянии решить проблему автоматизации научных исследований в области физических процессов горного производства.

На первый взгляд для разработки систем класса АСНИ и АСУ ТП следует использовать системно-ориентированный подход, включающего анализ, проектирование и последовательную реализацию математического, информационного, программного и технического видов обеспечений системы. Однако автоматизированные системы, реализуемые в рамках данного подхода,

обладают малой степенью гибкости и расширяемости. Вследствие этого, применение системно-ориентированного подхода к решению проблемы автоматизации научных исследований физических процессов горного производства и технологических процессов в горной промышленности не приведет к удовлетворительным результатам.

В сложившейся ситуации приобретает актуальность разработка новой каркасной мультифрактально-модельной методологии, позволяющей за счет использования мультифрактального математического моделирования функциональных задач, искусственного интеллекта и объектно-ориентированного проектирования реализовать гибкую расширяемую автоматизированную систему, наиболее полно удовлетворяющую требованиям пользователей. При этом для обеспечения релевантности предлагаемой методологии необходимо рассмотреть пример ее реализации не только для АСНИ, используемой для изучения физических процессов горной промышленности, но и для АСУ ТП, предназначенной для автоматизации наиболее проблемных задач. Одной из таких задач является технологический процесс забивки свай на оползнеопасных участках породных массивов с целью обеспечения их устойчивости. К сожалению, как показывает практика, эффективность таких технологических процессов очень мала и во многих случаях приводит к обратному эффекту – провоцированию схода оползня. Исследования показали, что это связано с тем, что технологический процесс забивки свай определяется не только внутренними управляющими параметрами (поперечное сечение сваи, осевое усилие на наголовник сваи и т.д.), но и изменением параметров, определяющих реакцию внешней среды – породного массива, на технологическое воздействие.

Поэтому использование вновь предложенной методологии для разработки архитектурных решений принципиально новой АСУ ТП забивки свай, обеспечивающей максимум производительности в условиях изменения поведения внешней среды, имеет существенное значение для решения проблемы автоматизации в горной промышленности.

На основании всего вышеизложенного можно сформулировать следующие

задачи исследований:

1. Разработать и формализовать каркасный метод построения АС.
2. Разработать теоретические основы мультифрактального математического моделирования функциональных задач определения деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов, а также величины внешнего поля напряжений, действующего на породный массив.
3. Разработать программный фреймворк (высокоуровневый каркас ПО) АСНИ и АСУ ТП, функциональные задачи которых связаны с определением напряженно-деформированного состояния, процесса тепло- и электропроводности, а также разрушения различного рода объектов мультифрактальной структуры.
4. Спроектировать и реализовать экспертную систему поддержки принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов.
5. В рамках предложенной методологии построить АСНИ физических процессов горного производства и АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов.

## **2. КАРКАСНЫЙ МЕТОД РАЗРАБОТКИ АС. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ АСНИ И АСУ ТП В ГОРНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ**

Как указывалось ранее, существующие подходы к разработке АС не в состоянии решить проблему автоматизации научных исследований в области физических процессов горного производства и технологических процессов в горной промышленности. Поэтому предложим новый каркасный метод разработки АС. Предлагаемый метод существенно опирается на понятие каркаса прикладного программного обеспечения, также известного как программный фреймворк (application framework). В связи с этим определим понятие каркаса, и как его используют при разработке автоматизированных систем.

На сегодняшний момент подавляющее большинство программного обеспечения автоматизированных систем разрабатывается в рамках объектно-ориентированного подхода. Одним из наиболее важных свойств объектно-ориентированной разработки, наряду с обеспечением надежности и снижением сложности сопровождения, является возможность повторного использования проектных решений. Действительно, необходимость снижения стоимости программного обеспечения, сокращения времени на его проектирование и реализацию, требует от разработчиков максимального использования уже имеющихся удачных проектных решений, зарекомендовавших себя в других приложениях. Одним из наиболее совершенных инструментальных средств реализации концепции повторного использования являются каркасы.

В технологии разработки программного обеспечения термин каркас (фреймворк) впервые был предложен Р.Э. Джонсоном и Б. Футом [77]. В своей работе, посвященной проектированию повторно используемых объектно-ориентированных классов, авторы сформировали идею разработки программного обеспечения посредством использования каркаса – остова (скелета) некоторой программы, детализация которого позволяет создать полноценное приложение.

Несмотря на то, что с момента выхода данной работы прошло более 25 лет, идея каркасной методологии практически не изменилась, а наоборот – конкретизировалась в части того, что следует считать остовом программы и каким способом осуществлять его детализацию. В результате было получено следующее определение каркаса.

Каркас прикладного программного обеспечения (программный фреймворк) представляет собой совокупность взаимосвязанных классов, детализация которых посредством механизмов наследования, агрегирования и добавления новых классов позволяет создать полноценное приложение [14, 77, 218].

Как показывает практика, использование программных фреймворков за счет своей надежности и возможности повторного использования существенно повышает производительность применяемых в настоящее время объектно-ориентированных методологий разработки программного обеспечения (RUP, DSDM и др.). Действительно, в рамках любой из данных методологий разработка ПО АС с применением фреймворка сводится к проектированию и реализации программной архитектуры, состоящей из двух частей. Первая из них является программным фреймворком, представляющим набор взаимосвязанных классов, допускающих многократное использование во многих проектах без каких-либо изменений в своей реализации (программном коде). Данный набор классов отвечает за общую структуру, поток управления и организацию данных, вместе составляющих основу для решения функциональных задач АС.

В свою очередь вторая часть программной архитектуры посредством наследования и (или) агрегирования специфицирует поведение программного фреймворка, придавая ему новую функциональность, что в итоге приводит к полноценному экземпляру ПО разрабатываемой АС. Данную часть архитектуры составляет взаимосвязанная совокупность: 1) подклассов, получаемых наследованием и (или) агрегированием свойств и переопределением отдельных методов соответствующих классов фреймворка; 2) классов предметной области.

Как правило, проектирование совокупности классов, образующих вторую часть программной архитектуры, не вызывает затруднений, а наличие большого

количества case-средств существенно упрощает процесс их реализации. Иначе дело обстоит с проектированием и реализацией классов, составляющих программный фреймворк. Анализ отечественных и зарубежных работ в области информационных технологий свидетельствует о том, что существующие на сегодняшний момент методы разработки программных фреймворков носят несистематизированный и неформализованный характер. Проектирование программных фреймворков в данных методах производится на основе эмпирического подхода, сводящегося к применению в зависимости от условий задачи тех или иных многократно апробированных архитектурных решений. Несмотря на то, что во многих случаях данные методы позволяют разрабатывать сравнительно гибкие и расширяемые программные фреймворки, как показывает практика, их явно недостаточно для проектирования и реализации каркасов программного обеспечения систем класса АСНИ и АСУ ТП. Действительно, анализ существующих АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности свидетельствует о том, что на сегодняшний момент при разработке программного обеспечения данных систем в лучшем случае используются низкоуровневые программные фреймворки, обеспечивающие решение служебных функциональных задач, т.е. задач, ориентированных на внутрисистемные функции или операции (отображение графического интерфейса пользователя, обеспечения взаимодействия с базами данных и др.). При этом основные функциональные задачи, ориентированные на обслуживание пользователей системы, данными фреймворками не поддерживаются. И это неудивительно, поскольку для автоматизации основных функциональных задач требуется разработка соответствующих математических моделей, баз данных и подсистем искусственного интеллекта, что в существующих методах разработки программных фреймворков никак не учитывается.

Таким образом, существующие методы проектирования и реализации фреймворков существенно ограничены, когда дело касается разработки систем класса АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности. В сложившейся ситуации, воспользовавшись концепцией каркаса, заложенной в методах разработки

программных фреймворков, предложим новый каркасный метод разработки АС, учитывающий необходимость проектирования и реализации соответствующего математического и информационного видов обеспечений.

Разработку АС в рамках предлагаемого метода будем осуществлять в рамках итерационной модели жизненного цикла, состоящей из трех этапов: 1) анализ требований; 2) проектирование; 3) реализация и тестирование. Как и в других методах, каждый этап состоит из совокупности стадий, определяющих порядок действий, необходимых для разработки АС. Для унификации и систематизации результатов, полученных в конце каждого этапа (и соответственно – каждой стадии), необходимо использовать определенные стандарты разработки систем. К сожалению, существующие стандарты не учитывают идею каркасного подхода к построению АС, и вследствие этого – напрямую неприменимы в рамках рассматриваемого метода. Для решения данной проблемы воспользуемся некоторой признанной в международном сообществе совокупностью стандартов, и адаптируем их для использования в предлагаемом каркасном методе разработки. В качестве такой совокупности выберем согласованное множество международных стандартов ISO/IEC/IEEE 15288:2015, 16326:2009, 24765:2010, 29148:2011, 42010:2011, 1016:2009 и их вариации, являющихся к настоящему моменту одними из наиболее актуальных и распространенных в области разработки систем и программного обеспечения.

В итоге, в соответствии с выбранным множеством стандартов ISO/IEC/IEEE совокупность результатов стадий (обновляемых на каждой из итераций) этапов анализа требований, проектирования, реализации и тестирования сформируют соответственно спецификацию требований к системе (SyRS – System requirements specification), проектную документацию к системе (SyDD – System design document) и индивидуальную системную документацию (PSD – Personal System Documentation). Принимая это во внимание, а также воспользовавшись унифицированным языком моделирования в части диаграмм деятельности получим в формализованном виде нижеследующий каркасный метод разработки АС (рисунок 1).

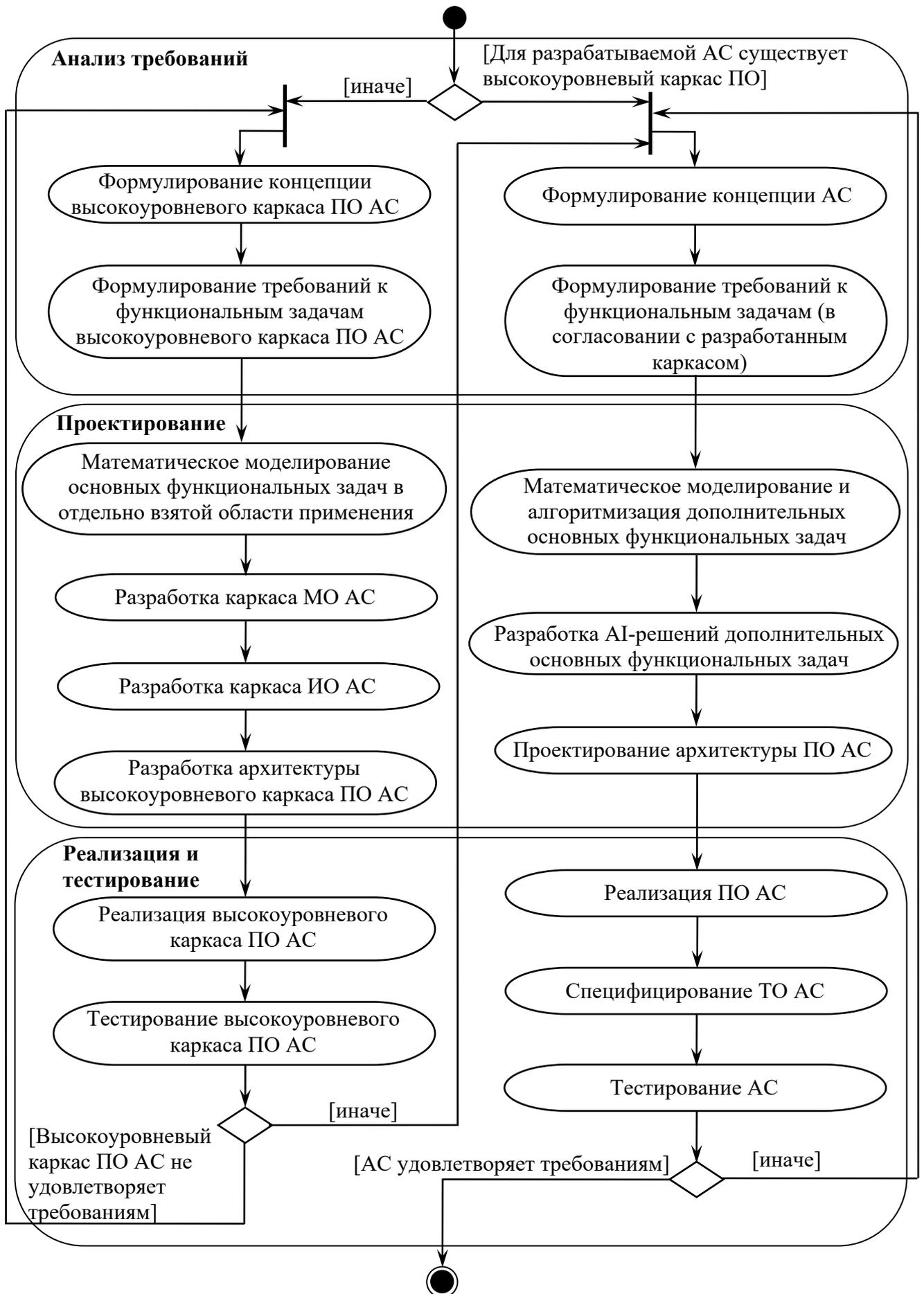


Рисунок 1 – Каркасный метод разработки АС

Рассмотрим данную диаграмму более подробно. Согласно рисунку 1, разработка АС в рамках предлагаемого каркасного метода делится на стадии левой и правой частей потока управления. Стадии из левой части потока выполняются в случае отсутствия высокоуровневого каркаса ПО (программного фреймворка) АС, т.е. каркаса, способного обеспечить решение как служебных, так и основных функциональных задач различных АС, отличающихся как по типу, так и по области применения. В противном случае разработка АС в рамках предлагаемого метода будет начинаться со стадий, составляющих правую часть потока управления.

Поскольку, в настоящий момент высокоуровневые программные фреймворки отсутствуют, то уместно предположить, что на первой итерации рассматриваемого метода будут выполняться стадии, изображенные в левой части представленной диаграммы, т.е. осуществление этапа анализа требований начнется с формулирования концепции высокоуровневого каркаса ПО АС. Однако в дальнейшем по мере увеличения количества высокоуровневых каркасов ПО АС можно будет сразу переходить к стадиям из потока управления, представленным в правой части изображенной выше диаграммы.

Итак, в случае отсутствия высокоуровневого каркаса, осуществляется первая стадия этапа анализа требований, заключающаяся в формулировании – целей, общего описания, а также требований к программным и аппаратным интерфейсам разрабатываемого каркаса ПО АС. Полученная таким образом концепция используется на второй стадии – «Формулирование требований к функциональным задачам высокоуровневого каркаса ПО АС». Для выполнения данной стадии необходимо воспользоваться языком UML в части диаграмм и сценариев вариантов использования. При этом в данных диаграммах и сценариях каждому варианту использования сопоставляется одна функциональная задача, а в качестве действующих лиц используются «точки расширения», т.е. программные объекты, подсистемы и другие внешние сущности, которые не входят в состав каркаса, но участвуют в его функционировании.

По окончании данной стадии осуществляется переход к первой стадии

этапа проектирования – математическому моделированию основных функциональных задач в отдельно взятой области применения (например, в горной промышленности). При этом необходимо, чтобы для разработки математических моделей объектов функциональных задач использовались методы, наиболее полно и точно учитывающие их структуру и поведение. В противном случае применение предлагаемого каркасного метода не приведет к желаемому результату – разработке АС, способной эффективно выполнять свои основные функциональные задачи.

После построения и исследования математических моделей, являющихся основой решения функциональных задач в отдельно взятой области применения, осуществляется следующая стадия – разработка каркаса математического обеспечения АС. При этом, под каркасом математического обеспечения (МО) АС будем понимать совокупность математических моделей универсального типа, и построенных на их основе алгоритмов, определяющих методы решения основных функциональных задач в различных АС, отличающихся как по типу, так и по области применения. Построение такого каркаса осуществляется в несколько действий. Сначала для каждого объекта из совокупности основных функциональных задач в отдельно взятой области применения устанавливаются аналоги, обладающие определенным сходством (или подобием) с рассматриваемым объектом в части структуры и (или) поведения. Далее, осуществляется модификация полученных на предыдущей стадии математических моделей, с целью их адекватного использования не только для моделируемых объектов функциональных задач, но и для их аналогов. И в завершение – на основе полученных таким способом математических моделей универсального типа производится построение алгоритмов, позволяющих решать основные функциональные задачи в нескольких областях автоматизации.

После построения алгоритмов решения основных функциональных задач, осуществляется переход ко второй стадии проектирования – разработке каркаса информационного обеспечения (ИО) АС. На данной стадии осуществляется проектирование и реализация баз данных, необходимых для решения

функциональных задач во многих АС, отличающихся как по типу, так и по области применения. При этом деятельность по проектированию баз данных состоит в определении их структуры посредством соответствующих семантических моделей, выражаемых с помощью одной из графических нотаций (ER-диаграммы, UML и др.); а деятельность по реализации баз данных – в переводе полученных семантических моделей на язык программирования той или иной СУБД.

По окончании разработки каркаса ИО АС выполняется проектирование архитектуры высокоуровневого каркаса ПО АС, осуществляемое на верхнем и детализированном уровнях. Проектирование архитектуры на верхнем уровне сводится к анализу функциональных задач, обеспечиваемых предлагаемым каркасом ПО АС. Результатом такого анализа является представление разрабатываемого программного фреймворка в виде совокупности пакетов классов, связанных между собой посредством соответствующих интерфейсов. При этом каждый полученный пакет классов несет в себе часть функциональности, предоставляемой каркасом ПО АС. Получив архитектуру на верхнем уровне, ее необходимо детализировать, т.е. осуществить проектирование каждого пакета классов. Подобная детализация осуществляется в три действия. На первом из них, посредством анализа соответствующей пакету одной или несколько связанных между собой функциональных задач устанавливаются объекты реального мира, семантику которых охватывает детализируемая часть каркаса. Далее, во втором действии с помощью разработанного каркаса информационного обеспечения и априорных соображений осуществляется преобразование установленных объектов в классы, определяются их методы и свойства. При этом если детализируемый пакет отвечает за обеспечение решения основной функциональной задачи, то представленные классы должны также содержать методы и свойства, необходимые для осуществления алгоритмов, построенных в результате разработки каркаса математического обеспечения АС. Заключительное третье действие состоит в нахождении зависимостей между установленными классами и добавлении в полученную таким образом

архитектуру управляющих и других вспомогательных классов, отвечающих за решение вверенных пакету функциональных задач.

После получения детализированной архитектуры осуществляется переход к этапу, на котором последовательно выполняются стадии реализации и тестирования высокоуровневого каркаса ПО АС. В результате данных стадий осуществляется проверка полученных результатов, а именно соответствует ли полученный высокоуровневый каркас ПО АС ранее сформулированным требованиям. Если такого соответствия не обнаружено, то стадии, представленные в левой части потока управления (рисунок 1) выполняются еще раз. При этом некоторые из промежуточных стадий могут быть пропущены. Итак, повторяется до тех пор, пока не будет получен высокоуровневый каркас ПО АС, удовлетворяющий требованиям разработчика.

В итоге, когда высокоуровневый программный фреймворк будет получен, осуществляется переход к выполнению стадий, представленных в правой части потока управления. Первой из данных стадий является – формулирование концепции АС. На этой стадии определяются цели разрабатываемой системы, приводится ее описание, включающее информацию о каркасном взаимодействии и характеристиках ТО АС. Далее, согласно второй стадии анализа требований, для функциональных задач разрабатываемой АС, включая те, что не покрываются сервисами разработанного программного фреймворка, производится построение и сценарное описание диаграммы вариантов использования. При этом описание вариантов использования осуществляется в контексте взаимодействия сущностей системы (подсистем, программных объектов и др.) с разработанным ранее высокоуровневым каркасом ПО. После этого осуществляется переход к этапу проектирования.

При построении АС в подавляющем большинстве случаев в состав диаграммы и сценариев вариантов использования, наряду с описанными ранее, включают и дополнительные функциональные задачи (т.е. задачи, не входящие в сервисы программного фреймворка). Для таких задач необходимо разработать отдельные проектные решения. Именно поэтому после составления диаграммы и

сценариев вариантов использования в состав предлагаемого метода включены стадии «Математическое моделирование и алгоритмизация дополнительных основных функциональных задач» и «Разработка AI-решений дополнительных основных функциональных задач», по своему смысловому содержанию относящиеся к этапу проектирования. При этом первая из них предназначена для решения задач, поддающихся полной математической формализации. А вторая – служит для разработки решений в сфере искусственного интеллекта (систем машинного обучения, экспертных систем, нейросетевых моделей и др.), используемых для автоматизации дополнительных основных функциональных задач, не поддающихся полной алгоритмической формализации. Также необходимо отметить, что в некоторых проектах по разработке АС одна из данных стадий может отсутствовать.

Завершающая стадия этапа проектирования заключается в разработке проекта архитектуры ПО АС. Данная разработка во многом совпадает с одной из описанных выше стадий проектирования высокоуровневого каркаса ПО, поскольку подразумевает создание архитектуры на верхнем уровне и ее последующую детализацию. Однако есть и существенные отличия. Так, при проектировании на верхнем уровне используется декомпозиция архитектуры на подсистемы, а не на пакеты классов как при разработке высокоуровневого каркаса ПО. Кроме того, детализация полученной архитектуры осуществляется посредством добавления новых классов в некоторый остов, представляющий собой совокупность классов, получаемых путем наследования и (или) агрегирования от элементов архитектуры высокоуровневого каркаса программного обеспечения.

После получения детализированной архитектуры ПО АС, осуществляется переход к следующему этапу – реализации и тестирования. Согласно представленной диаграмме сначала производится написание программного кода детализированной архитектуры ПО АС на одном из объектно-ориентированных языков программирования, т.е. выполняется стадия реализации ПО. Получив программный код, в рамках рассматриваемого метода осуществляется стадия

специфицирования ТО АС. На данной стадии с учетом оценки потребностей каждой подсистемы в вычислительных ресурсах осуществляется проектирование и последующая реализация аппаратной архитектуры разрабатываемой АС, определяющей не только виды и количество используемых аппаратных устройств, но и физические интерфейсы между ними.

Завершающей стадией рассматриваемого этапа является тестирование полученной АС как совокупности программно-технических средств. По результатам тестирования выносится заключение о соответствии разрабатываемой АС требованиям пользователя. Если такое соответствие реализуется, то процесс разработки АС в рамках предлагаемого метода завершается. В противном случае осуществляется переход к стадии «Формирование концепции АС», и выше сформулированные действия, представленные в правой части потока управления, повторяются еще раз (рисунок 1). И так повторяется до тех пор, пока полученная АС не удовлетворит сформулированным требованиям.

С помощью предложенного каркасного метода приступим к разработке высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП, т.е. к выполнению стадий из левой части потока управления, изображенного на диаграмме (рисунок 1). А потом на основе полученного фреймворка разработаем отдельные экземпляры систем – АСНИ физических процессов горного производства и АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов. При этом для каждой стадии представим заключительные результаты, т.е. результаты последних итераций стадий из левого и правого потоков управления.

## **2.1. Формулирование концепции высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП**

В соответствии с предложенным методом разработки сформулируем цели, общее описание и требования к программным и аппаратным интерфейсам разрабатываемого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП.

Высокоуровневый каркас ПО разрабатывается с целью получения взаимосвязанной совокупности пакетов классов, детализация которой с помощью механизмов наследования, агрегирования и добавления классов позволяет спроектировать и реализовать программное обеспечение АСНИ, АСУ ТП и других систем. Отличительной особенностью данного каркаса является то, что он предназначен для автоматизации основных и административных функциональных задач. К основным функциональным задачам относятся: определение деформационных, тепло- и электропроводных свойств объектов мультифрактальной структуры с учетом масштабного эффекта; установление значений внешнего поля напряжений, действующего на различные объекты мультифрактальной структуры с учетом масштабного эффекта. В свою очередь, к административным функциональным задачам можно отнести: анализ данных; учет материалов и ресурсов; планирование задач и событий; создание отчетов; аутентификация пользователей; резервное копирование и восстановление данных.

Использование предлагаемого высокоуровневого каркаса ПО должно позволить сократить сроки разработки и строить одновременно гибкие и расширяемые АСНИ и АСУ ТП в различных областях, в том числе горной промышленности, добыче нефти и газа, строительстве и материаловедении.

Разрабатываемый программный фреймворк должен быть кроссплатформенным и реализован на языке C++. Взаимодействие фреймворка с «точками расширения» зависит от их типа. Так для точек расширения в виде объектов, взаимодействие реализуется стандартными средствами языка C++, в случае подсистем – посредством предоставляемого API (application programming interface – интерфейс прикладного программирования).

В части аппаратных интерфейсов предлагаемый программный фреймворк должен взаимодействовать с внешними подсистемами посредством локальной и (или) глобальной вычислительных сетей. Портирование каркаса на ту или иную платформу зависит от типа разрабатываемой АС, при этом основной упор делается на платформу РС.

## 2.2. Формулирование требований к функциональным задачам высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП

В этом разделе определяется общая функциональность разрабатываемого высокоуровневого программного фреймворка. Воспользовавшись языком UML получим диаграмму вариантов использования, представленную на рисунке 2.

Как следует из представленной диаграммы каждому варианту использования сопоставляется функциональная задача. При этом в качестве действующих лиц в данной диаграмме используется стереотип «точка расширения», под которым понимается любой программный объект, подсистема и другая внешняя сущность, не входящая в состав каркаса, но инициирующая выполнение его сервисов.

Сценарии представленных вариантов использования можно представить в следующем виде.

*Вариант использования* «Определение физических свойств объектов мультифрактальной структуры, чувствительных к масштабному эффекту».

*Действующее лицо:* Отсутствует.

*Краткое описание.*

Данный вариант описывает общую последовательность решения функциональных задач определения чувствительных к масштабному эффекту физических свойств объектов мультифрактальной структуры.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования является абстрактным и непосредственно не выполняется. Осуществление любого из его вариантов-потомков начинается с момента, когда одной из точек расширения (с определенным номером) потребовалось определить параметры чувствительных к масштабному эффекту физических свойств некоторого объекта мультифрактальной структуры.

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения с номером N на решение функциональной задачи определения физического свойства объекта мультифрактальной структуры, чувствительного к масштабному эффекту. Запрос

содержит в себе информацию: о типе объекта мультифрактальной структуры и другие необходимые данные о его строении и свойствах.

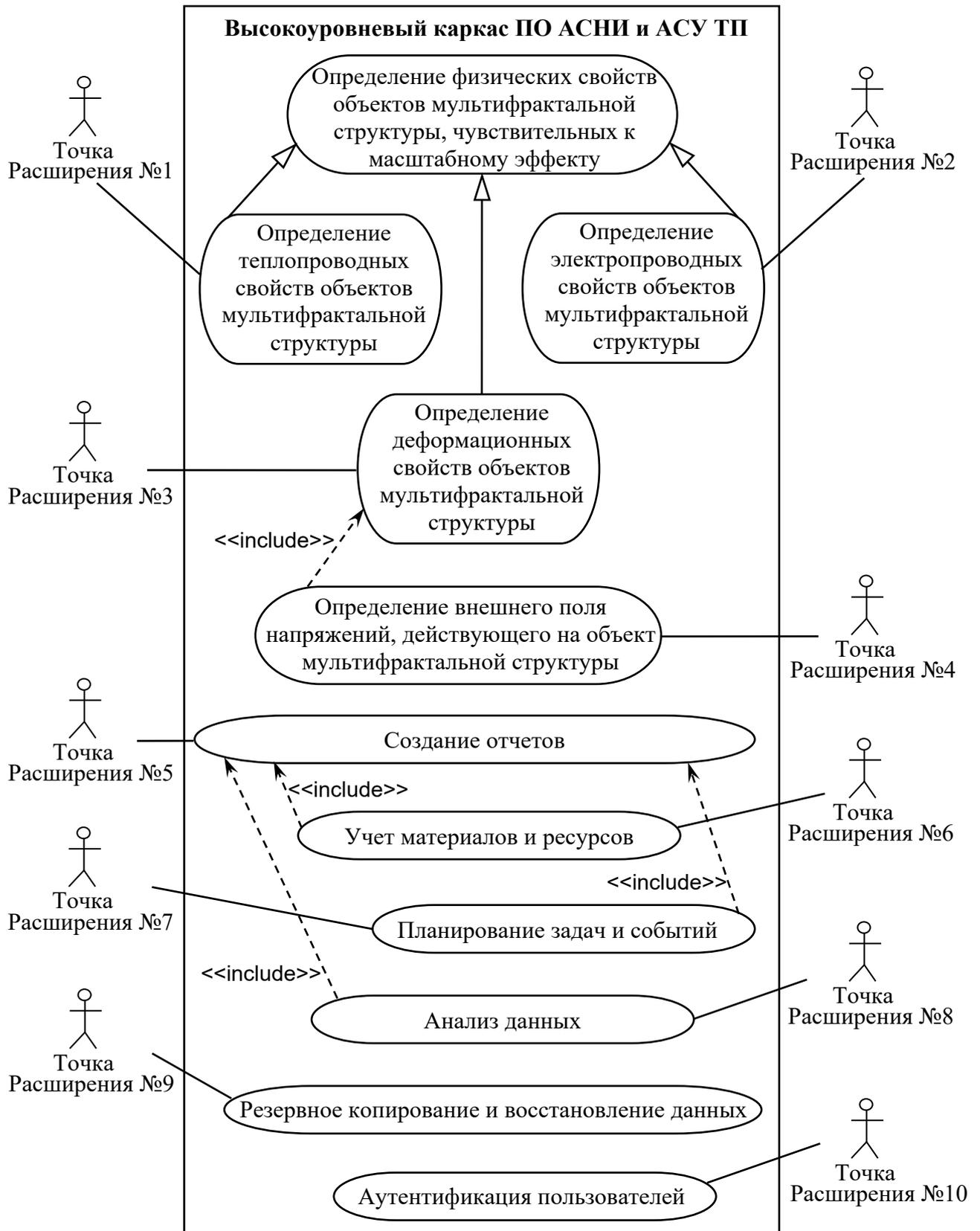


Рисунок 2 – Диаграмма вариантов использования высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП

2. Программный фреймворк посредством запроса к соответствующей базе данных получает в тензорной форме значение параметров соответствующего физического свойства для структурных элементов, составляющих рассматриваемый объект мультифрактальной структуры.

3. В соответствии с запросом от точки расширения с номером  $N$  и полученными значениями параметров из базы данных программный фреймворк (с помощью соответствующей математической модели) осуществляет расчет значений эффективных тензорных характеристик, определяющих физическое свойство объекта мультифрактальной структуры.

4. Программный фреймворк возвращает точке расширения с номером  $N$  величины установленных значений эффективных тензорных характеристик.

#### *Альтернативные потоки.*

A.1. Неполный список данных в запросе на определение параметров деформационных свойств.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о типе объекта мультифрактальной структуры или о других необходимых данных о строении и свойствах объекта, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

A.2.1. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может подключиться к базе данных, содержащей необходимые значения параметров структурных элементов рассматриваемого объекта, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

A.2.2. В базе данных отсутствуют значения параметров физических свойств структурных элементов.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в базе данных отсутствует информация о значениях параметров физических свойств структурных элементов рассматриваемого объекта, то вывести сообщение об

ошибке во входных данных. После осуществления данного действия выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Варианты использования* «Определение деформационных свойств объектов мультифрактальной структуры», «Определение теплопроводных свойств объектов мультифрактальной структуры» и «Определение электропроводных свойств объектов мультифрактальной структуры» являются вариацией базового прецедента «Определение физических свойств объектов мультифрактальной структуры, чувствительных к масштабному эффекту». В каждом из этих вариантов специфицируется: точка расширения (определяемой ее номером), параметры деформационных свойств структурных элементов и объектов в целом.

*Вариант использования* «Определение внешнего поля напряжений, действующего на объект мультифрактальной структуры»

*Действующее лицо:* Точка расширения №4.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования предназначен для решения функциональной задачи определения внешнего поля напряжений, действующего на объект мультифрактальной структуры.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда Точке расширения №4 потребовалось определить значение тензора напряжений, определяющего действие внешней нагрузки на объект мультифрактальной структуры в целом.

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения №4 на решение функциональной задачи определения внешнего поля напряжений, действующего

на объект мультифрактальной структуры. Запрос содержит в себе информацию: о типе объекта мультифрактальной структуры и его структурно-текстурных составляющих.

2. Для каждого типа объекта и его структурно-текстурных составляющих выполняется вариант использования «Определение деформационных свойств объектов мультифрактальной структуры».

3. В соответствии с запросом от точки расширения №4 и полученными значениями эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей программный фреймворк (с помощью соответствующей математической модели) осуществляет расчет значения внешнего поля напряжений, действующего на объект мультифрактальной структуры.

4. Программный фреймворк возвращает точке расширения №4 величину установленного значения внешнего поля напряжений.

#### *Альтернативные потоки.*

A.1. Неполный список данных в запросе на определение внешнего поля напряжений, действующего на объект мультифрактальной структуры.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о типе объекта мультифрактальной структуры и его структурно-текстурных составляющих, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

#### *Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

#### *Постусловия.*

Отсутствуют.

#### *Вариант использования «Создание отчетов».*

Действующее лицо: Точка расширения №5

#### *Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет сформировать отчет по той или иной административной функциональной задаче.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда точке расширения №5 потребовалось создать отчет об административной функциональной задаче, а также как часть вариантов использования «Учет материалов и ресурсов» и «Планирование задач и событий».

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения №5 на решение функциональной задачи создания отчета. Запрос содержит в себе информацию: о наименовании административной функциональной задачи и спецификаторе, определяющего данные, включаемые в отчет.
2. Программный фреймворк посредством запроса к соответствующей базе данных получает информацию о функциональной задаче.
3. В соответствии с запросом от точки расширения №5, полученными записями из базы данных и гипертекстовым шаблоном программный фреймворк создает отчет об административной функциональной задаче.

*Альтернативные потоки.*

A.1. Неполный список данных в запросе на создание отчета.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о наименовании административной функциональной задачи или спецификаторе, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

A.2. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может подключиться к базе данных, содержащей информацию об административной функциональной задаче, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Вариант использования «Учет материалов и ресурсов».*

Действующее лицо: Точка расширения №6

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет проводить учет материалов и ресурсов.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинается выполняться, когда точке расширения №6 потребовалось добавить, редактировать, удалить или просмотреть данные о материалах и ресурсах.

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения №6 на решение функциональной задачи учета материалов и ресурсов. Запрос содержит в себе информацию о типе сущности (материал или ресурс), структурной записи о сущности (наименование, размер, место хранения) и виде обработки данных (добавление, редактирование, удаление или просмотр).
2. Программный фреймворк подключается к соответствующей базе данных, содержащей информацию о материалах или ресурсах.
3. Если в запросе от точки расширения №6, в качестве вида обработки данных указано добавление (или редактирование, или удаление), то переданная структурная запись о сущности добавляется (или редактируется, или удаляется) из подключенной базы данных.
4. Если в запросе от точки расширения №6, в качестве вида обработки данных указано просмотр, то все записи относительно выбранного типа сущности (материал или ресурс) извлекаются из подключенной базы данных и в структурированном виде возвращаются к точке расширения №6.
5. Выполнить вариант использования «Создание отчетов».

*Альтернативные потоки.*

А.1. Неполный список данных в запросе на решение функциональной задачи учета материалов и ресурсов.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о типе сущности или структурной записи о сущности или виде обработки данных, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

А.2. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может подключиться к базе данных, содержащей информацию о материалах или ресурсах, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Вариант использования «Планирование задач и событий».*

Действующее лицо: Точка расширения №7

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет осуществлять планирование задач и событий.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинается выполняться, когда точке расширения №7 потребовалось спланировать некоторую задачу или событие.

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения №7 на решение функциональной задачи планирование задач и событий. Запрос содержит в себе информацию о типе сущности (задача или событие), структурной записи о сущности (описание, дата, время) и виде обработки данных (добавление,

редактирование, удаление или просмотр).

2. Программный фреймворк подключается к соответствующей базе данных, содержащей информацию о планируемых задачах или событиях.

3. Если в запросе от точки расширения №7, в качестве вида обработки данных указано добавление (или редактирование, или удаление), то переданная структурная запись о сущности добавляется (или редактируется, или удаляется) из подключенной базы данных.

4. Если в запросе от точки расширения №7, в качестве вида обработки данных указано просмотр, то все записи относительно выбранного типа сущности (задача или событие) извлекаются из подключенной базы данных и в структурированном виде возвращаются к точке расширения №7.

5. Выполнить вариант использования «Создание отчетов».

*Альтернативные потоки.*

A.1. Неполный список данных в запросе на решение функциональной задачи планировании задач и событий.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о типе сущности или структурной записи о сущности или виде обработки данных, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

A.2. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может подключиться к базе данных, содержащей информацию о планируемых задачах и событиях, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Вариант использования «Анализ данных».*

Действующее лицо: Точка расширения №8.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет осуществлять анализ данных, заключающийся в определении параметров физических свойств объектов мультифрактальной структуры.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда точке расширения №8 потребовалось определить параметры физических свойств объектов мультифрактальной структуры.

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения №8 на решение функциональной задачи анализа данных. Запрос содержит в себе информацию о наименовании физического параметра объекта мультифрактальной структуры и его спецификаторе, определяющего чувствительность к масштабному эффекту.
2. Если в запросе от точки расширения №8, в качестве спецификатора указано, что определяемый параметр физических свойств не чувствителен к масштабному эффекту.
  - 2.1. Программный фреймворк запрашивает от точки расширения №8 значения параметра физического свойства для каждого макрообразца из представительной выборки.
  - 2.2. Программный фреймворк получает запрашиваемую совокупность значений.
  - 2.3. Посредством вычисления среднего программный фреймворк устанавливает значение определяемого параметра.
3. Если в запросе от точки расширения №8, в качестве спецификатора указано, что определяемый параметр физических свойств чувствителен к масштабному эффекту.
  - 3.1. Программный фреймворк запрашивает от точки расширения №8 значения параметра физического свойства, определенного для макрообразцов различного

объема.

3.2. Программный фреймворк получает запрашиваемую совокупность значений.

3.3. В соответствии с величиной предполагаемого представительного объема рассматриваемого объекта мультифрактальной структуры программный фреймворк вычисляет прогнозное значение устанавливаемого параметра.

*Альтернативные потоки.*

A.1. Неполный список данных в запросе на решение функциональной задачи анализа данных.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о наименовании физического параметра объекта мультифрактальной структуры и его спецификаторе, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Вариант использования «Резервное копирование и восстановление данных».*

Действующее лицо: Точка расширения №9.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет осуществлять резервное копирование и восстановление данных, необходимых для функционирования программного фреймворка.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинается выполняться, когда точке расширения №9 потребовалось осуществить резервное копирование или восстановление данных.

1. Программный фреймворк получает запрос от точки расширения №9 на решение

функциональной задачи резервное копирования и восстановления данных. Запрос содержит в себе информацию о типе осуществляемого действия (резервное копирование или восстановление данных) и пути к каталогу, в который будет сделана резервная копия (или из которого будет осуществлено восстановление данных).

2. Если в запросе от точки расширения №9, в качестве типа осуществляемого действия указано резервное копирование, то файлы баз данных, используемые при решении административных функциональных задач, копируются в заданный каталог (путь к которому указывается в запросе от точки расширения).

3. Если в запросе от точки расширения №9, в качестве типа осуществляемого действия указано восстановление данных, то файлы баз данных из заданного каталога (путь к которому указывается в запросе от точки расширения) копируются в папку с расположением баз данных программного фреймворка.

#### *Альтернативные потоки.*

A.1. Неполный список данных в запросе на решение функциональной задачи резервного копирования и восстановления данных.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что в передаваемом запросе отсутствует информация о типе осуществляемого действия и пути к каталогу, то программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

A.2.1. Файлы баз данных недоступны для резервного копирования

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может обнаружить хотя бы один из файлов баз данных, используемых при решении функциональных задач, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

A.2.2. Недействительный путь каталога для резервного копирования

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что путь, определяющий адрес каталога для резервного копирования, оказывается недействительным, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После

вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

#### А.3.1. Файлы баз данных недоступны для восстановления

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может обнаружить резервные копии файлов баз данных в заданном каталоге, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

#### А.2.2. Недействительный путь каталога для восстановления

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что путь, определяющий адрес каталога для восстановления, оказывается недействительным, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

#### *Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

#### *Постусловия.*

Отсутствуют.

#### *Вариант использования «Аутентификация пользователя»*

*Действующее лицо:* Точка расширения №10.

#### *Краткое описание.*

Данный вариант использования ограничивает доступ к сервисам, предоставляемым программным фреймворком.

#### *Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда Точке расширения №10 потребовалось получить доступ к сервисам, предоставляемым программным фреймворком.

1. Программный фреймворк запрашивает у точки расширения №10 – имя пользователя и пароль.
2. Точка расширения №10 передает программному фреймворку – имя и пароль.
3. Посредством сравнения введенных имени пользователя и пароля с

соответствующими записями из базы данных программный фреймворк аутентифицирует пользователя, после чего точкам расширения открывается доступ к требуемым сервисам.

*Альтернативные потоки.*

А.3.1. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что программный фреймворк не может подключиться к базе данных, содержащей учетные записи пользователей, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения управление передается точке расширения №1, при этом выполнение варианта использования завершается.

А.3.2. Неправильное имя/пароль.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что пользователь ввел неправильное имя и/или пароль (учетная запись в базе данных не обнаружена), программный фреймворк выводит сообщение об ошибке. После этого основной поток исполняется сначала (но не более трех раз) или вариант использования завершается.

*Предусловия.*

Отсутствуют.

*Постусловия.*

Отсутствуют.

### **2.3. Мультифрактальное математическое моделирование функциональной задачи определения деформационных свойств геоматериалов**

Перейдем к этапу проектирования программного фреймворка. Данный этап начинается с выполнения стадии математического моделирования основных функциональных задач в отдельно взятой области применения (в нашем случае – в горной промышленности).

Как указывалось ранее, вследствие неудовлетворительного учета мультифрактальной структуры геоматериалов, применение существующих

методов математического моделирования не позволяет с нужной для науки и практики точностью определять деформационные, тепловые и электрические свойства исследуемых объектов, а также внешнее поле напряжений, действующее на породный массив. Поэтому для построения моделей геоматериалов предложим новый метод мультифрактального математического моделирования. Он заключается в построении для объекта функциональной задачи мультифрактальной модели, представляющей собой совокупность связанных между собой математических моделей фрактальных сред. При этом каждая из данных сред описывает фракталы, входящие в состав моделируемого объекта функциональной задачи.

Итак, произведем математическое моделирование первой основной функциональной задачи АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности, заключающейся в определении деформационных свойств геоматериалов. При этом в качестве объекта функциональной задачи будет выступать геоматериал.

### **2.3.1. Мультикомпонентная математическая модель минерала относительно деформационных свойств**

Поскольку деформационные свойства зерна (являющегося наименьшим структурным элементом любого геоматериала) не зависят от объема и их можно однозначно определить посредством эксперимента, то разработку математических моделей следует начать с минерала.

Деформационные свойства любого минерала полностью определяются тем, как его структурные элементы – зерна, реагируют на деформацию. В зависимости от такой реакции для зерна можно выделить два состояния: упругое и пластическое [13, 55].

В упругом состоянии зерно, получившее деформацию, после устранения причин, вызвавших ее, полностью восстановит свою первоначальную форму. В пластическом состоянии, при снятии нагрузки с зерна наблюдается остаточная деформация, т.е. форма зерна не восстанавливается.

Изначально любое зерно минерала находится в упругом состоянии. При увеличении внешней нагрузки на зерно в его структуре, начиная с некоторой величины напряжения, происходит необратимое движение дислокаций. При этом в кристаллической решетке этого зерна происходит разрыв связей между атомами, которые до деформации были соседями, и образуются новые связи, такие же устойчивые, как и первоначальные [58]. Возникновение таких связей приводит к тому, что форма зерна изменяется и при снятии нагрузки не восстанавливается. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что зерно минерала при увеличении внешней нагрузки из упругого состояния переходит в пластическое. Однако такой переход не может быть одновременным для всех зерен минерала, вследствие чего для минерала в зависимости от реакции на деформацию следует выделить два состояния: упругое и упругопластическое. Третье – пластическое состояние, при котором в минерале все зерна находятся в пластическом состоянии, на практике не осуществимо, поскольку до его наступления наблюдается разрушение минерала.

Экспериментально установлено, что у одних геоматериалов в упругопластическом состоянии при увеличении внешней нагрузки наблюдается их упрочнение. Такой эффект называется эффектом упрочнения, который объясняется сплетением дислокаций. У другой части геоматериалов в упругопластическом состоянии при малом увеличении внешней нагрузки происходят значительные пластические деформации, т.е. наблюдается близкое к идеально-пластическому течение геоматериала. При этом, когда наблюдается эффект упрочнения, исключается идеально-пластическое течение геоматериала.

Итак, на основе проведенных рассуждений можно привести следующую полную диаграмму напряжение-деформация для минералов (рисунок 3).

Таким образом, можно выделить следующие состояния минерала при их деформировании: упругое (от точки 0 до точки "А"), упругопластическое с упрочнением (от "А" в сторону увеличения напряжения) и близкое к идеально-пластическому.

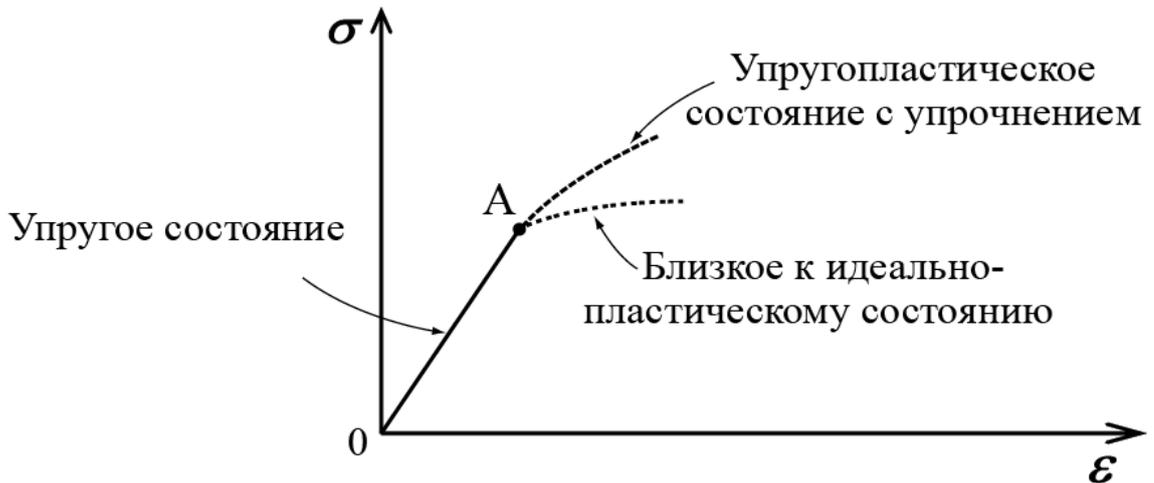


Рисунок 3 – Диаграмма напряжение-деформация для минералов

Точка "А" соответствует пределу упругости минерала и является точкой бифуркации, указывающей на такие значения напряжений и деформации, при которых происходит качественное изменение состояния минерала. Именно в этой точке происходит переход минерала либо в близкое к идеально-пластическому, либо в упругопластическое состояние с упрочнением.

В связи с этим разрабатываемая математическая модель должна соответствующим способом определять деформационные свойства минерала для каждого его состояния.

Попытка разработать модель, одновременно определяющую деформационные свойства минерала во всех перечисленных выше состояниях, сделает ее чрезмерно сложной. Поэтому применим мультикомпонентный подход, заключающийся в разработке составной математической модели, представляющей собой набор взаимодействующих друг с другом моделей, согласованных по функциям и форматам данных, предназначенных для решения определенных задач. Каждую модель из этого набора будем называть компонентной. Тогда согласно мультикомпонентному подходу каждое состояние минерала будет описываться соответствующей компонентной математической моделью, определяющей деформационные свойства.

Разработаем первую компонентную математическую модель, позволяющую определить деформационные свойства минерала в упругом состоянии. Для этого,

построим содержательную модель минерала в упругом состоянии. Согласно принципу разработки математических моделей, изложенному в [62], этап построения содержательной модели заключается в уточнении структуры изучаемого объекта, существенных для проводимого исследования свойств его составляющих и характера их взаимодействия.

Применяя данный принцип к решению поставленной задачи, имеем. Минерал представляет собой объект, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу зерен. Эти зерна случайно ориентированы в пространстве, находятся в упругом состоянии, являются анизотропными и взаимодействуют между собой через упругое поле. При этом возникающие силовые характеристики обусловлены полем напряжений, или полем деформаций, связанного с ним посредством закона Гука. Исследуемый минерал относится к мультифракталам. Аппроксимируем каждое зерно минерала эллипсоидом.

Перейдем ко второму этапу – построению математической модели. На основе содержательной модели минерала мы получим трехмерную неограниченную сплошную среду со случайно-ориентированными в пространстве эллипсоидальными неоднородностями, которые соответствуют зернам. Поскольку данные неоднородности являются анизотропными, то их упругие характеристики являются тензорными величинами. В результате мы имеем неограниченную анизотропную упругую сплошную среду с неоднородностями в эллипсоидальных областях  $V$ .

Обозначим через  $\overset{(m)}{C}$  тензор модулей упругости эллипсоида. Здесь и далее, как указывалось ранее, буквенно-числовое сочетание, заключенное в скобки над тензорной величиной, является пометой, а не индексом, и указывает на семантическое значение данной величины. Каждый эллипсоид в зависимости от ориентации в пространстве будет принимать свое значение. Следовательно, тензор  $\overset{(m)}{C}$  является случайной величиной. Рассмотрим сплошную среду, упругие свойства которой характеризуются тензором модуля упругости, равного усредненным значениям  $\langle \overset{(m)}{C} \rangle$ . Назовем данную среду матрицей.

Поместим в эту матрицу эллипсоидальные неоднородности и тем самым получим модель сплошной среды для рассматриваемого минерала, которую назовем сплошной средой со структурой. В результате имеем матрицу с упругими свойствами  $\langle \overset{(m)}{C} \rangle$ , в которой находятся эллипсоидальные неоднородности, модуль упругости которых отличается на величину  $\overset{(m)}{C} - \langle \overset{(m)}{C} \rangle$ , равного  $\overset{(1m)}{C}$ . Тогда полученную среду с неоднородностями будем характеризовать тензором модулей упругости равного  $\overset{(m)}{C}(\mathbf{x}) = \langle \overset{(m)}{C} \rangle + \overset{(1m)}{C} V(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $V(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.

$$V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$$

(поскольку неоднородности вплотную прилегают друг к другу, то  $V(\mathbf{x})$  не принимает нулевых значений);  $\overset{(1m)}{C}$  – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате  $\overset{(m)}{C}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор  $\overset{(0m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(1m)}{C} = 0$  в матрице при заданных внешних силах. А через тензор  $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Отсюда следует, что классический анализ, имеющий дело с функциями точки, не вполне адекватен при описании рассматриваемого упругого поля, в котором рассматриваются обычно величины, усредненные по некоторой области. Более адекватный аппарат дается теорией обобщенных функций [5, 20]. Таким образом, следует что уравнения, к которым сводится разрабатываемая математическая модель, должны быть сформулированы в рамках данного утверждения. Итак, рассматриваемая среда описывается следующими системами

уравнений, записанными в смещениях в символическом виде:

1) уравнения равновесия:

$$\overset{(m)}{L} \overset{(m)}{u} = -\overset{(m)}{f}, \quad (2.1)$$

где  $\overset{(m)}{L} = -\nabla \overset{(m)}{C} \nabla$  ( $\nabla$  – вектор-оператор дифференцирования),  $\overset{(m)}{u}$  – смещение,  $\overset{(m)}{f}$  – внешние силы;

2) кинематические уравнения:

$$\overset{(m)}{\varepsilon} = \text{def} \overset{(m)}{u}, \quad (2.2)$$

где оператор  $\text{def}$  соответствует симметризованному градиенту;

3) определяющие уравнения:

$$\overset{(m)}{\sigma} = \overset{(m)}{C} : \overset{(m)}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \overset{(m)}{\varepsilon} = \overset{(m)}{C}' : \overset{(m)}{\sigma}, \quad (2.3)$$

$$\text{rot} \overset{(m)}{\varepsilon} = 0, \quad (2.4)$$

$$\langle \overset{(m)}{\sigma} \rangle = \overset{(efm)}{C} \langle \overset{(m)}{\varepsilon} \rangle, \quad (2.5)$$

где символ  $(:)$  означает операцию свертки по двум индексам, которые предполагают суммирование по ним;  $\overset{(m)}{C}' = \left( \overset{(m)}{C} \right)^{-1}$ .

Данные системы в компонентах будут иметь следующий вид в произвольной аффинной системе координат:

1) уравнения равновесия:

$$\partial_j \left[ \overset{(m)}{C}^{ijkl}(x) \partial_k \overset{(m)}{u}_l(x) \right] = -f^i(x), \quad \overset{(m)}{u}_l(x) \rightarrow \overset{(0m)}{u}_l(x) \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

где  $\partial_{(k} \overset{(m)}{u}_{l)}(x) = \overset{(0m)}{\varepsilon}_{kl}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overset{(m)}{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \overset{(m)}{u}_l}{\partial x_k} \right)$ ,  $f^i(x)$  – внешние силы, которые в силу

непрерывности  $\overset{(0m)}{\varepsilon}_{kl}(x)$  не содержат сингулярностей типа простого и двойного слоев;

2) кинематические уравнения:

$$\varepsilon_{ij}^{(m)}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_i} \right); \quad (2.7)$$

3) определяющие уравнения:

$$\sigma_{ij}^{(m)} = C^{ijkl(m)} \varepsilon_{kl}^{(m)} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij}^{(m)} = C'^{ijkl(m)} \sigma_{kl}^{(m)},$$

$$rot_{ijkl}^{(m)} \varepsilon_{kl}^{(m)}(x) = 0, \quad (2.8)$$

$$\langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle = C^{(efm)ijkl(m)} \langle \varepsilon_{kl}^{(m)} \rangle,$$

где  $C'^{ijkl(m)} = \left( C^{ijkl(m)} \right)^{-1}$ .

Все приведенные выше уравнения понимаются в смысле обобщенных функций. Кроме того, данные системы уравнений эквивалентны между собой и в дальнейшем по мере необходимости будем обращаться к тому или иному виду этих уравнений.

Обратимся к уравнениям (2.6). Отсутствие простых слоев является причиной непрерывности нормальной составляющей напряжений  $\sigma_{ij}^{(m)}(x) = C^{ijkl(m)}(x) \varepsilon_{kl}^{(m)}(x)$  на границе  $S$  области  $V$ . Поскольку уравнения записаны в аффинной инвариантной форме, то без ограничения общности можно считать, что  $S$  – единичная сфера, т.е.  $x_i \cdot x^i = 1$ .

В символическом виде уравнение (2.1) для сплошной среды со структурой может быть записано в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} \equiv (\mathbf{L}^{(0m)} + \mathbf{L}^{(1m)}) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{L}^{(0m)} = -\nabla \langle \mathbf{C} \rangle \nabla$ ,  $\mathbf{L}^{(1m)} = -\nabla \mathbf{C} \nabla$ . Причем операторы  $\mathbf{L}^{(0m)}$  и  $\mathbf{L}^{(1m)}$  учитывают граничные условия при  $x \rightarrow \infty$ , и для них существуют обратные операторы

$$\left( \mathbf{L}^{(1m)} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad \left( \mathbf{L}^{(0m)} \right)^{-1} \equiv \mathbf{G}^{(0m)}, \quad \text{где} \quad \mathbf{G}^{(0m)} \quad \text{– тензорная функция Грина матрицы.}$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.9) оператор  $def \mathbf{G}^{(0m)}$  (оператор  $def$

соответствует симметризованному градиенту), а также используя работу [53] в рамках метода аналогии, получим следующее интегральное уравнение:

$$\varepsilon^{(1m)} + \mathbf{K}^{(0m)} \mathbf{C}^{(1m)} V \varepsilon^{(1m)} = - \mathbf{K}^{(0m)} \mathbf{C}^{(1m)} V \varepsilon^{(0m)}, \quad (2.10)$$

или в компонентах

$$\varepsilon_{ij}^{(1m)} + \int_V K_{ijkl}^{(0m)}(x-x') C^{klmn(1m)} \varepsilon_{mn}^{(1m)}(x') dx' = - \int_V K_{ijkl}^{(0m)}(x-x') C^{klmn(1m)} \varepsilon_{mn}^{(0m)}(x') dx', \quad (2.11)$$

где оператор  $\mathbf{K}^{(0m)}$  имеет ядро

$$K_{ijkl}^{(0m)}(x-x') = -[\partial_i \partial_l G_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}. \quad (2.12)$$

Согласно рассматриваемой задаче, а также используя работу [53] в рамках метода аналогии, получим решение уравнения (2.11) для поля деформаций внутри изолированного включения  $\varepsilon^{(im)}$  в области  $V$ , наведенного постоянным внешним полем деформаций  $\varepsilon^{(0m)}$ :

$$\varepsilon^{(im)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \varepsilon^{(0m)}, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  $\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{K}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{A}$  – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства;  $\mathbf{K}(k)$  – преобразование Фурье-ядра  $K_{ijkl}^{(0m)}(x-x')$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле деформаций внутри включения традиционно используется метод самосогласованного поля. Как следует из работ [40-42, 95], этот метод дает адекватные результаты в случае, когда отношение модуля упругости  $E^{осн}$  изотропной среды к модулю упругости  $E^{неод}$  изотропных включений лежит в пределах  $0,1 \leq \frac{E^{осн}}{E^{неод}} \leq 10$ . Применительно к рассматриваемой задаче метод самосогласованного поля формулируется следующим образом: 1) каждое из

включений любой конкретной реализации случайного поля неоднородностей рассматривается как изолированное эллипсоидальное включение в основной среде; 2) поле деформаций, в котором находится каждое из включений, складывается из внешнего поля и поля, наведенного окружающими неоднородностями. Это поле предполагается одинаковым для всех включений; 3) необходимо задаться той или иной аппроксимацией эквивалентного поля. Оно считается постоянным. Это справедливо, когда в пределах объема, занятого типичным включением, суммарное поле от всех окружающих неоднородностей меняется незначительно.

Эти предположения пришлось вводить из-за невозможности использования методов классической механики. По этой же причине вводится процедура усреднения по ансамблю полей неоднородностей, которую следует выполнить при исследовании математической модели композиционных сред.

А отказ от механического описания ансамбля неоднородностей был вызван непомерно огромным числом участников в исследуемой системе. Настолько огромным, что состояние индивидуальной неоднородности почти не сказывается на состоянии системы в целом. Поэтому такая система является термодинамической, и в связи с этим для ее описания должны быть использованы термодинамические понятия. Но при этом система в целом является механической, и поэтому для ее описания используются макроскопические механические понятия, как в уравнениях, так и в ее решениях. И совсем не используются термодинамические понятия. При таком некорректном описании невозможно получить адекватную модель исследуемого минерала.

Данное противоречие может быть разрешено только одним методом, а именно: если не пренебрегать влиянием отдельной неоднородности на систему в целом. В связи с этим предлагается следующий усовершенствованный метод самосогласованного поля, который применительно к рассматриваемой задаче, может быть сформулирован следующим образом: 1) каждое из включений любой конкретной реализации случайного поля неоднородностей рассматривается как изолированное эллипсоидальное включение в матрице; 2) поле деформаций  $\epsilon$ , в

(Em)

котором находится каждое из включений, складывается из собственного поля  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)}$  как изолированной неоднородности, внешнего поля  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}$  и поля, наведенного окружающими неоднородностями  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Nm)}$ . Поскольку необходимо задаться некоторой аппроксимацией поля  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$ , то будем считать, что оно постоянно. Данный метод назовем комплексным методом самосогласованного поля.

Итак, собственное поле деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)}$  внутри любой неоднородности, которую считаем изолированным включением в среде с тензором модулей упругости равном усредненным значениям  $\langle \mathbf{C}^{(m)} \rangle$ , определяется следующим уравнением:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}. \quad (2.14)$$

Для поля деформаций внутри любой неоднородности, обусловленное внешним полем  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}$  и полем, наведенным другими неоднородностями  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Nm)}$ , имеем следующее уравнение:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(Km)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}, \quad (2.15)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(Nm)}$ .

В результате в рамках предложенного метода самосогласованного поля для поля деформаций внутри любого включения имеем:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(Km)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)} + \left( \mathbf{I} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}. \quad (2.16)$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}^{(m)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}, \quad (2.17)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$ .

Умножая правую и левую части уравнения на  $\mathbf{C}^{(m)}$  слева, в рамках

комплексного метода самосогласованного поля, для поля напряжений внутри любого включения имеем

$$\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}, \quad (2.18)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ .

Усредним (2.17) и (2.18) по ансамблю полей реализаций случайного поля неоднородностей:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \rangle = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} \right\rangle, \quad (2.19)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \rangle = \left\langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} \right\rangle. \quad (2.20)$$

Согласно теореме о среднем произведении [177, 162], (2.19) и (2.20) преобразуются к следующему виду:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \rangle = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} \rangle, \quad (2.21)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \rangle = \left\langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} \rangle. \quad (2.22)$$

Так как  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$  – постоянно, то  $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$ . Отсюда получим

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \rangle = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}, \quad (2.23)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \rangle = \left\langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}. \quad (2.24)$$

Разрешим уравнение (2.23) относительно величины  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \rangle. \quad (2.25)$$

Полученное выражение (2.25) подставим в (2.24):

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \rangle = \left\langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} \rangle. \quad (2.26)$$

Учитывая, что усредненный тензор напряжений  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)}$  связан с усредненным тензором деформаций  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(m)}$  выражениями:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)} = \mathbf{C}^{(efm)} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(m)} \text{ и } \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(m)} = \mathbf{C}'^{(efm)} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)}, \quad (2.27)$$

для эффективного тензора модуля упругости  $\mathbf{C}^{(efm)}$  получим:

$$\mathbf{C}^{(efm)} = \langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (2.28)$$

Для того чтобы найти эффективный тензор упругих податливостей, необходимо разрешить уравнение (2.24) относительно величины  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} = \langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)}. \quad (2.29)$$

Подставляя полученное выражение в (2.23), для усредненного поля деформаций получим:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(m)} = \langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(m)}. \quad (2.30)$$

Сравнивая последнее выражение со вторым выражением из (2.27), для эффективного тензора упругих податливостей окончательно имеем

$$\mathbf{C}'^{(efm)} = \langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \mathbf{C}^{(m)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1m)} \right)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (2.31)$$

Перейдем к разработке компонентной математической модели, позволяющей определить эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей минерала при упругопластическом деформировании. И только потом на ее основе разработаем компонентные модели минерала в упругопластическом с упрочнением и близком к идеально-пластическому состояниях.

Разработаем содержательную модель минерала при упругопластическом деформировании. Применяя принцип построения математических моделей, подробно рассмотренный в [62], имеем. Минерал представляет собой объект, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу зерен, являющихся

фрактальными неоднородностями. Следовательно, минерал является геоматериалом мультифрактальной структуры. Упругопластическое состояние минерала обусловлено наличием в его структуре дислокаций, совершающих необратимое движение. При этом количество таких дислокаций является постоянной величиной. Зерна, составляющие минерал, случайно ориентированы в пространстве и могут находиться в одном из состояний: упругом или пластическом. Эти неоднородности являются анизотропными и взаимодействуют между собой через упругопластическое поле деформаций или напряжений. Аппроксимируем эллипсоидом каждую фрактальную неоднородность (зерно) в структуре минерала.

Перейдем ко второму этапу – построению математической модели. На основе содержательной модели минерала мы получим трехмерную неограниченную сплошную среду с эллипсоидальными неоднородностями, случайно-ориентированными в пространстве. Данные неоднородности соответствуют зернам минерала.

Обозначим через  $\mathbf{C}^{(m)}$  тензор модулей упругости эллипсоида. Каждый эллипсоид, соответствующий зернам минерала, в зависимости от ориентации в пространстве будет принимать свое значение  $\mathbf{C}^{(m)}$ . Следовательно, данный тензор является случайной величиной. Введем сплошную среду, характеризуемую тензором модуля упругости  $\mathbf{C}^{(0m)}$ , равного усредненным значениям  $\langle \mathbf{C}^{(m)} \rangle$ . Данную среду назовем матрицей.

Поместим в эту матрицу эллипсоидальные неоднородности и тем самым получим модель сплошной среды для рассматриваемого минерала, которую назовем сплошной средой со структурой. Модуль упругости такой среды можно представить в виде кусочно-постоянной функции  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{(0m)} + \mathbf{C}^{(1m)}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $\mathbf{C}^{(1m)}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{(m)} - \langle \mathbf{C}^{(m)} \rangle$  – случайный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющий свою величину скачком на границе эллипсоидов.

Обозначим через тензор  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}(\mathbf{x})$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\mathbf{C}^{(1m)} = 0$  в матрице при заданных внешних силах. А через тензор  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(\mathbf{x})$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Упругая деформация  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Um)}$  в точке связана с напряжениями законом Гука:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(Um)} = \mathbf{C}'^{(m)} : \boldsymbol{\sigma}^{(m)}, \quad (2.32)$$

где  $\mathbf{C}'^{(m)}$  – тензор упругих податливостей зерна. Пластическая деформация в точке определяется через системы скольжения зерна следующим образом:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{(Pm)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i)(n_i d\boldsymbol{\sigma} e_i), \quad (2.33)$$

где  $n_i, e_i$  – нормаль к плоскости скольжения с номером  $i$  и направление скольжения соответственно;  $f_i$  – функция упрочнения;  $\otimes$  – тензорное произведение;  $N$  – постоянная величина, определяющая число дислокаций, совершающих необратимое движение.

Введем в рассматриваемую среду поля дислокационных моментов двух типов  $\mathbf{d}^{(1m)}$ , и  $\mathbf{d}^{(2m)} : \mathbf{d}^{(1m)}$  – поле дислокационных моментов, индуцированное внешним полем напряжений, которое линейно связано с последним и приводит к изменениям модуля упругости в точках среды,  $\mathbf{d}^{(2m)}$  – поле дислокационных моментов, которое определяет пластические деформации. Вектор перемещений  $\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x})$  в среде с распределением дислокационных моментов в произвольной аффинной системе координат удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{u}^{(1m)}(\mathbf{x}) = -\int \nabla \mathbf{G}^{(0m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{C}^{(0m)(1m)} \mathbf{d}^{(1m)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int \nabla \mathbf{G}^{(0m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{C}^{(0m)(2m)} \mathbf{d}^{(2m)}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (2.34)$$

где  $\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{u}^{(0m)} + \mathbf{u}^{(1m)}$ ,  $\mathbf{u}^{(m)}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}^{(0m)}(\mathbf{x})$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ ;  $\mathbf{G}^{(0m)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  – тензор Грина матрицы (сплошной среды, упругие свойства которой характеризуются тензором модуля

упругости, равного усредненным значениям  $\langle \overset{(m)}{\mathbf{C}} \rangle$ ;  $\nabla$  – градиент по  $\mathbf{x}$ .

Используя работу [95] в рамках метода аналогии, уравнение (2.34) преобразуем к уравнению относительно приращения полной деформации:

$$d \overset{(m)}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \int \overset{(0m)}{\mathbf{K}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left[ \overset{(1m)}{\mathbf{C}} - \overset{(m)}{\mathbf{C}} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] d \overset{(m)}{\boldsymbol{\varepsilon}} dx' = d \overset{(0m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.35)$$

где  $d \overset{(m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – приращение полной деформации  $\overset{(m)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overset{(Pm)}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{(Um)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ;  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  $\overset{(0m)}{\mathbf{K}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla \nabla \overset{(0m)}{\mathbf{G}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ;  $\overset{(0m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – внешнее поле деформаций.

Вводя обозначение

$$\overset{(m)}{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i), \quad (2.36)$$

а также используя работу [95] в рамках метода аналогии, получим решение уравнения (2.35) при постоянном внешнем поле  $d \overset{(0m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ :

$$d \overset{(im)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left( \mathbf{I} + \overset{(m)}{\mathbf{B}} \left[ \overset{(1m)}{\mathbf{C}} - \overset{(m)}{\mathbf{C}} \overset{(m)}{\mathbf{R}} \overset{(m)}{\mathbf{C}} \left( \overset{(m)}{\mathbf{R}} \overset{(m)}{\mathbf{C}} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \langle \overset{(1m)}{\mathbf{C}} - \overset{(m)}{\mathbf{C}} \overset{(m)}{\mathbf{R}} \overset{(m)}{\mathbf{C}} \left( \overset{(m)}{\mathbf{R}} \overset{(m)}{\mathbf{C}} + \mathbf{I} \right)^{-1} \rangle \right] \right)^{-1} d \overset{(0m)}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.37)$$

где  $d \overset{(im)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – приращение поля деформаций внутри изолированного включения;

$\overset{(m)}{\mathbf{B}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(0m)}{\mathbf{K}} (Ak) dS$ ;  $A$  – тензор, определяющий невырожденное аффинное

преобразование трехмерного пространства;  $\overset{(0m)}{\mathbf{K}} (k)$  – преобразование Фурье-ядра

$\overset{(0m)}{K}_{ijkl} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле деформаций внутри включения применим комплексный метод самосогласованного поля. Этот метод в рамках разрабатываемой математической модели может быть сформулирован следующим образом: 1) каждое из включений

любой конкретной реализации случайного поля неоднородностей рассматривается как изолированное эллипсоидальное включение в матрице;

2) поле деформаций  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$ , в котором находится каждое из включений, складывается из собственного поля  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)}$  как изолированной неоднородности, внешнего поля  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}$  и поля, наведенного окружающими неоднородностями  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Nm)}$ . Поскольку необходимо задаться некоторой аппроксимацией поля  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}$ , то будем считать, что оно постоянно.

Приращение собственного поля деформаций  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)}$  внутри любой неоднородности определяется следующим уравнением:

$$d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \rangle \right] \right)^{-1} d \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}. \quad (2.38)$$

Для приращения поля деформаций внутри любой неоднородности, обусловленное внешним полем  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)}$  и полем, наведенным другими неоднородностями  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Nm)}$ , имеем следующее уравнение:

$$d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Km)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \rangle \right] \right)^{-1} d \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}, \quad (2.39)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(Nm)}$ .

В результате в рамках рассматриваемого комплексного метода самосогласованного поля для приращения поля деформаций  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} = d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Cm)} + d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Km)}$  внутри любого включения имеем:

$$d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \mathbf{R} \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \rangle \right] \right)^{-1} d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)}, \quad (2.40)$$

где  $d \boldsymbol{\varepsilon}^{(Em)} = d \boldsymbol{\varepsilon}^{(0m)} + d \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$ .

Умножая правую и левую части уравнения на  $\mathbf{C}^{(m)}$  слева, в рамках комплексного метода самосогласованного поля, для приращения поля

напряжений внутри любого включения имеем

$$d \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \right) d \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.41)$$

где  $d \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} d \boldsymbol{\varepsilon}$ .

Усредняя (2.40) и (2.41) по ансамблю полей реализаций случайного поля неоднородностей, и применяя к полученным выражениям теорему о среднем произведении (учитывая, что  $\langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = d \boldsymbol{\varepsilon}$ ), получим

$$\langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \right) \right\rangle d \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.42)$$

$$\langle d \boldsymbol{\sigma} \rangle = \left\langle \mathbf{C} \cdot \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \right) \right\rangle d \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.43)$$

Разрешим уравнение (2.42) относительно приращения поля деформаций  $d \boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$d \boldsymbol{\varepsilon} = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \right) \right\rangle^{-1} \cdot \langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (2.44)$$

Полученное выражение подставим в (2.43):

$$\langle d \boldsymbol{\sigma} \rangle = \left\langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \right) \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \right) \right\rangle^{-1} \cdot \langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (2.45)$$

$$- \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \left( \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle \right]^{-1} \cdot \langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle.$$

Однако приращения напряжений и полной деформации связаны между собой соотношениями:

$$\langle d \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C} \langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad (2.46)$$

$$\langle d \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}' \langle d \boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (2.47)$$

Отсюда, сравнивая (2.46) и (2.45), а также принимая во внимание (2.36), найдем в развернутом виде эффективный тензор модулей упругости  $\mathbf{C}^{(efm)}$  среды, характеризующий минерал при упругопластическом деформировании:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(efm)} = & \left\langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right) \times \right. \\ & \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\ & \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right] \right]^{-1} \times \\ & \times \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right) \times \right. \\ & \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\ & \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \boldsymbol{\sigma} e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right] \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Аналогичным подходом найдем в развернутом виде эффективный тензор упругих податливостей  $\mathbf{C}'^{(efm)}$ , характеризующий минерал при упругопластическом деформировании:

$$\begin{aligned}
{}^{(efm)}\mathbf{C}' = & \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right) \times \right. \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& - \left. \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \quad (2.49) \\
& \times \left. \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \rangle \times \\
& \times \left\langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right) \times \right. \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& - \left. \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \\
& \times \left. \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \rangle^{-1}.
\end{aligned}$$

Полученные результаты позволяют перейти к разработке следующей компонентной математической модели изменения количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала.

Как было указано выше, при рассмотрении рисунка 3 после упругого состояния реализуется одно из следующих взаимоисключающих состояний: упругопластическое с упрочнением или близкое к идеально-пластическому. Переход минерала в любое из этих состояний происходит по причине события – изменения количества дислокаций, совершающих необратимое движение в структуре минерала.

Разработаем математическую модель изменения количества необратимо движущихся дислокаций, позволяющую определить условия реализации двух взаимоисключающих состояний минерала: близкого к идеально-пластическому или упругопластического с упрочнением. Применяя данные условия в дальнейшем исследовании, для любого изучаемого минерала можно будет установить, в каком из состояний (упругопластическом с упрочнением или

близком к идеально-пластическому) будет находиться этот геоматериал после упругого состояния.

Экспериментально установлено, что при увеличении внешней нагрузки на минерал в его структуре происходит рост числа необратимо движущихся дислокаций. Как показали исследования, прирост числа дислокаций, совершающих необратимое движение, можно выразить через их количество следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = kN, \quad (2.50)$$

где  $N$  – количество необратимо движущихся дислокаций;  $k > 0$  – коэффициент прироста дислокаций, совершающих необратимое движение в структуре минерала.

Коэффициент  $k$  не является постоянной величиной. При увеличении нагрузки данный коэффициент увеличивается, подчиняясь следующему закону:

$$k = p + qN, \quad (2.51)$$

где  $p > 0$  – начальный параметр прироста необратимо движущихся дислокаций в минерале;  $q > 0$  – параметр, характеризующий процесс увеличения коэффициента прироста  $k$ .

Тогда, подставляя (2.51) в (2.50), и раскрывая скобки, получим:

$$\frac{dN}{dt} = qN^2 + pN. \quad (2.52)$$

Однако в каждый момент времени поверхностные дефекты в структуре минерала поглощают необратимо движущиеся дислокации. С учетом этого, уравнение (2.52) следует преобразовать к следующему виду:

$$\frac{dN}{dt} = qN^2 + pN - g, \quad (2.53)$$

где  $g$  – скорость поглощения поверхностными дефектами необратимо движущихся дислокаций.

Как показали исследования, для одного и того же вида минерала параметры  $q$ ,  $p$  и  $g$  принимают различные значения. Это обусловлено тем, что они зависят

не только от вида минерала, но и от его структуры. Несмотря на это, для каждого из рассматриваемых параметров (если они описывают один и тот же вид минерала) можно выделить ограниченную область возможных значений. Более того, в ходе экспериментов над минералами одного и того же вида было установлено, что некоторые значения параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$  от опыта к опыту проявляются чаще, чем остальные.

Традиционно, для определения подобных параметров исследователи применяют статистический подход, подробно изложенный в [31, 183]. Применительно к рассматриваемой задаче, этот подход заключается в следующем. Сначала из совокупности одного вида минералов составляется случайная выборка. Далее проводится серия экспериментов, состоящих в деформировании минералов из полученной выборки. И наконец, на основании произведенных экспериментов осуществляется построение статистических распределений значений параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$ , отражающих характеристики минерала, принадлежащих одному виду.

Однако, как показали исследования, статистические распределения параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$ , полученные таким подходом, несколько отличаются от распределений данных параметров, наблюдаемых при деформировании минералов, являющихся структурными элементами горных пород и массивов. Это обусловлено тем, что в таких геоматериалах минералы структурно связаны друг с другом; поэтому изменение количества движущихся дислокаций в одном из них приводит к стимулированию роста (или спада) количества необратимо движущихся дислокаций в другом.

Таким образом, для рассматриваемой задачи статистический подход в чистом виде неприменим. В связи с этим предложим другой – комбинированный способ, заключающийся в последовательном использовании статистического и возможностного подходов к решению поставленной задачи – определения параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$ .

Данный подход состоит из двух этапов. На первом этапе для каждого вида

минерала необходимо статистическим способом определить параметры  $q$ ,  $p$  и  $g$ . Этот способ, как указывалось выше, заключается в формировании случайной выборки одного вида минералов и проведения экспериментов над элементами такой выборки. Причем измерение параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$  должно производиться при такой величине усредненного тензора напряжений, при которой в минерале происходит необратимое движение дислокаций. Для каждого вида минерала величина такого тензора напряжения индивидуальна.

Поскольку в горных породах и массивах изменение количества движущихся дислокаций в одном минерале оказывает влияние на изменение количества дислокаций в другом минерале, то полученные в результате экспериментов статистические распределения значений параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$  следует подвергнуть корректировке. В этом и заключается последний этап предлагаемого комбинированного способа.

Таким образом, на последнем этапе посредством экспериментальных наблюдений, а также экспертных оценок производится корректировка значений в статистических распределениях, в результате чего получаем функции принадлежности параметров  $q$ ,  $p$  и  $g$ . В итоге имеем такие распределения значений рассматриваемых параметров, которые описывают исследуемые минералы одного вида, находящиеся внутри горных пород и породных массивов.

Итак, применяя теорию возможностей, на последнем этапе определяемые параметры преобразуются в нечеткую форму. Следовательно, в рассматриваемом случае теория возможностей применяется не как способ описания субъективных оценок и суждений, а как естественное обобщение теории ошибок [73]. Действительно, если в теории ошибок результат измерения представляется множеством возможных значений измеряемой характеристики объекта или явления, то применяя теорию возможностей, становится допустимым произвести градацию возможностей тех или иных значений ошибки [160].

Вернемся к рассматриваемой математической модели. С учетом того, что все параметры данной модели являются нечеткими, уравнение (2.53) следует преобразовать к следующему виду:

$$\frac{dN}{dt} = \tilde{q}N^2 + \tilde{p}N - \tilde{g}, \quad (2.54)$$

где  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$  – нечеткие параметры, по своему смыслу идентичные параметрам  $q$ ,  $p$  и  $g$ . Здесь и далее параметры, задаваемые в нечеткой форме, имеют помету "~".

Полученное выражение является математической моделью, описывающей изменение количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала. Как показали опыты, функции принадлежности рассматриваемых нечетких параметров с достаточной степенью адекватности могут быть описаны гармонической функцией. В аналитическом виде функции принадлежности нечетких параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$ , согласно [68], можно представить в следующем виде:

$$\mu(q) = \begin{cases} 0,5 \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{q-b}{a} \right) \right], & \text{для } (b-a) \leq x \leq (b+a) \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}, \quad (2.55)$$

$$\mu(p) = \begin{cases} 0,5 \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{p-\omega}{\lambda} \right) \right], & \text{для } (\omega-\lambda) \leq x \leq (\omega+\lambda) \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}, \quad (2.56)$$

$$\mu(g) = \begin{cases} 0,5 \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{g-v}{u} \right) \right], & \text{для } (v-u) \leq x \leq (v+u) \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}, \quad (2.57)$$

где  $q \in Q$ ,  $p \in P$ ,  $g \in G$ ;  $Q$ ,  $P$ ,  $G$  – соответственно области значений нечетких параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$ ;  $b$ ,  $\omega$  и  $v$  – модальные значения соответствующих нечетких параметров;  $a$ ,  $\lambda$  и  $u$  – задают ширину соответствующих гармонических функций  $\mu(q)$ ,  $\mu(p)$  и  $\mu(g)$ .

Графический вид одной из таких функций представлен на рисунке 4.

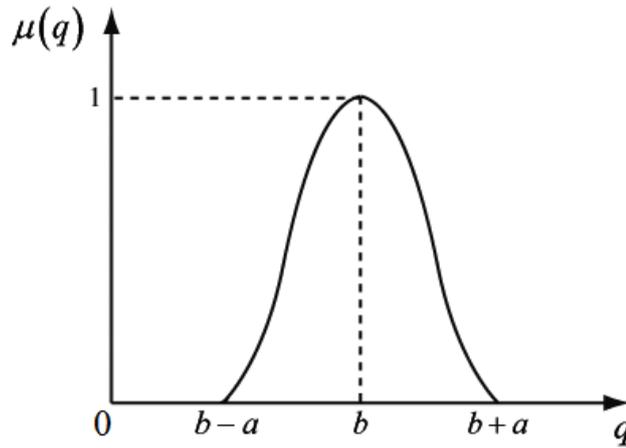


Рисунок 4 – Графический вид функции принадлежности параметра  $\tilde{q}$

Как видно из данного рисунка, гармоническая функция принадлежности имеет симметричный вид, что согласно [68], позволяет описывать нечеткие параметры  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$  с помощью L-R представлений [195]:

$$\tilde{q} = (m_q, \alpha_q, \beta_q), \quad \tilde{p} = (m_p, \alpha_p, \beta_p), \quad \tilde{g} = (m_g, \alpha_g, \beta_g), \quad (2.58)$$

где  $m_q = b$ ,  $m_p = \omega$ ,  $m_g = v$  – модальные значения соответствующих нечетких параметров;  $\alpha_q = a$ ,  $\alpha_p = \lambda$ ,  $\alpha_g = u$  – левые коэффициенты нечеткости соответствующих нечетких параметров;  $\beta_q = a$ ,  $\beta_p = \lambda$ ,  $\beta_g = u$  – правые коэффициенты нечеткости соответствующих нечетких параметров.

Для того чтобы на основе разработанной модели можно было определить, в какое из состояний при увеличении внешней нагрузки переходит исследуемый минерал (упругопластическое с упрочнением или близкое к идеально-пластическому), проанализируем фазовый портрет динамической системы, описываемой полученным нелинейным уравнением (2.54). Состояния равновесия данной динамической системы являются нечеткими и находятся из условия:

$$\tilde{q}N^2 + \tilde{p}N - \tilde{g} = 0. \quad (2.59)$$

Решая данное уравнение, для рассматриваемой динамической системы получим два нечетких состояния равновесия:

$$\tilde{N}_1 = \frac{-\tilde{p} - \sqrt{\tilde{p}^2 + 4\tilde{q}\tilde{g}}}{2\tilde{p}}, \quad \tilde{N}_2 = \frac{-\tilde{p} + \sqrt{\tilde{p}^2 + 4\tilde{q}\tilde{g}}}{2\tilde{p}}. \quad (2.60)$$

Следует особо отметить, что в выражениях (2.60) все алгебраические операции проводятся над нечеткими параметрами. Об алгоритмах реализации таких операций подробно описано в [233-235, 54].

Однако первое нечеткое состояние равновесия  $N = \tilde{N}_1$  при любых допустимых значениях параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$ , – всегда меньше нуля. Поэтому первое нечеткое состояние равновесия физически нереализуемо.

В результате нечетких алгебраических операций, присутствующих в (2.60),  $\tilde{N}_2$  будет иметь такой же вид функции принадлежности, что и у параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$ . Вследствие этого нечеткое состояние равновесия  $N = \tilde{N}_2$  можно представить с помощью L-R представления:

$$N = \tilde{N}_2 = (m_{N_2}, \alpha_{N_2}, \beta_{N_2}). \quad (2.61)$$

Исходя из приведенных рассуждений, фазовый портрет рассматриваемой динамической системы будет включать одно нечеткое состояние равновесия –  $N = \tilde{N}_2$  и иметь следующий вид (рисунок 5).

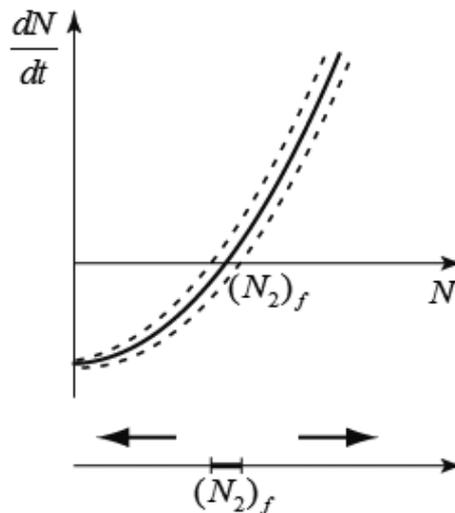


Рисунок 5 – Фазовый портрет динамической системы, описываемой (2.59)

Как видно из представленного рисунка, эволюция динамической системы с нечеткими параметрами описывается не одной фазовой кривой, а их семейством, заключенным в некоторой области (на рисунке эта область обозначена пунктирной линией вокруг фазовой траектории, реализуемой в случае с наиболее

возможностными значениями параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$ ).

Вследствие этого нечеткое состояние равновесия на фазовом портрете, в отличие от классической качественной теории динамических систем [3, 4], изображается не особой точкой, а интервалом, в котором каждое значение  $N$  взвешено некоторой степенью принадлежности. Подобный интервал по аналогии с классической теорией динамических систем назовем особым.

Кроме того, из представленного фазового портрета следует, что нечеткое состояние равновесия представляет собой репеллер, т.е. изображающая точка, описывающая эволюцию исследуемой динамической системы, в зависимости от начальных условий с течением времени будет удаляться либо в сторону нулевого значения количества необратимо движущихся дислокаций, либо в сторону бесконечности.

Таким образом, если изображающая точка в соответствии с начальными условиями, попадет в интервал  $[0, m_{N_2} - \alpha_{N_2})$ , где  $\alpha_{N_2}$  соответствует левой границе особого интервала, то в минерале реализуется упругопластическое состояние с упрочнением. В противном случае, т.е. в случае попадания изображающей точки в интервал  $(m_{N_2} + \beta_{N_2}, \infty)$ , где  $\beta_{N_2}$  отвечает за правую границу особого интервала, минерал находится в близком к идеально-пластическому состоянию.

Наиболее интересным случаем поведения рассматриваемой динамической системы является ситуация, когда начальные условия уравнения (2.56) приведут к тому, что изображающая точка попадет внутрь особого интервала. В таком случае о дальнейшей эволюции динамической системы будем судить только с точки зрения теории возможностей.

Допустим, что начальное количество дислокаций нелинейного уравнения (2.56), обозначим его  $N_0$ , примет значение левой границы особого интервала, т.е.  $N_0 = m_{N_2} - \alpha_{N_2}$ . Тогда бесконечно малое возмущение параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$  может привести к тому, что изображающая точка рассматриваемой динамической системы будет совершать движение в сторону уменьшения количества дислокаций. Следовательно, чем ближе  $N_0$  к  $m_{N_2} - \alpha_{N_2}$ , тем больше возможность,

что с течением времени минерал окажется в упругопластическом состоянии с упрочнением. По этой причине в случае, когда  $N_0 = m_{N_2} - \alpha_{N_2}$ , можно утверждать, что минерал с возможностью  $\mu_y(N_0) = 1$  находится в упругопластическом состоянии с упрочнением.

Аналогичными рассуждениями получим то, что чем ближе  $N_0$  к  $m_{N_2} + \beta_{N_2}$ , тем больше возможность, что с течением времени минерал окажется в близком к идеально-пластическому состоянию. В этом случае при  $N_0 = m_{N_2} + \beta_{N_2}$  с возможностью  $\mu_{un}(N_0) = 1$  минерал находится в близком к идеально-пластическому состоянию.

Учитывая, что в соответствии с условием разбиения единицы [68]:

$$\mu_y(N_0) + \mu_{un}(N_0) = 1, \quad (2.62)$$

получим, что каждому значению из  $[m_{N_2} - \alpha_{N_2}, m_{N_2} + \beta_{N_2}]$  можно сопоставить величины  $\mu_{un}(N_0)$  и  $\mu_y(N_0)$ , характеризующие соответственно возможности реализаций таких состояний как близкое к идеально-пластическому и упругопластическое с упрочнением. Вследствие проведенных выше рассуждений, функция принадлежности  $\mu_y(N_0)$  в базисном диапазоне  $[m_{N_2} - \alpha_{N_2}, m_{N_2} + \beta_{N_2}]$  является убывающей, а  $\mu_{un}(N_0)$  – возрастающей. Кроме того, рассматриваемые функции принадлежности имеют одинаковое значение  $\mu_y(N_0) = \mu_{un}(N_0) = 0,5$  при  $N_0 = m_{N_2}$ . В таком случае для удобства дальнейших исследований, не теряя общности, положим, что в аналитическом виде функции  $\mu_y(N_0)$  и  $\mu_{un}(N_0)$  имеют следующий вид:

$$\mu_y(N_0) = w \left( \frac{(m_{N_2} + \beta_{N_2}) - N_0}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}} \right), \quad \mu_{un}(N_0) = w \left( \frac{N_0 - (m_{N_2} + \beta_{N_2})}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}} \right), \quad (2.63)$$

где  $w = \begin{cases} 1, & \text{для } m_{N_2} - \alpha_{N_2} \leq N_0 \leq m_{N_2} + \beta_{N_2} \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$ ;  $N_0 \in [m_{N_2} - \alpha_{N_2}, m_{N_2} + \beta_{N_2}]$ .

Графический вид данных асимметричных треугольных функций представлен на рисунке 6.

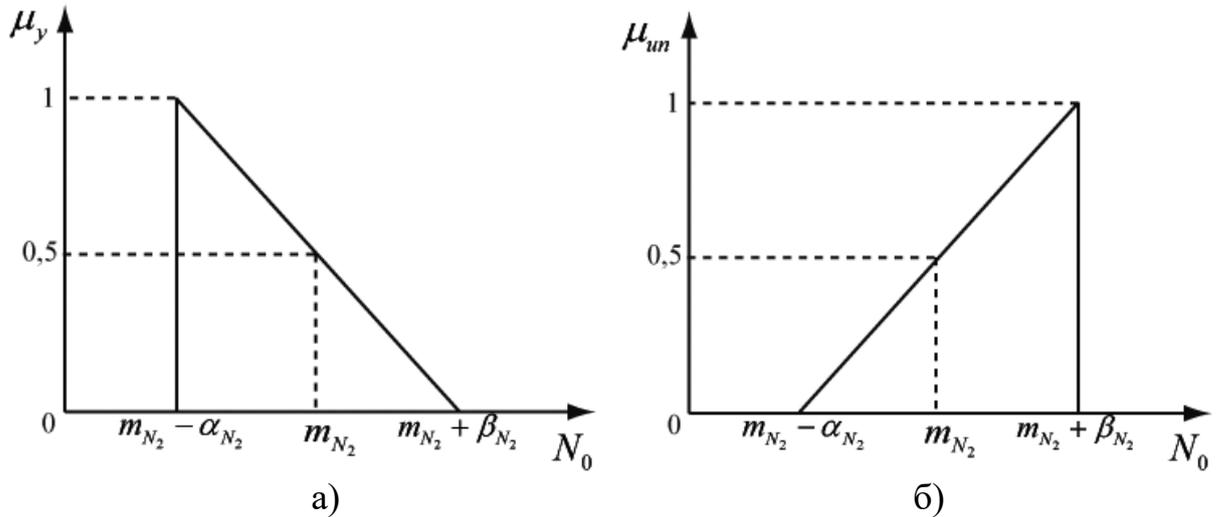


Рисунок 6 – Графический вид функций  $\mu_y(N_0)$  и  $\mu_{un}(N_0)$

Итак, если  $\mu_y > \mu_{un}$ , то будем говорить, что минерал находится в нечетком упругопластическом состоянии с упрочнением; в случае  $\mu_y < \mu_{un}$  – в нечетком близком к идеально-пластическому состоянию. И наконец, если  $\mu_y = \mu_{un}$ , то минерал – в нечетком пограничном состоянии.

Полученные результаты, свидетельствуют о том, что для минерала наряду с рассмотренными состояниями следует выделить такие, как: нечеткое упругопластическое с упрочнением, нечеткое близкое к идеально-пластическому и нечеткое пограничное. Причем реализация одного из них взаимно исключает реализацию других.

Итак, учитывая данные результаты, перейдем к разработке компонентной математической модели минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением. При разработке рассматриваемой модели необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. В математической модели минерала при упругопластическом деформировании количество дислокаций, совершающих необратимое движение в структуре этого геоматериала постоянно, т.е.  $N = const$ . В свою очередь в разрабатываемой модели количество дислокаций  $N$ , кроме начального значения  $N_0$ , имеет нечеткий вид и изменяется во времени по некоторому закону  $\tilde{N}(t)$ .

Это обстоятельство позволяет задачу по определению деформационных

свойств минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением свести к разработке процедурной математической модели. Она дает возможность получать величины эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей путем подстановки различных значений  $\tilde{N}(t=0), \tilde{N}(t=1), \tilde{N}(t=2), \dots, \tilde{N}(t=t_\xi)$  (где  $t_\xi$  – конечный момент модельного времени) в математическую модель минерала при упругопластическом деформировании.

Воспользуемся мультикомпонентным подходом для построения такой процедурной модели, она будет состоять из двух компонентных моделей. Первая из них определяет значения  $\tilde{N}(t=0), \tilde{N}(t=1), \tilde{N}(t=2), \dots, \tilde{N}(t=t_\xi)$ . Значение нечеткого параметра  $\tilde{N}$  в момент времени  $t=0$  получается путем преобразования  $N_0$  в нечеткую форму. Количество движущихся дислокаций в последующие моменты времени, т.е. значения  $\tilde{N}(t)$  при  $t=1, 2, \dots, t_\xi$ , устанавливаются с помощью разработанной выше математической модели изменения количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала.

Вторая компонентная модель – для каждого полученного значения  $\tilde{N}(t=0), \tilde{N}(t=1), \tilde{N}(t=2), \dots, \tilde{N}(t=t_\xi)$ , с помощью разработанной ранее математической модели минерала при упругопластическом деформировании, устанавливает деформационные свойства. Следует особо отметить, ввиду того, что значения  $\tilde{N}(t=0), \tilde{N}(t=1), \tilde{N}(t=2), \dots, \tilde{N}(t=t_\xi)$  имеют нечеткий вид, то эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей в моменты времени  $t=0, 1, \dots, t_\xi$  будут также нечеткими. Воспользовавшись языком UML в части подхода, основанного на моделях деятельности [16, 171], предлагаемую математическую модель минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением можно представить в следующем виде (рисунок 7).

Приведем пояснения к представленной модели. Вначале выполняются два действия: "Преобразовать  $N_0$  в  $\tilde{N}(t=0)$ " и "Применить математическую модель изменения количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала". Первое из них выполняет преобразование  $N_0$  в нечеткую форму, тем

самым определяя  $\tilde{N}$  в момент времени  $t=0$ . В свою очередь, второе действие заключается в определении количества необратимо движущихся дислокаций  $\tilde{N}(t)$  при  $t=1, 2, \dots, t_\xi$ .

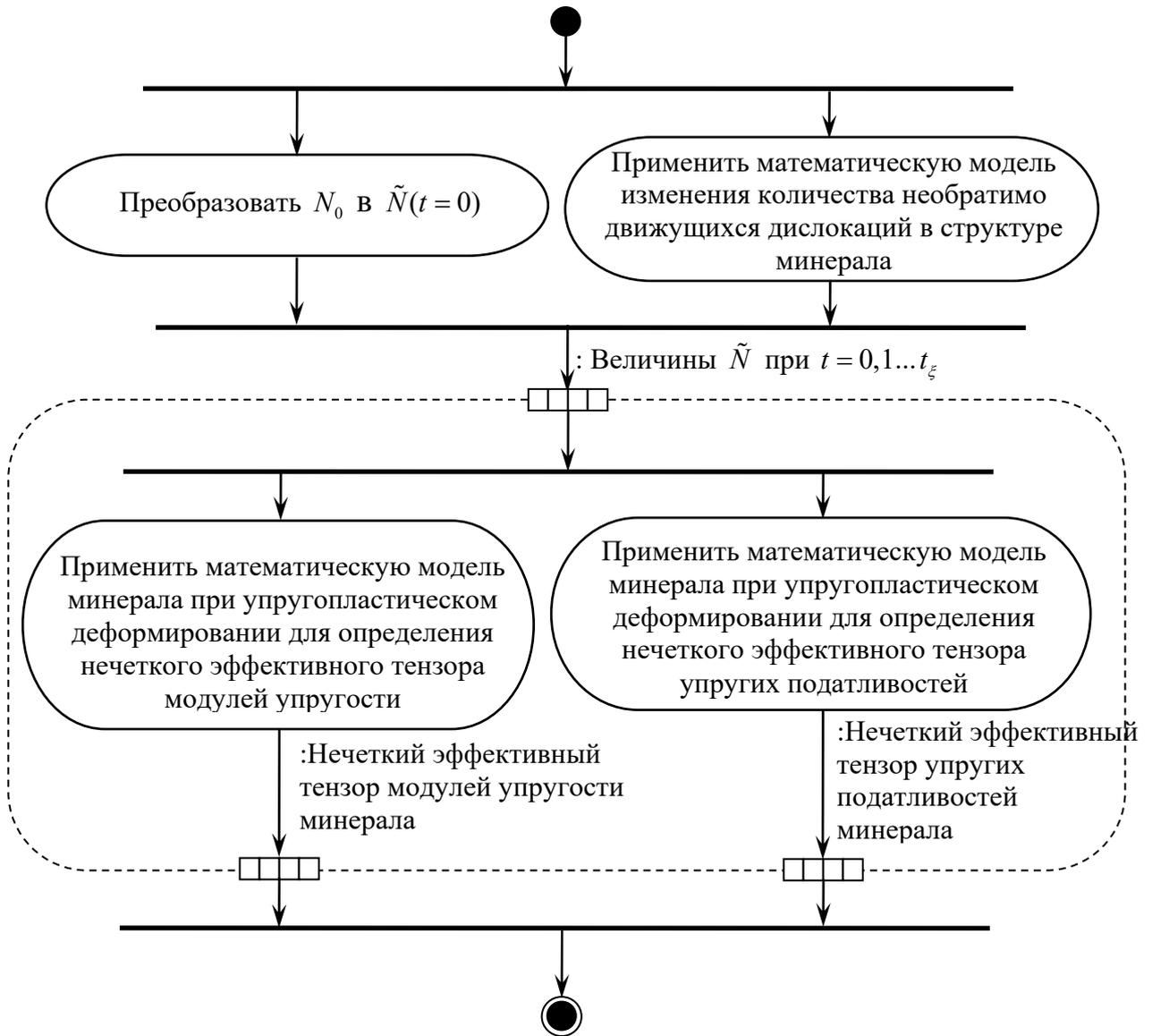


Рисунок 7 – Математическая модель минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением

Далее поток управления объединяется в один и входит в область расширения, в которой один входной набор и два выходных. Входным набором является массив  $\tilde{N}(t=0), \tilde{N}(t=1), \tilde{N}(t=2), \dots, \tilde{N}(t=t_\xi)$ . Первый выходной набор содержит величины нечетких эффективных тензоров модулей упругости  $\tilde{C}^{(efm)}(t=0), \tilde{C}^{(efm)}(t=1), \tilde{C}^{(efm)}(t=2), \dots, \tilde{C}^{(efm)}(t=t_\xi)$ , а второй – величины нечетких

эффективных тензоров упругих податливостей  $\tilde{C}'^{(efm)}(t=0), \tilde{C}'^{(efm)}(t=1), \tilde{C}'^{(efm)}(t=2), \dots, \tilde{C}'^{(efm)}(t=t_\varepsilon)$ . Здесь и далее помета "~" над тензорами указывает на то, что они имеют нечеткую форму.

Когда значения массива поступают во входной набор, происходит их разбиение на индивидуальные объекты. Далее для каждого элемента входного массива область расширения выполняется в отдельности. А именно, для каждого значения  $\tilde{N}(t=0), \tilde{N}(t=1), \tilde{N}(t=2), \dots, \tilde{N}(t=t_\varepsilon)$  параллельно выполняются действия "Применить математическую модель минерала при упругопластическом деформировании для определения нечеткого эффективного тензора модулей упругости" и "Применить математическую модель минерала при упругопластическом деформировании для определения нечеткого эффективного тензора упругих податливостей". После этого область расширения заканчивается, в результате чего имеем два выходных массива, которые описывают эволюцию деформационных свойств минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением.

Определим все действия из данной модели. Рассмотрим первое действие – "Преобразовать  $N_0$  в  $\tilde{N}(t=0)$ ". Согласно [68], любое четкое число можно представить в виде одноточечного нечеткого множества. Тогда рассматриваемое действие заключается в вычислении нечеткого параметра  $\tilde{N}(t=0)$  с помощью следующего выражения:

$$\tilde{N}(t=0) = \{(\mu(N_0), N_0)\}, \quad (2.64)$$

где  $\mu(N_0) = 1$ .

Определим второе действие представленной модели "Применить математическую модель изменения количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала". Для реализации этого действия необходимо получить закон  $\tilde{N}(t)$ . Поэтому вернемся к разработанной математической модели (2.54), описывающей процесс изменения количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала:

$$\frac{dN}{dt} = \tilde{q}N^2 + \tilde{p}N - \tilde{g}.$$

Разрешим это уравнение относительно  $N$ . Поскольку нечеткие параметры в данном уравнении не зависят от времени и в процессе эволюции динамической системы каждый из них принимает только одно значение из соответствующего базисного диапазона, то  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$  при интегрировании следует считать постоянными.

Разделим переменные в уравнении (2.54):

$$dt = \frac{dN}{\tilde{q}N^2 + \tilde{p}N - \tilde{g}}. \quad (2.65)$$

В знаменателе правой части вынесем  $\tilde{q}$  за скобки. В результате получим:

$$\frac{dN}{\tilde{q} \left( N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} \right)} = dt \quad (2.66)$$

или

$$\frac{dN}{N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}}} = \tilde{q}dt. \quad (2.67)$$

Проинтегрируем (2.67):

$$\int \frac{dN}{N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}}} = \int \tilde{q}dt. \quad (2.68)$$

Найдем интеграл в левой части данного уравнения. Для этого рассмотрим отдельно знаменатель  $N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}}$  и дополним  $N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N$  до полного квадрата:

$$N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} = N^2 + 2\frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}N + \left(\frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}\right)^2 - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} - \left(\frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}\right)^2 = \left(N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}\right). \quad (2.69)$$

С учетом (2.69) искомый интеграл следует преобразовать к следующему виду:

$$\int \frac{dN}{\left(N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}\right)}. \quad (2.70)$$

Так как  $\tilde{q} > 0$ ,  $\tilde{p} > 0$  и  $\tilde{g} > 0$ , то  $\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2} > 0$ . Положим  $\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2} = \tilde{a}^2$ .

Применим теперь к интегралу замену переменного, положив  $\tilde{z} = N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}$ ; тогда

$$N = \tilde{z} - \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}},$$

$$dN = d\tilde{z}, \quad \left(N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}\right) = \tilde{z}^2 - \tilde{a}^2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dN}{\left(N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}\right)} = \int \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}^2 - \tilde{a}^2}. \quad (2.71)$$

Положим  $\tilde{x} = \tilde{z} / \tilde{a}$ , тогда  $\tilde{z} = \tilde{a}\tilde{x}$ ;  $d\tilde{z} = \tilde{a}d\tilde{x}$ ; в итоге получим:

$$\int \frac{d\tilde{z}}{\tilde{z}^2 - \tilde{a}^2} = \frac{1}{\tilde{a}} \int \frac{d\tilde{x}}{\tilde{a}^2\tilde{x}^2 - \tilde{a}^2} = \frac{1}{\tilde{a}^3} \int \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}^2 - 1} = \frac{1}{2\tilde{a}^3} \ln \left| \frac{\tilde{x} - 1}{\tilde{x} + 1} \right| + C_1. \quad (2.72)$$

В полученном выражении произведем обратную замену переменных:

$$\int \frac{dN}{N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}}} = \frac{1}{2\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}\right)\sqrt{\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}}} \ln \left| \frac{\frac{N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}}} - 1}{\frac{N + \frac{\tilde{p}}{2\tilde{q}}}{\sqrt{\frac{\tilde{g}}{\tilde{q}} + \frac{\tilde{p}^2}{4\tilde{q}^2}}} + 1}} \right| + C_1. \quad (2.73)$$

Упрощая полученное решение, для интеграла в правой части уравнения (2.68) окончательно получим:

$$\int \frac{dN}{N^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}N - \frac{\tilde{g}}{\tilde{q}}} = \frac{\left(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right)^3}{4\tilde{q}^3} \ln \left| \frac{N + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right| + C_1. \quad (2.74)$$

Вернемся к решению исходного уравнения (2.68). Проинтегрировав правую часть этого уравнения, и учитывая (2.74), найдем:

$$\frac{\left(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right)^3}{4\tilde{q}^3} \ln \left| \frac{N + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right| = \tilde{q}t + C. \quad (2.75)$$

Разрешив данное уравнение относительно  $N$ , получим:

$$N = \frac{\left(\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right) \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}} + C\right)\right]}{2\tilde{q} \left[ \exp\left(\frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}} + C\right) - 1 \right]}. \quad (2.76)$$

Начальное условие: при  $t = 0$ ,  $N = N_0$ , поэтому с учетом (2.75), найдем

$$C_0 = \frac{\left(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right)^3}{4\tilde{q}^3} \cdot \ln \left| \frac{N_0 + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N_0 + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right|. \quad (2.77)$$

Поскольку алгебраические операции над нечеткими параметрами дают результат в нечетком виде, то в выражении (2.76)  $N$  имеет нечеткую форму, т.е.  $N \equiv \tilde{N}$ . Учитывая данное обстоятельство, а также подставляя  $C_0$  из (2.77) вместо  $C$  в (2.76), окончательно получим закон изменения количества дислокаций  $\tilde{N}(t)$ , совершающих необратимое движение в структуре минерала:

$$\tilde{N}(t) = \frac{\left(\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right)}{2\tilde{q}} \times \left( \frac{\left(1 - \exp\left(\frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}} + \frac{\left(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right)^3}{4\tilde{q}^3} \times \ln \left| \frac{N_0 + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N_0 + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right|\right)}{\exp\left(\frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}} + \frac{\left(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}\right)^3}{4\tilde{q}^3} \times \ln \left| \frac{N_0 + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N_0 + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right| - 1\right)} \right). \quad (2.78)$$

Итак, полученное решение дифференциального уравнения (2.54) позволяет определить второе действие модели (рисунок 7) – "Применить математическую модель изменения количества необратимо движущихся дислокаций в структуре минерала". Оно заключается в вычислении выражения (2.78) при  $t = 1, 2, \dots, t_\xi$ .

Определим следующее действие – "Применить математическую модель минерала при упругопластическом деформировании для определения нечеткого эффективного тензора модулей упругости". Для этого введем понятие нечеткого тензора. Нечетким тензором  $\tilde{Q}$ , определенным на некоторой тензорной предметной области  $Y$ , называется множество пар:

$$\tilde{Q} = \{(\mu_Q^*(\mathbf{X}), \mathbf{X})\}, \quad \forall \mathbf{X} \in Y, \quad (2.79)$$

где для каждого элемента  $\mathbf{X} \in Y$ , являющегося тензорной величиной, степень  $\mu_Q^*$  его принадлежности тензору  $\tilde{Q}$  задается с помощью функции принадлежности  $\mu_Q^*(\mathbf{X})$ , при этом  $\mu_Q^*(\mathbf{X}) \in [0, 1]$ .

Тогда, согласно данному определению, нечеткий эффективный тензор модулей упругости минерала представляет собой множество пар:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}^{(efm)} &= \left\{ \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}^{(efm)} \right), \mathbf{C}^{(efm)} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[1]}^{(efm)} \right), \mathbf{C}_{[1]}^{(efm)} \right), \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[2]}^{(efm)} \right), \mathbf{C}_{[2]}^{(efm)} \right), \dots, \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[h]}^{(efm)} \right), \mathbf{C}_{[h]}^{(efm)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

при этом  $\forall \mathbf{C}^{(efm)} \in Z$ , где  $Z$  – предметная область (базисный диапазон) нечеткого тензора  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}$ ; квадратные скобки с индексом у тензоров указывают на порядок (номер) пары в нечетком множестве  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}$ .

Рассмотрим, каким образом будет вычисляться величина  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}$  в некоторый момент времени  $t = 1$ . Для других моментов времени  $t = 0, 2, 3, \dots, t_\xi$  данный тензор будет определяться аналогичным образом. Итак, на основе предыдущего действия "Применить математическую модель изменения количества необратимо

движущихся дислокаций в структуре минерала" был получен нечеткий параметр  $\tilde{N}(t=1)$ . При этом, так как функции принадлежности параметров  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$ , и  $\tilde{g}$  имеют гармонический вид, то и нечеткий параметр  $\tilde{N}(t)$ , определяемый (2.78) – имеет функцию принадлежности гармонического вида (рисунок 8).

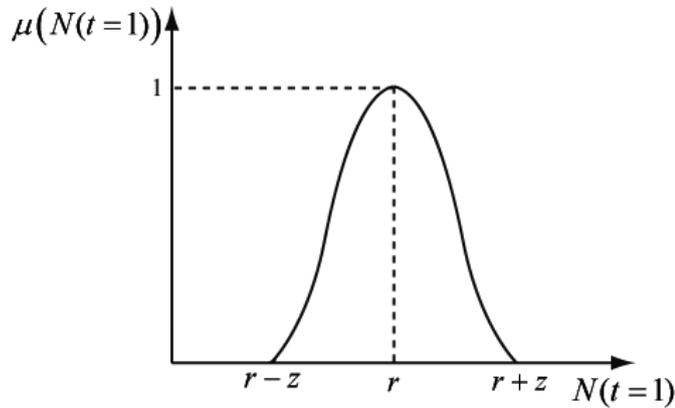


Рисунок 8 – Функция принадлежности нечеткого параметра  $\tilde{N}(t=1)$

Исходя из (2.80), для определения тензора  $\overset{\text{(efm)}}{\tilde{C}}(t=1)$  необходимо установить элементы множества  $\left\{ \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(efm)}}{C}_{[1]}(t=1) \right), \overset{\text{(efm)}}{C}_{[1]}(t=1) \right), \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(efm)}}{C}_{[2]}(t=1) \right), \overset{\text{(efm)}}{C}_{[2]}(t=1) \right), \dots \right.$   
 $\left. \dots, \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(efm)}}{C}_{[h]}(t=1) \right), \overset{\text{(efm)}}{C}_{[h]}(t=1) \right) \right\}$ .

Определим первую пару данного множества  $\left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(efm)}}{C}_{[1]}(t=1) \right), \overset{\text{(efm)}}{C}_{[1]}(t=1) \right)$ . Для вычисления  $\overset{\text{(efm)}}{C}_{[1]}(t=1)$  необходимо из носителя функции принадлежности параметра  $\tilde{N}(t=1)$  (на рисунке 8 носителем является область  $[r-z, r+z]$ ) выбрать значение  $N_{[1]} = \eta$ , где  $\eta$  – крайнее левое значение из носителя (в нашем случае  $\eta = r-z$ ). Если выбранное  $N_{[1]}$  не является целым, то увеличить  $N_{[1]}$  на некоторый минимальный шаг и еще раз проверить  $N_{[1]}$  на предмет того, что полученное им значение является целым. И так до тех пор, пока условие " $N_{[1]}$  – целое" не станет истинным. Потом найденное целое  $N_{[1]}$  подставляем в

выражение (2.48), в итоге для  $\mathbf{C}_{[1]}^{(efm)}(t=1)$  получим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{[1]}^{(efm)}(t=1) = & \left\langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right) \times \right. \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \quad (2.81) \\
& \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left. \right\rangle^{-1} > \times \\
& \times \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \\
& \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[1]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left. \right\rangle^{-1} >^{-1}.
\end{aligned}$$

В свою очередь величина  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[1]}^{(efm)}(t=1) \right)$  определяется из выражения:

$$\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[1]}^{(efm)}(t=1) \right) = \mu(N_{[1]}), \quad (2.82)$$

где  $\mu(N_{[1]})$  определяется из функции принадлежности нечеткого параметра  $\tilde{N}(t=1)$  (в нашем случае с помощью рисунка 8).

Перейдем к определению второй пары  $\left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[2]}^{(efm)}(t=1) \right), \mathbf{C}_{[2]}^{(efm)}(t=1) \right)$ . Сначала

значение  $N_{[1]}$  увеличивается на 1 и присваивается величине  $N_{[2]}$ , т.е.  $N_{[2]} = N_{[1]} + 1$ .

Далее вычисляется  $\mathbf{C}_{[2]}^{(efm)}(t=1)$  путем подстановки значения  $N_{[2]}$  в выражение (2.48):

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{[2]}^{(efm)}(t=1) = & \left\langle \mathbf{C}^{(m)} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \left[ \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right] \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \quad (2.83) \\
& - \left\langle \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg] \Bigg\rangle \times \\
& \times \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \left[ \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& - \left\langle \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[2]}} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg] \Bigg\rangle^{-1}.
\end{aligned}$$

После этого определяется  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[2]}^{(efm)}(t=1) \right)$ :

$$\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[2]}^{(efm)}(t=1) \right) = \mu(N_{[2]}). \quad (2.84)$$

Процедура определения третьей и последующих пар множества  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t=1)$

аналогична определению второй пары. Вычисление пар в множестве  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t=1)$  завершается по достижению  $N_{[i]}$  ( $i$  – номер пары в множестве) значения  $n$ , такого, что разница между  $n$  и  $\xi$ , где  $\xi$  – крайнее правое значение из носителя (в нашем случае  $\xi = r + z$ ), будет меньше 1. Таким образом, в рассматриваемом случае вычисление  $r$ -й пары  $\left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[r]}^{(efm)}(t=1) \right), \mathbf{C}_{[r]}^{(efm)}(t=1) \right)$  происходит, когда для значения  $N_{[r]}$  после очередного увеличения на 1, выполнится условие:  $N_{[r]} - (r + z) < 1$ .

Обобщая полученные результаты, приходим к выводу, что процедура определения  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t)$  сводится к: 1) вычислению для каждого целого численного значения в носителе нечеткого параметра  $\tilde{N}(t=1)$ , величины четкого тензора  $\mathbf{C}^{(efm)}(t)$ , определяемого выражением (2.48); 2) сопоставлению полученным величинам четких тензоров соответствующих степеней принадлежности.

Всю приведенную выше процедуру определения для тензора  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t)$  с помощью операции объединения одноточечных множеств можно записать в следующей компактной форме:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t) = \left\{ \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}^{(efm)}(t) \right), \mathbf{C}^{(efm)}(t) \right) \right\} = \bigcup_{i=1}^{h(\tilde{N}(t))} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t) \right), \mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t) \right), \quad (2.85)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t) \right) = \mu \left( N_{[i]}(\tilde{N}(t)) \right)$ ;  $\mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t) = \left\langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \times \right. \right. \right.$

$$\left. \left. \times \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right. \right. -$$

$$\begin{aligned}
& - \left\langle \mathbf{C}^{(lm)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg]^{-1} > \times \\
& \times \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \left[ \mathbf{C}^{(lm)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& - \left\langle \mathbf{C}^{(lm)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg]^{-1} >^{-1};
\end{aligned}$$

$h(\tilde{N}(t))$  – функция, определяющая количество упорядоченных пар в нечетком множестве  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t)$ .

Именно подобной формой записи мы будем пользоваться в дальнейшем при определении последующих нечетких тензоров, встречающихся в рассматриваемой работе.

Итак, действие "Применить математическую модель минерала при упругопластическом деформировании для определения нечеткого эффективного тензора модулей упругости" заключается в вычислении с помощью (2.85) –

нечеткого тензора  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t)$  при  $t = 0, 1, \dots, t_\xi$ .

Перейдем к последнему действию "Применить математическую модель минерала при упругопластическом деформировании для определения нечеткого эффективного тензора упругих податливостей". Оно заключается в вычислении

нечеткого тензора  $\tilde{\mathbf{C}}' (t)$  при  $t = 0, 1, \dots, t_\xi$  на основе следующего выражения:

$$\tilde{\mathbf{C}}' (t) = \left\{ \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}' (t) \right), \mathbf{C}' (t) \right) \right\} = \bigcup_{i=1}^{h(\tilde{N}(t))} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]} (t) \right), \mathbf{C}'_{[i]} (t) \right), \quad (2.86)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]} (t) \right) = \mu \left( N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right) \right)$ ;  $\mathbf{C}'_{[i]} (t) = \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \times \right. \right.$

$$\times \left. \left. \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right.$$

$$\times \left. \left. \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(m)} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(m)} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right] \right] \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(m)} \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]} \left( \tilde{N}(t) \right)} f_i (n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(m)} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - < \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \\
& \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(m)} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg]^{-1} >^{-1}.
\end{aligned}$$

Полученные результаты позволяют перейти к разработке следующей математической модели минерала в близком к идеально-пластическому состоянию.

Рассматриваемое состояние реализуется в минерале, когда начальное количество дислокаций  $N_0$  принимает значения в интервале  $(m_{N_2} + \beta_{N_2}, \infty)$ , где  $m_{N_2} + \beta_{N_2}$  – соответствует правой границе особого интервала нечеткого состояния равновесия  $N = \tilde{N}_2$  динамической системы, описываемой уравнением (2.54).

Применяя мультикомпонентный подход к моделированию, придем к выводу, что разрабатываемая модель минерала в близком к идеально-пластическому состоянию эквивалентна представленной выше математической модели минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением. Единственным отличием разрабатываемой модели является то, что функция  $\tilde{N}(t)$  в рассматриваемом состоянии является возрастающей, т.е. модальное значение нечеткого параметра  $\tilde{N}(t)$  с течением времени увеличивается.

Таким образом, математическую модель минерала в близком к идеально-пластическому состоянию можно представить в следующем виде (рисунок 9).

Действия данной модели рассматривать не будем, поскольку они полностью идентичны действиям из компонентной математической модели минерала в упругопластическом состоянии с упрочнением.

Перейдем к разработке заключительной компонентной математической модели, описывающей минерал в оставшихся нечетких состояниях.

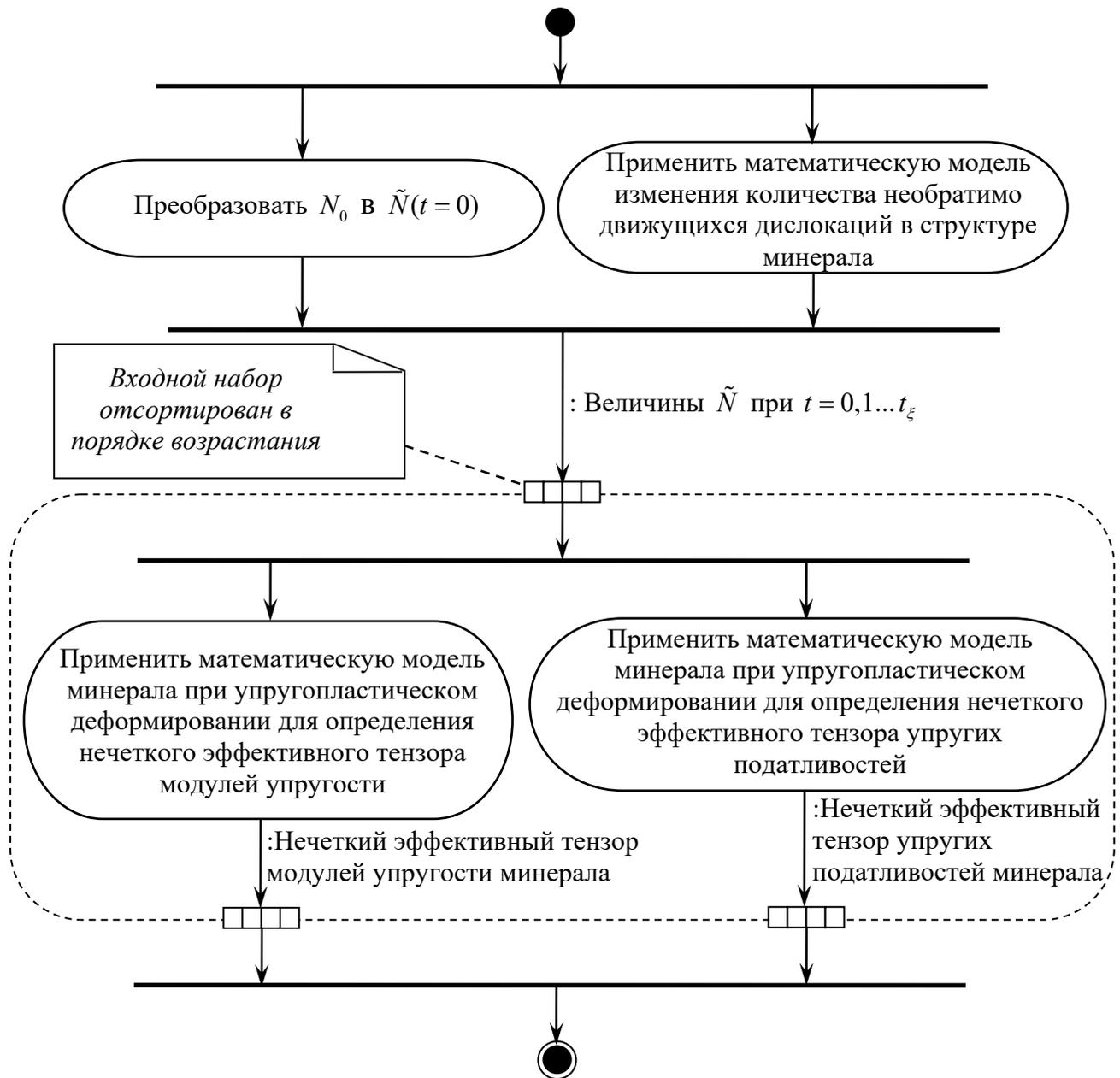


Рисунок 9 – Математическая модель минерала в близком к идеально-пластическому состоянию

Результатом определения деформационных свойств в нечетком упругопластическом с упрочнением, нечетком близком к идеально-пластическому и нечетком пограничном состояниях являются эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей, каждому из которых сопоставляются две степени принадлежности  $\mu_m$  и  $\mu_y$ . Данные степени принадлежности характеризуют соответственно возможности реализации в минерале таких состояний как близкое к идеально-пластическому и упругопластическое с

упрочнением. Если  $\mu_y > \mu_{un}$ , то возможность того, что минерал с течением времени достигнет упругопластического состояния с упрочнением выше, нежели близкого к идеально-пластическому. В этом случае имеем минерал в нечетком упругопластическом состоянии с упрочнением. Когда  $\mu_y < \mu_{un}$  – наоборот, возможность реализации состояния близкого к идеально-пластическому выше, чем упругопластического с упрочнением. Тогда минерал находится в нечетком идеально-пластическом состоянии. И наконец, если  $\mu_y = \mu_{un}$ , то с одинаковой степенью возможности в минерале с течением времени реализуется как упругопластическое состояние с упрочнением, так и близкое к идеально-пластическому. В этом случае минерал находится в нечетком пограничном состоянии.

Исходя из приведенных рассуждений, компонентную математическую модель минерала в нечетких состояниях можно представить в следующем виде (рисунок 10).

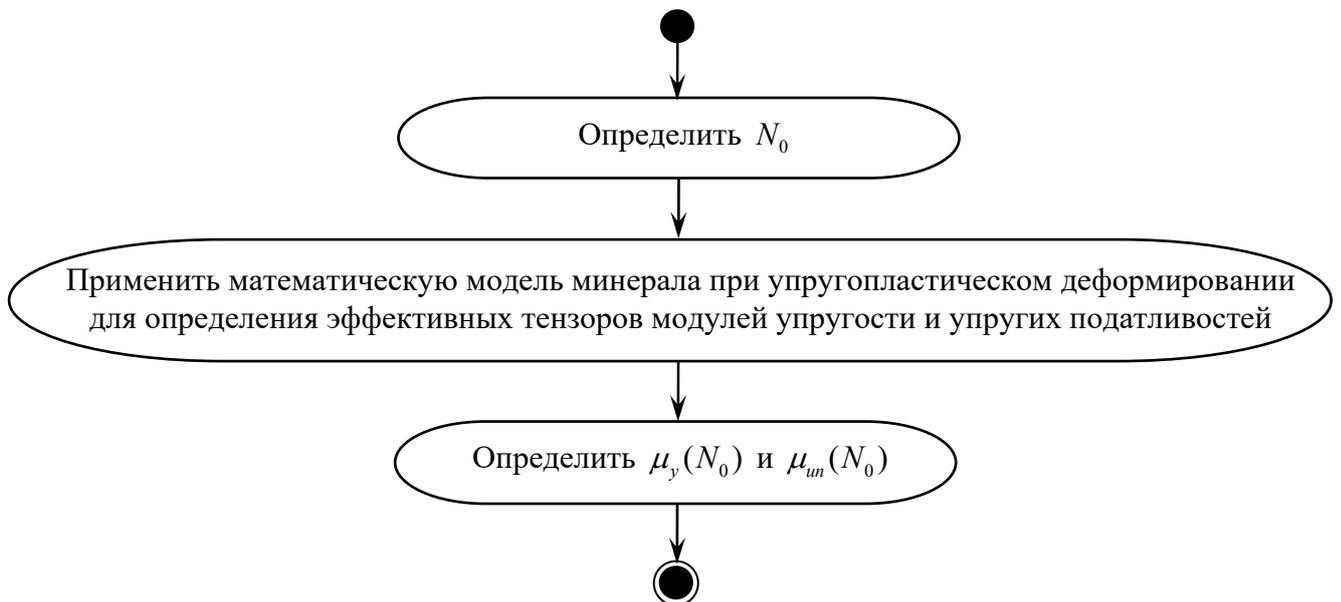


Рисунок 10 – Компонентная математическая модель минерала в нечетких состояниях

Первое действие в рассматриваемой модели "Определить  $N_0$ " заключается в установлении начального количества дислокаций, совершающих движение в

структуре минерала. Второе действие "Применить математическую модель минерала при упругопластическом деформировании для определения эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей" состоит в вычислении выражений:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{*}{}^{(efm)} = & \left\langle \mathbf{C}^{(m)} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \left[ \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right. \right. \\ & \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\ & \left. \left. - \left\langle \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right] \right\rangle^{-1} > \times$$

$$\times \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \left[ \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right\rangle \times$$

$$\times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} -$$

$$\left\langle \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right] \right\rangle^{-1} >^{-1};$$

$$\mathbf{C}'^{*}{}^{(efm)} = \left\langle \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(m)} \left[ \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right\rangle \times$$

$$\times \mathbf{C}^{(m)} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \quad (2.88)$$

$$\left\langle \mathbf{C}^{(1m)} - \mathbf{C}^{(m)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg)^{-1} \Bigg]^{-1} \times \\
& \times \left\langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right] \right) \times \right. \\
& \quad \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& \quad \left. - \left\langle \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \right\rangle \times \right. \\
& \quad \left. \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Bigg]^{-1} \right\rangle^{-1}.
\end{aligned}$$

Последнее действие рассматриваемой модели "Определить  $\mu_y(N_0)$  и  $\mu_{un}(N_0)$ " основываются на вычислении выражений (2.63).

Таким образом, деформационные свойства минерала в нечетких состояниях описываются двумя нечеткими тензорами:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left\{ \left( \mu_y^* \left( \mathbf{C}_{[1]}^* \right), \mathbf{C}_{[1]}^* \right), \left( \mu_{un}^* \left( \mathbf{C}_{[2]}^* \right), \mathbf{C}_{[2]}^* \right) \right\} \quad (2.89)$$

И

$$\tilde{\mathbf{C}}' = \left\{ \left( \mu_y^* \left( \mathbf{C}'_{[1]} \right), \mathbf{C}'_{[1]} \right), \left( \mu_{un}^* \left( \mathbf{C}'_{[2]} \right), \mathbf{C}'_{[2]} \right) \right\}, \quad (2.90)$$

где  $\mathbf{C}_{[1]}^* = \mathbf{C}_{[2]}^* = \mathbf{C}^*$ ,  $\mathbf{C}'_{[1]} = \mathbf{C}'_{[2]} = \mathbf{C}'^*$ ,  $\mu_y^* \left( \mathbf{C}^* \right) = \mu_y^* \left( \mathbf{C}'^* \right) = \mu_y(N_0)$ ,

$$\mu_{un}^* \left( \mathbf{C}^* \right) = \mu_{un}^* \left( \mathbf{C}'^* \right) = \mu_{un}(N_0).$$

Итак, все компонентные математические модели функциональной подзадачи определения деформационных свойств минерала разработаны. Объединим разработанные компонентные модели посредством согласования их по функциям в одну мультикомпонентную математическую модель (рисунок 11).

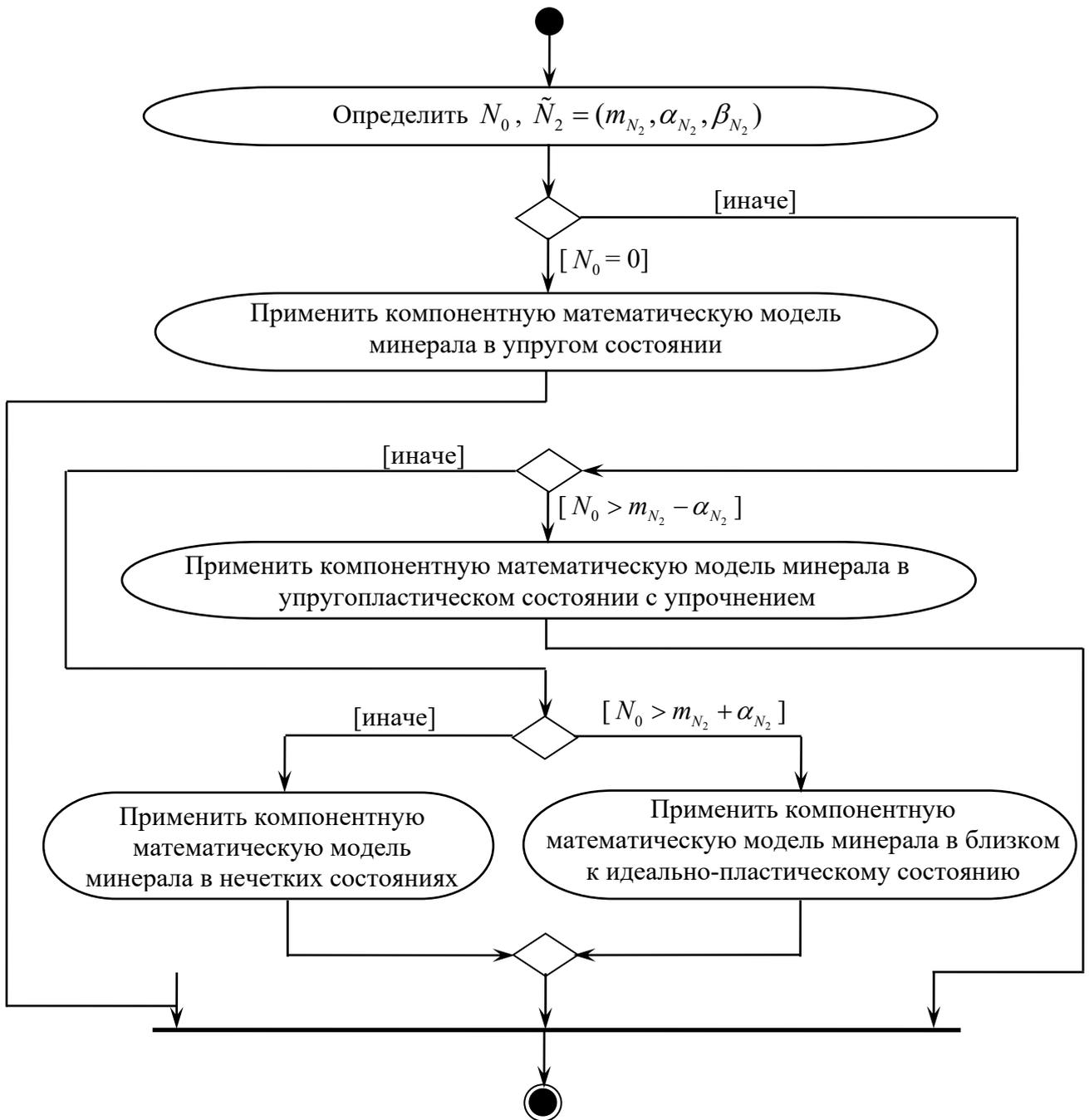


Рисунок 11 – Мультикомпонентная математическая модель минерала относительно деформационных свойств

### 2.3.2. Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными флюидом порами относительно деформационных свойств

Разработаем содержательную модель исследуемого геоматериала. Минерал с наполненными флюидом порами представляет собой объект, состоящий из плотную прилегающих друг к другу зерен, в каждом из которых находится пора,

заполненная газом (или жидкостью) под давлением. Зерна в минерале с наполненными флюидом порами случайно ориентированы в пространстве и являются анизотропными. Исследуемый геоматериал обладает мультифрактальной структурой, а его зерна взаимодействуют между собой посредством наведения упругого поля другими зернами. Каждое зерно и пору в нем аппроксимируем эллипсоидом.

Перейдем ко второму этапу – построению математической модели. Каждое зерно и пору в геоматериале аппроксимируем эллипсоидом. Тогда математическим эквивалентом исследуемого минерала с наполненными флюидом порами является неограниченная сплошная среда со случайно-ориентированными в пространстве эллипсоидальными неоднородностями, в каждой из которых вложен эллипсоид, соответствующий поре с газом (или жидкостью). Ввиду мультифрактальности рассматриваемого геоматериала, такая сплошная среда также является мультифрактальной.

Разделим мультифрактальную сплошную среду, соответствующую минералу с наполненными флюидом порами, на две вложенные одна в другую и связанные между собой фрактальные среды. Первая из них, назовем ее минеральной фрактальной средой, является трехмерной сплошной средой со случайными неоднородностями, соответствующими зернам. А вторая – минеральная фрактальная среда с порами, представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами первой фрактальной среды со случайным полем эллипсоидальных неоднородностей в виде наполненных флюидом пор, разнесенных в пространстве.

Разработаем для каждой из данных фрактальных сред свою математическую модель. В результате получим взаимосвязанные между собой, или другими словами "вложенные" одна в другую математические модели. Причем последняя из них – математическая модель минеральной фрактальной среды с порами, будет описывать деформационные свойства минерала с наполненными флюидом порами как целого.

Математическая модель минеральной фрактальной среды полностью

совпадает с разработанной выше мультикомпонентной математической моделью минерала относительно деформационных свойств, поэтому данную модель рассматривать не будем.

Перейдем к разработке математической модели минеральной фрактальной среды с порами. Построение такой модели полностью зависит от того, описываются ли деформационные свойства первой фрактальной среды четкими или нечеткими эффективными упругими константами.

Рассмотрим случай, когда эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей минеральной фрактальной среды имеют четкий вид.

Итак, исследуем минеральную фрактальную среду с порами, представляющую собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами  $\overset{(efm)}{C}$  со случайным полем изолированного флюида в эллипсоидальных областях  $V$ .

Так как роль модуля упругости флюида играет первоначальное давление  $p_0$  [19], то в результате получим среду с упругими свойствами  $\overset{(efm)}{C}$  (назовем ее минеральной матрицей), в которой находятся эллипсоидальные области, модуль упругости которых отличается на величину  $p_0 \mathbf{I} - \overset{(efm)}{C}$ , равного  $\overset{(1mp)}{C}$ ; где  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор. Тогда полученную среду с неоднородностями будем характеризовать тензором модулей упругости, равного

$\overset{(mp)}{C}(\mathbf{x}) = \overset{(efm)}{C} + \overset{(1mp)}{C} W(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $W(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.  $W(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$ ;  $\overset{(1mp)}{C}$  –

случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате

$\overset{(mp)}{C}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор  $\overset{(0mp)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$

непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(1mp)}{C} = 0$  в

минеральной матрице при заданных внешних силах. А через тензор  $\varepsilon^{(mp)}(x)$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно содержательной модели, а также используя работу [40] в рамках метода аналогии, для тензора  $\varepsilon^{(mp)}(x)$  получим следующее уравнение:

$$\varepsilon^{(mp)}(x) + \int \mathbf{K}^{(mp)}(x-x') \mathbf{C}^{(1mp)(mp)} \varepsilon^{(mp)}(x') W(x') dx' = \varepsilon^{(0mp)}, \quad (2.91)$$

где оператор  $\mathbf{K}^{(mp)} = -\text{def } \mathbf{G}^{(m)} \text{ def}$ ;  $\mathbf{G}^{(m)}$  – тензорная функция Грина минеральной матрицы.

Из (2.91) для поля деформаций  $\varepsilon^{(mp)}$  внутри эллипсоидальной неоднородности или в области  $V$  получим уравнение:

$$W(x) \varepsilon^{(mp)}(x) + \int \mathbf{K}^{(mp)}(x-x') \mathbf{C}^{(1mp)(mp)} \varepsilon^{(mp)}(x') W(x') dx' = W(x) \varepsilon^{(0mp)}. \quad (2.92)$$

С другой стороны, применяя метод аналогии с исследованиями из работы [53], получим поле деформаций  $\varepsilon^{(imp)}$  для изолированного включения в рамках рассматриваемой модели:

$$\varepsilon^{(imp)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1} \varepsilon^{(0mp)}, \quad (2.93)$$

$\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  $\mathbf{H}^{(mp)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{K}^{(mp)}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{A}$  – тензор,

определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства, переводящее эллипсоидальную область, занятую включением, в

единичный шар;  $\mathbf{K}^{(mp)}(k)$  – преобразование Фурье-ядра

$K_{ijkl}^{(mp)}(x-x') = -[\nabla_k \nabla_l G_{ij}^{(m)}(x-x')]_{(ik)(jl)}$ , где круглые скобки указывают на симметризацию по  $ik$  и  $jl$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле

деформаций внутри включения воспользуемся комплексным методом самосогласованного поля.

В результате в рамках предложенного комплексного метода самосогласованного поля для поля деформаций внутри любого включения получим:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(mp)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)}, \quad (2.94)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)}$  – поле деформаций, в котором находится каждое из включений.

Решая совместно (2.94) и (2.92), для поля  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)}$  получим:

$$\begin{aligned} & W(\mathbf{x}) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} + \\ & + \int \mathbf{K}^{(mp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} W(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}) d\mathbf{x}' = W(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(0mp)}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Полученное уравнение усредним по ансамблю полей включений:

$$\begin{aligned} & \langle W(\mathbf{x}) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} \rangle + \\ & + \int \mathbf{K}^{(mp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} W(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}' = \langle W(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(0mp)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Поскольку поля  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0mp)}$  являются постоянными, получим:

$$\begin{aligned} & \langle W(\mathbf{x}) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} \rangle + \\ & + \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} \int \mathbf{K}^{(mp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} W(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}' = \langle W(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(0mp)} \rangle \end{aligned} \quad (2.97)$$

или

$$\begin{aligned} & \left[ \langle W(\mathbf{x}) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} \rangle + \right. \\ & \left. + \int \mathbf{K}^{(mp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1 (Emp)} W(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}' \right] \boldsymbol{\varepsilon}^{(Emp)} = n \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0mp)}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

где  $\langle W(\mathbf{x}) \rangle = n$  – концентрация неоднородностей.

Используя работу [53] в рамках метода аналогии, окончательно для эффективного тензора модулей упругости  $\mathbf{C}^{(efmp)}$  имеем:

$$\mathbf{C}^{(efmp)} = \mathbf{C}^{(efm)} + \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - \mathbf{H} \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (2.99)$$

где  $V^{(ELmp)}$  и  $V^{(BVmp)}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в минеральной фрактальной среде с порами.

Блоки Вороного – структурные элементы, получаемые следующим образом. Для каждого включения в рассматриваемой фрактальной среде проводятся векторы, соединяющие центр этого включения с центрами соседних, и через середины полученных векторов перпендикулярно к ним восстанавливаются плоскости. Полученные полиэдры и будут представлять собой блоки Вороного минеральной фрактальной среды с порами.

В свою очередь эффективный тензор упругих податливостей  $\mathbf{C}'^{(efmp)}$  определяется выражением:

$$\mathbf{C}'^{(efmp)} = \left( \mathbf{C}^{(efm)} + \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - \mathbf{H} \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}^{(1mp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}. \quad (2.100)$$

Рассмотрим второй случай – эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей минеральной фрактальной среды имеют нечеткий вид, т.е. описываются соответственно выражениями (2.85) и (2.86) или (2.89) и (2.90).

Применим принцип обобщения к выражениям (2.99) и (2.100). Более подробно с данным принципом можно ознакомиться в работе [68]. Тогда для

нечеткого эффективного тензора модулей упругости  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmp)}(t)$  получим следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(efmp)}(t) = h \left( \tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t) \right) \bigcup_{i=1} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \right), \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \right), \quad (2.101)$$

$$\text{где } \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \right) = \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t) \right); \quad \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) = \mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t) + \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(mp)}(t) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]}^{(mp)}(t) \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(mp)}(t) \cdot \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \quad h \left( \tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t) \right) -$$

функция, определяющая количество упорядоченных пар в нечетком множестве  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t)$ ;

квадратные скобки с индексом у тензоров указывают на порядок (номер) пары в соответствующих упорядоченных нечетких множествах. Так, например  $\mathbf{C}_{[i]}^{(efm)}(t)$  – четкий тензор, входящий в  $i$ -ю пару тензора  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efm)}(t)$ , представленного в виде нечеткого множества.

В свою очередь нечеткий эффективный тензор упругих податливостей определяется выражением:

$$\tilde{\mathbf{C}}'(t) = h \left( \tilde{\mathbf{C}}'(t) \right) \bigcup_{i=1} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]}(t) \right), \mathbf{C}'_{[i]}(t) \right), \quad (2.102)$$

$$\text{где } \mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]}(t) \right) = \mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]}(t) \right); \quad \mathbf{C}'_{[i]}(t) = \left( \mathbf{C}'_{[i]}(t) + \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(mp)}(t) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]}^{(mp)}(t) \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(mp)}(t) \cdot \mathbf{C}_{[i]}^{(1mp)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \quad h \left( \tilde{\mathbf{C}}'(t) \right) -$$

функция, определяющая количество упорядоченных пар в множестве  $\tilde{\mathbf{C}}'(t)$ .

### **2.3.3. Мультифрактальная математическая модель минерала с флюидными включениями относительно деформационных свойств**

Разработаем содержательную модель исследуемого объекта. Минерал с флюидными включениями представляет собой минерал, который наряду с наполненными газом (или жидкостью) порами в зернах содержит полости, в которых находится газ (или жидкость) под давлением.

При этом каждая полость, называемая флюидным включением, занимает некоторый объем, величина которого больше объема зерна исследуемого минерала. Зерна минерала случайно ориентированы в пространстве, являются анизотропными и взаимодействуют между собой посредством наведения упругого поля другими зернами. Исследуемый геоматериал обладает мультифрактальной структурой.

Перейдем к построению математической модели минерала с флюидными включениями. Математическим эквивалентом такого объекта следует считать неограниченную сплошную среду со случайно-ориентированными в пространстве фрактальными неоднородностями в виде: включений, наполненных газом (или жидкостью) пор и зерен. Такая сплошная среда, ввиду мультифрактальности рассматриваемого геоматериала, также является мультифрактальной.

Произведем разделение мультифрактальной сплошной среды на несколько вложенных одну в другую и связанных между собой фрактальных сред. Первая из них – минеральная фрактальная среда, является трехмерной сплошной средой со случайными фрактальными неоднородностями, соответствующими зернам. Вторая – минеральная фрактальная среда с порами. Она представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами первой фрактальной среды со случайным полем неоднородностей в виде наполненных флюидом пор. И наконец, третья – минеральная фрактальная среда с включениями, является трехмерной сплошной средой с эффективными деформационными свойствами второй фрактальной среды, внутри которой находятся случайно ориентированные неоднородности в виде флюидных

включений, разнесенных в пространстве.

Разработаем для каждой фрактальной среды свою математическую модель. В результате получим взаимосвязанные между собой, или другими словами, "вложенные" одна в другую математические модели, вместе составляющие мультифрактальную математическую модель минерала с флюидными включениями относительно деформационных свойств.

Математические модели для минеральной фрактальной среды и минеральной фрактальной среды с порами были разработаны выше. Так эффективный тензор модулей упругости минеральной фрактальной среды определяется на основе разработанной выше мультикомпонентной математической модели минерала относительно деформационных свойств. В свою очередь для минеральной фрактальной среды с порами эффективный тензор модулей упругости определяется одним из выражений: (2.99) или (2.101).

В связи с этим очевидно, что определив эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей последней фрактальной среды, мы получим деформационные свойства минерала с флюидными включениями как целого.

Итак, рассмотрим минеральную фрактальную среду с включениями. Разработка модели такой среды напрямую зависит от того, является ли эффективный тензор модулей упругости минеральной фрактальной среды с порами – четким, т.е. определяется выражением (2.99) или задается в нечетком виде – с помощью выражения (2.101).

Рассмотрим первый случай, когда эффективный тензор модулей упругости минеральной фрактальной среды с порами имеет четкий вид. Назовем трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами

$C^{(efmp)}$  – минеральной матрицей с порами. Тогда минеральная фрактальная среда с включениями представляет собой минеральную матрицу с порами, в которой задано случайное поле изолированных флюидов в областях  $V$ .

Поскольку роль модуля упругости флюида играет первоначальное давление  $p_0$  [19], то в итоге получим среду с упругими свойствами  $C^{(efmp)}$ , в которой

находятся области  $V$ , модуль упругости которых отличается на величину  $\overset{(1mv)}{C} = p_0 \mathbf{I} - \overset{(efmp)}{C}$ ; где  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор. С учетом этого полученную среду с неоднородностями следует характеризовать тензором модулей упругости, равным  $\overset{(mv)}{C}(\mathbf{x}) = \overset{(efmp)}{C} + \overset{(1mv)}{C} Q(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $Q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$ . Так как  $\overset{(1mv)}{C}$  является случайным четырехвалентным тензором, постоянным в пределах каждой неоднородности и меняющимся скачком на границе эллипсоидов, то  $\overset{(mv)}{C}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор  $\overset{(0mv)}{\varepsilon}$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(1mv)}{C} = 0$  в минеральной матрице с порами при заданных внешних силах. А через тензор  $\overset{(mv)}{\varepsilon}$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно предложенной содержательной модели, уравнению (2.11), а также используя работу [40] в рамках метода аналогии, для тензора  $\overset{(mv)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$  получим:

$$\overset{(mv)}{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \int \overset{(mv)}{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \overset{(1mv)(mv)}{C} \overset{(0mv)}{\varepsilon}(\mathbf{x}') Q(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \overset{(0mv)}{\varepsilon}, \quad (2.103)$$

где оператор  $\overset{(mv)}{K} = -def \overset{(mp)}{G} def$ ;  $\overset{(mp)}{G}$  – тензорная функция Грина минеральной матрицы с порами.

Сравнив полученное выражение с уравнением (2.91), придем к выводу об их математической эквивалентности. Отсюда решая уравнение (2.103) аналогичным методом, что и для (2.91), получим следующие выражения для определения эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей рассматриваемой минеральной фрактальной среды с включениями:

$$\overset{(efmv)}{C} = \overset{(efmp)}{C} + \left\langle \frac{\overset{(ELmv)}{V}}{\overset{(Bfmv)}{V}} \overset{(1mv)}{C} \left( \mathbf{I} + \overset{(mv)}{Z} \cdot \overset{(1mv)}{C} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \mathbf{I} - \mathbf{Z} \left\langle \frac{(ELmv)}{V} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \\
\mathbf{C}' &= \left( \mathbf{C} + \left\langle \frac{(ELmv)}{(BVmv)} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \times \right. \\
& \left. \times \left( \mathbf{I} - \mathbf{Z} \left\langle \frac{(ELmv)}{V} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{2.105}$$

где  $\frac{(ELmv)}{V}$  и  $\frac{(BVmv)}{V}$  – соответственно объемы неоднородности и блока Вороного в рассматриваемой минеральной фрактальной среде с включениями;

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{K}(\mathbf{A}k) dS; \mathbf{A} - \text{тензор, определяющий невырожденное аффинное}$$

преобразование трехмерного пространства, переводящее область, занятую включением, в единичный шар;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Рассмотрим второй случай, когда эффективный тензор модулей упругости минеральной фрактальной среды с порами задается в нечетком виде, т.е. определяется выражением (2.101).

Применим принцип обобщения, сформулированный в [68], к выражениям (2.104) и (2.105). Тогда для нечеткого эффективного тензора модулей упругости

$\tilde{\mathbf{C}}^{(efmt)}(t)$  получим следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efmp)}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efmv)}(t) \right), \mathbf{C}_{[i]}^{(efmv)}(t) \right), \tag{2.106}$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efmv)}(t) \right) = \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \right); \mathbf{C}_{[i]}^{(efmv)}(t) = \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) + \left\langle \frac{(ELmv)}{(BVmv)} \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{[i]}^{(mv)}(t) \times \right. \right.$

$\left. \times \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \right\rangle^{-1} \left( \mathbf{I} - \mathbf{Z}_{[i]}^{(mv)}(t) \left\langle \frac{(ELmv)}{V} \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{[i]}^{(mv)}(t) \cdot \mathbf{C}_{[i]}^{(efmp)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \quad h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efmp)}(t)\right) -$

функция, определяющая количество упорядоченных пар в нечетком множестве  $\tilde{C}^{(efmp)}(t)$ ; квадратные скобки с индексом у тензоров указывают на порядок (номер) пары в соответствующих упорядоченных нечетких множествах. Так, например,  $C_{[i]}^{(efmv)}(t)$  – четкий тензор, входящий в  $i$ -ю пару тензора  $\tilde{C}^{(efmp)}(t)$ , представленного в виде нечеткого множества.

В свою очередь нечеткий эффективный тензор упругих податливостей определяется следующим выражением:

$$\tilde{C}'^{(efmv)}(t) = h \left( \tilde{C}'^{(efmp)}(t) \right) \bigg|_{i=1} \left( \mu_C^* \left( C_{[i]}'^{(efmv)}(t) \right), C_{[i]}'^{(efmv)}(t) \right), \quad (2.107)$$

$$\text{где } \mu_C^* \left( C_{[i]}'^{(efmv)}(t) \right) = \mu_C^* \left( C_{[i]}'^{(efmp)}(t) \right); C_{[i]}'^{(efmv)}(t) = \left( C_{[i]}'^{(efmp)}(t) + \left\langle \frac{V^{(ELmv)}}{(BV^{mv})} C_{[i]}^{(1mv)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{[i]}^{(mv)}(t) \times \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \times C_{[i]}^{(1mv)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \left( \mathbf{I} - \mathbf{Z}_{[i]}^{(mv)}(t) \left\langle \frac{V^{(ELmv)}}{(BV^{mv})} C_{[i]}^{(1mv)}(t) \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{[i]}^{(mv)}(t) \cdot C_{[i]}^{(1mv)}(t) \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}; h \left( \tilde{C}'^{(efmp)}(t) \right) -$$

функция, определяющая количество упорядоченных пар в  $\tilde{C}'^{(efmp)}(t)$ .

### 2.3.4. Мультифрактальная математическая модель горной породы относительно деформационных свойств

Разработаем содержательную модель горной породы относительно деформационных свойств. Горная порода представляет собой геоматериал мультифрактальной структуры, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу минералов с флюидными включениями, каждый из которых принадлежит к какому-то одному определенному виду. При этом минералы с флюидными включениями, относящиеся к одному виду, имеют идентичные деформационные свойства.

Минералы с флюидными включениями в горной породе случайно

ориентированы в пространстве, являются анизотропными, обусловленными преимущественной ориентацией зерен. В противном случае, если ориентация зерен случайна, то минерал будет изотропным. Минералы взаимодействуют между собой посредством упругого поля напряжений или деформаций. Не теряя общности, в качестве объекта дальнейших исследований примем горную породу, состоящую из трех видов минералов с жидкостными включениями.

Перейдем к построению математической модели. Математическим эквивалентом горной породы является трехмерная неограниченная сплошная среда с тремя типами фрактальных неоднородностей, случайно-ориентированных в пространстве. При этом каждый тип неоднородности соответствует минералам с флюидными включениями одного вида. Рассматриваемая сплошная среда, ввиду мультифрактальности горной породы, также является мультифрактальной.

Разделим данную мультифрактальную сплошную среду на три вложенных одна в другую фрактальных сред. Причем свойства каждой последующей фрактальной среды основываются на свойствах предыдущей. В итоге такого деления получим: трехминеральную, двухминеральную и одноминеральную горно-породные фрактальные среды. Разработаем для каждой из них – математическую модель, позволяющую определить соответствующие эффективные упругие константы. При таком мультифрактальном подходе, как и в предыдущих случаях, математическая модель последней фрактальной среды опишет деформационные свойства горной породы как целого.

Одноминеральная горно-породная фрактальная среда представляет собой трехмерную неограниченную сплошную среду со случайно ориентированными в пространстве неоднородностями одного типа, которые соответствуют одному виду минералов с жидкостными включениями. В реальных наблюдениях такая среда будет соответствовать модели сплошной среды мономинеральной горной породы.

Возникает естественный вопрос, какой из трех типов неоднородностей из исходной мультифрактальной сплошной среды следует использовать в одноминеральной горно-породной фрактальной среде?

Чтобы ответить на этот вопрос, для каждого типа неоднородности в мультифрактальной сплошной среде необходимо измерить их концентрацию. В результате получим:  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  – концентрации, принадлежащие соответственно первому, второму и третьему типу неоднородностей. Тогда максимальная из данных концентраций, т.е.  $n_{\max} = \max(n_1, n_2, n_3)$ , укажет на тип неоднородности, используемый в одноминеральной горно-породной фрактальной среде.

Перейдем к разработке математической модели, позволяющей определить эффективный тензор модулей упругости одноминеральной горно-породной фрактальной среды. Такая среда моделируется посредством трехмерной неограниченной сплошной среды со случайно ориентированными в пространстве и расположенными вплотную друг к другу неоднородностями соответствующего типа, концентрация которых в мультифрактальной среде максимальна.

Тензор модулей упругости неоднородности в этой сплошной среде равен эффективному упругому модулю  $\overset{(efmt)}{C}$  или  $\overset{(efmt)}{\tilde{C}}$ , которые определяются на основе ранее разработанной мультифрактальной математической модели минерала с жидкостными включениями. Дальнейшая разработка математической модели полностью зависит от того, имеет ли тензор модулей упругости неоднородности четкий или нечеткий вид. Рассмотрим случай, когда он имеет четкий вид.

В виду того, что каждая фрактальная неоднородность в пространстве случайно ориентирована, тензор  $\overset{(efmv)}{C}$  – случайная величина. Заменяем рассматриваемую сплошную среду с неоднородностями на эквивалентную в первом приближении, упругие свойства которой характеризуются тензором модуля упругости, равного усредненным значениям  $\langle \overset{(efmv)}{C} \rangle$ . Данную среду назовем минеральной матрицей с включениями.

Поместим в эту матрицу фрактальные неоднородности. Тем самым в результате получим сплошную среду, эквивалентную в последнем приближении одноминеральной горно-породной фрактальной среде.

Итак, мы имеем минеральную матрицу с включениями с упругими

свойствами  $\langle \overset{(efmv)}{C} \rangle$ , в которой находятся неоднородности, модуль упругости которых отличается на величину  $\overset{(logp)}{C} = \overset{(efmv)}{C} - \langle \overset{(efmv)}{C} \rangle$ . Тогда полученную среду с неоднородностями будем характеризовать тензором модулей упругости, равным  $\overset{(ogp)}{C}(\mathbf{x}) = \langle \overset{(efmv)}{C} \rangle + \overset{(logp)}{C} V(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $V(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.  $V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$  (поскольку неоднородности вплотную прилегают друг к другу, то  $V(\mathbf{x})$  не принимает нулевых значений);  $\overset{(logp)}{C}$  – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на их границе. В результате  $\overset{(ogp)}{C}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор  $\overset{(0ogp)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(logp)}{C} = 0$  в минеральной матрице с включениями при заданных внешних силах. А через тензор  $\overset{(ogp)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно содержательной модели и уравнению (2.10), имеем следующее

уравнение для  $\overset{(logp)}{\varepsilon}$ :

$$\overset{(logp)}{\varepsilon} + \overset{(ogp)}{K} \overset{(logp)}{C} V \overset{(logp)}{\varepsilon} = - \overset{(ogp)}{K} \overset{(logp)}{C} V \overset{(0ogp)}{\varepsilon}, \quad (2.108)$$

где оператор  $\overset{(ogp)}{K}$  имеет ядро  $K_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l G_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$ ;  $\overset{(mv)}{G}$  – тензорная функция Грина минеральной матрицы с жидкостными включениями.

Для решения полученного уравнения воспользуемся методом аналогий с выражением (2.10). В результате получим следующее выражение для расчета эффективного тензора модулей упругости одноминеральной горно-породной фрактальной среды:

$$\overset{\text{(efogp)}}{\mathbf{C}} = \langle \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(ogp)}}{\mathbf{B}} \cdot \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(ogp)}}{\mathbf{B}} \cdot \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (2.109)$$

Рассмотрим второй случай, когда тензор модулей упругости эллипсоида исследуемой фрактальной среды имеет нечеткий вид, т.е. равен  $\overset{\text{(efmv)}}{\tilde{\mathbf{C}}}$ .

Применим принцип обобщения, сформулированный в [68], к выражению (2.109). Тогда для нечеткого эффективного тензора модулей упругости  $\overset{\text{(efogp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)$  одноминеральной горно-породной фрактальной среды получим следующее выражение:

$$\overset{\text{(efogp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\overset{\text{(efmv)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\overset{\text{(logp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right), \overset{\text{(efogp)}}{\mathbf{C}} \left( \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) \right), \quad (2.110)$$

где  $\mu_C^* \left( \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]} \right), \mu_C^* \left( \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]} \right) \right)$ ;  $\overset{\text{(efogp)}}{\mathbf{C}} \left( \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) =$   
 $= \langle \overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]}(t) \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(ogp)}}{\mathbf{B}}_{[i]}(t) \cdot \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(ogp)}}{\mathbf{B}}_{[i]}(t) \cdot \overset{\text{(logp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right)^{-1} \rangle^{-1}$ ;  $h\left(\overset{\text{(efmv)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)$  и

$h\left(\overset{\text{(logp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)$  – функции, определяющие количество упорядоченных пар в нечетких

множествах  $\overset{\text{(efmv)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)$  и  $\overset{\text{(logp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)$  соответственно; квадратные скобки с индексом у тензоров указывают на порядок (номер) пары в соответствующих упорядоченных нечетких множествах. Так, например  $\overset{\text{(efmv)}}{\mathbf{C}}_{[i]}(t)$  – четкий тензор, входящий в  $i$ -ю пару тензора  $\overset{\text{(efmv)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)$ , представленного в виде нечеткого множества.

Перейдем к двухминеральной горно-породной фрактальной среде. В реальных наблюдениях такая среда будет соответствовать модели сплошной среды полиминеральной горной породы, состоящей из двух видов минералов с жидкостными включениями.

Рассматриваемая фрактальная среда представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами первой среды

(одноминеральной горно-породной фрактальной среды) со случайным полем разнесенных в пространстве неоднородностей соответствующего типа, концентрация которых в исходной мультифрактальной среде равна

$$n_{mid} = \max(\text{delmax}(n_1, n_2, n_3)), \quad (2.111)$$

где оператор  $\text{delmax}$  в этом выражении удаляет из совокупности  $(n_1, n_2, n_3)$  максимальное значение.

Разработаем математическую модель двухминеральной горно-породной фрактальной среды с целью определения для нее эффективного тензора модулей упругости. Разработка данной модели зависит от того, в каком виде (четком или нечетком) задаются: эффективный тензор модулей упругости одноминеральной горно-породной фрактальной среды и тензор модулей упругости неоднородности в рассматриваемой двухминеральной горно-породной фрактальной среде.

Рассмотрим первый случай, когда эффективный тензор модулей упругости одноминеральной горно-породной фрактальной среды и модуль упругости неоднородности в двухминеральной горно-породной фрактальной среде имеют четкий вид, т.е. равны соответственно  $\overset{(\text{efogp})}{C}$  и  $\overset{(\text{efmv})}{C}$ .

Назовем одноминеральной горно-породной матрицей трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами  $\overset{(\text{efogp})}{C}$ . Тогда рассматриваемую фрактальную среду можно заменить эквивалентной ей – одноминеральной горно-породной матрицей с заданным случайным полем изолированных неоднородностей в областях  $V$ , модуль упругости которых отличается на величину  $\overset{(\text{ldgp})}{C} = \overset{(\text{efmv})}{C} - \overset{(\text{efogp})}{C}$ , где  $\overset{(\text{efmv})}{C}$  – модуль упругости неоднородности, определяемый с помощью ранее разработанной мультифрактальной математической модели минерала с жидкостными включениями.

С учетом этого полученную среду с неоднородностями следует характеризовать тензором модулей упругости, равным  $\overset{(\text{dgp})}{C}(\mathbf{x}) = \overset{(\text{efogp})}{C} + \overset{(\text{ldgp})}{C} Q(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $Q(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.

$$Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in V \\ 0 & \text{при } x \notin V \end{cases}; \quad {}^{(1dgp)}C - \text{случайный четырехвалентный тензор,}$$

постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на их границе. В результате  ${}^{(dgp)}C(x)$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе неоднородностей. Обозначим через тензор  ${}^{(0dgp)}\varepsilon$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  ${}^{(1dgp)}C = 0$  в одноминеральной горно-породной матрице при заданных внешних силах. А через тензор  ${}^{(dgp)}\varepsilon$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно предложенной содержательной модели, уравнению (2.11), а также используя работу [40] в рамках метода аналогии, для тензора  ${}^{(dgp)}\varepsilon(x)$  имеем следующее уравнение:

$${}^{(dgp)}\varepsilon(x) + \int {}^{(dgp)}K(x-x') {}^{(1dgp)}C {}^{(dgp)}\varepsilon(x') Q(x') dx' = {}^{(0dgp)}\varepsilon, \quad (2.112)$$

где оператор  ${}^{(dgp)}K = -def {}^{(ogp)}G def$ ;  ${}^{(ogp)}G$  – тензорная функция Грина одноминеральной горно-породной матрицы.

Сопоставив полученное уравнение с выражением (2.91), придем к выводу об их математической эквивалентности. Отсюда решая уравнение (2.112) аналогичным методом, что и для (2.91), получим следующие выражения для определения эффективных тензоров модулей упругости рассматриваемой двухминеральной горно-породной фрактальной среды:

$${}^{(efdgp)}C = {}^{(efogp)}C + \left\langle \frac{{}^{(ELdgp)}V}{{}^{(BVdgp)}V} {}^{(1dgp)}C \left( \mathbf{I} + {}^{(dgp)}Z \cdot {}^{(1dgp)}C \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - {}^{(dgp)}Z \left\langle \frac{{}^{(ELdgp)}V}{{}^{(BVdgp)}V} {}^{(1dgp)}C \left( \mathbf{I} + {}^{(dgp)}Z \cdot {}^{(1dgp)}C \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (2.113)$$

где  ${}^{(ELdgp)}V$  и  ${}^{(BVdgp)}V$  – соответственно объемы эллипсоида и блока Вороного в

рассматриваемой двухминеральной горно-породной фрактальной среде;

$$\mathbf{Z}^{(dgp)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(dgp)} \mathbf{K} (Ak) dS.$$

Перейдем ко второму случаю, когда эффективный тензор модулей упругости одноминеральной горно-породной фрактальной среды и модуль упругости неоднородности в рассматриваемой двухминеральной горно-породной фрактальной среде имеют нечеткий вид, т.е. равны соответственно  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}$ .

Применяя принцип обобщения к (2.113), для нечеткого эффективного тензора модулей упругости  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}(t)$  получим следующее выражение:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1dgp)}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efogp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)}(t) \right), \mathbf{C} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efogp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)}(t) \right) \right), \quad (2.114)$$

где  $h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}(t)\right)$  и  $h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1dgp)}(t)\right)$  – функции, определяющие количество

упорядоченных пар в нечетких множествах  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}(t)$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(1dgp)}(t)$  соответственно.

$$\begin{aligned} \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efogp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)}(t) \right) &= MEAN \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efogp)} \right), \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)} \right) \right); \quad \mathbf{C} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efogp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)}(t) \right) = \\ &= \mathbf{C}_{[i]}^{(efogp)} + \left\langle \frac{(ELdgp)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{[i]}^{(dgp)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \mathbf{Z}_{[i]}^{(dgp)} \left\langle \frac{(ELdgp)}{(BVdgp)V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{Z}_{[i]}^{(dgp)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1dgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \end{aligned}$$

Перейдем к последнему случаю, когда эффективный тензор модулей упругости одноминеральной горно-породной фрактальной среды или модуль упругости неоднородности в двухминеральной фрактальной среде имеют нечеткий вид, т.е. равны соответственно  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}$  или  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}$ .

В этом случае все четкие тензоры следует преобразовать в одноточечные нечеткие множества. Так для тензоров  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)}$  такое преобразование можно произвести с помощью следующих выражений:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)} = \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}^{(efmv)} \right), \mathbf{C}^{(efmv)} \right), \quad (2.115)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(efogp)} = \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}^{(efogp)} \right), \mathbf{C}^{(efogp)} \right), \quad (2.116)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}^{(efmv)} \right) = \mu_C^* \left( \mathbf{C}^{(efogp)} \right) = 1$ .

Тогда нечеткий эффективный тензор модулей упругости двухминеральной горно-породной фрактальной среды будет определяться выражением (2.114).

Перейдем к разработке математической модели последней фрактальной среды. Определив эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей этой среды, мы получим деформационные свойства горной породы в целом.

Рассматриваемая трехминеральная горно-породная фрактальная среда представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами второй среды (двухминеральной горно-породной фрактальной среды) со случайным полем разнесенных в пространстве неоднородностей соответствующего типа, концентрация которых в исходной мультифрактальной среде равна

$$n_{\min} = \max \left( delmax \left( delmax \left( n_1, n_2, n_3 \right) \right) \right) = \min \left( n_1, n_2, n_3 \right), \quad (2.117)$$

где оператор *delmax* удаляет из совокупности  $(n_1, n_2, n_3)$  максимальное значение.

Построим математическую модель трехминеральной горно-породной фрактальной среды с целью определения для нее тензоров эффективных упругих модулей и упругих податливостей.

Разработка данной математической модели зависит от форм (четкой или нечеткой) эффективного тензора модулей упругости двухминеральной горно-породной фрактальной среды и тензора модулей упругости неоднородности в рассматриваемой трехминеральной горно-породной фрактальной среде.

Рассмотрим первый случай, когда эффективный тензор модулей упругости двухминеральной горно-породной фрактальной среды и модуль упругости неоднородности в трехминеральной горно-породной фрактальной среде имеют

четкий вид, т.е. равны соответственно  $\overset{(efdgp)}{C}$  и  $\overset{(efmv)}{C}$ .

Назовем двухминеральной горно-породной матрицей трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами  $\overset{(efdgp)}{C}$ . Тогда заменим рассматриваемую фрактальную среду двухминеральной горно-породной матрицей с заданным случайным полем изолированных неоднородностей в областях  $V$ , модуль упругости которых отличается на величину  $\overset{(1tgp)}{C} = \overset{(efmv)}{C} - \overset{(efdgp)}{C}$ . При этом  $\overset{(efmv)}{C}$  – модуль упругости неоднородности, определяемого из мультифрактальной математической модели минерала с жидкостными включениями.

С учетом этого, полученную среду с неоднородностями следует характеризовать тензором модулей упругости, равным  $\overset{(tgp)}{C}(\mathbf{x}) = \overset{(efdgp)}{C} + \overset{(1tgp)}{C} W(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}$  – точка среды;  $W(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}; \quad \overset{(1tgp)}{C} - \text{случайный четырехвалентный тензор, постоянный в}$$

пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на их границе. В итоге

$\overset{(tgp)}{C}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе неоднородностей. Обозначим через тензор  $\overset{(0tgp)}{\varepsilon}$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(1tgp)}{C} = 0$  в двухминеральной горно-породной матрице при заданных внешних силах. А через тензор  $\overset{(tgp)}{\varepsilon}$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно предложенной содержательной модели, уравнению (2.11), а также используя работу [40] в рамках метода аналогии, для тензора  $\overset{(tgp)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$  имеем следующее уравнение:

$$\overset{(tgp)}{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \int \overset{(tgp)}{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \overset{(1tgp)}{C} \overset{(tgp)}{\varepsilon}(\mathbf{x}') W(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \overset{(0tgp)}{\varepsilon}, \quad (2.118)$$

где оператор  $\overset{(tgp)}{\mathbf{K}} = -def \overset{(dgp)}{\mathbf{G}} def$ ;  $\overset{(dgp)}{\mathbf{G}}$  – тензорная функция Грина двухминеральной горно-породной матрицы.

Сравнив полученное выражение с уравнением (2.91), приходим к выводу об их математической эквивалентности. Отсюда решая уравнение (2.118) аналогичным способом, что и для (2.91), получим следующие выражения для эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей рассматриваемой трехминеральной горно-породной фрактальной среды:

$$\overset{(eftgp)}{\mathbf{C}} = \overset{(efdgp)}{\mathbf{C}} + \left\langle \frac{\overset{(ELtgp)}{V}}{\overset{(BVtgp)}{V}} \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tgp)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - \overset{(tgp)}{\mathbf{H}} \left\langle \frac{\overset{(ELtgp)}{V}}{\overset{(BVtgp)}{V}} \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tgp)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (2.119)$$

$$\overset{(eftgp)}{\mathbf{C}'} = \left( \overset{(efdgp)}{\mathbf{C}} + \left\langle \frac{\overset{(ELtgp)}{V}}{\overset{(BVtgp)}{V}} \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tgp)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \right) \times \left( \mathbf{I} - \overset{(tgp)}{\mathbf{H}} \left\langle \frac{\overset{(ELtgp)}{V}}{\overset{(BVtgp)}{V}} \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tgp)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tgp)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (2.120)$$

где  $\overset{(ELtgp)}{V}$  и  $\overset{(BVtgp)}{V}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в рассматриваемой трехминеральной горно-породной фрактальной среде;

$$\overset{(tgp)}{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(tgp)}{\mathbf{K}} (Ak) dS.$$

Перейдем ко второму случаю – эффективный тензор модулей упругости двухминеральной горно-породной фрактальной среды и модуль упругости неоднородности в рассматриваемой трехминеральной горно-породной фрактальной среде имеют нечеткий вид, т.е. равны соответственно  $\overset{(efdgp)}{\mathbf{C}}$  и  $\overset{(efmv)}{\mathbf{C}}$ .

Применяя принцип обобщения к (2.119) и (2.120), получим следующее выражение для нечеткого эффективного тензора модулей упругости  $\overset{(eftgp)}{\mathbf{C}}(t)$ :

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(eftgp)}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1tgp)}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right), \mathbf{C} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right) \right), \quad (2.121)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)} \right), \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \right) \right)$ ;  $\mathbf{C} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right) =$

$$= \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)} + \left\langle \frac{(ELtgp)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tgp)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]}^{(tgp)} \left\langle \frac{(ELtgp)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tgp)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1};$$

$h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}(t)\right)$  и  $h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1tgp)}(t)\right)$  – функции, определяющие количество упорядоченных

пар в нечетких множествах  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}(t)$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(1tgp)}(t)$  соответственно.

В свою очередь нечеткий эффективный тензор упругих податливостей трехминеральной горно-породной фрактальной среды определяется следующим выражением:

$$\tilde{\mathbf{C}}'(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1tgp)}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right), \mathbf{C}' \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right) \right), \quad (2.122)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)} \right), \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \right) \right)$ ;  $\mathbf{C}' \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)}(t) \right) = \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdgp)} +$

$$+ \left\langle \frac{(ELtgp)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tgp)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]}^{(tgp)} \left\langle \frac{(ELtgp)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tgp)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}.$$

Перейдем к последнему случаю, когда эффективный тензор модулей упругости двухминеральной горно-породной фрактальной среды или модуль упругости неоднородности в трехминеральной горно-породной фрактальной

среде имеют нечеткий вид, т.е. равны соответственно  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}$  или  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efdgp)}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}$ .

В этом случае все четкие тензоры следует преобразовать в одноточечные нечеткие множества. Так для тензоров  $\overset{(efmv)}{\mathbf{C}}$  и  $\overset{(efdgp)}{\mathbf{C}}$  такое преобразование можно произвести с помощью следующих выражений:

$$\overset{(efmv)}{\tilde{\mathbf{C}}} = \left( \mu_{\mathbf{C}}^* \left( \overset{(efmv)}{\mathbf{C}} \right), \overset{(efmv)}{\mathbf{C}} \right), \quad (2.123)$$

$$\overset{(efdgp)}{\tilde{\mathbf{C}}} = \left( \mu_{\mathbf{C}}^* \left( \overset{(efdgp)}{\mathbf{C}} \right), \overset{(efdgp)}{\mathbf{C}} \right), \quad (2.124)$$

где  $\mu_{\mathbf{C}}^* \left( \overset{(efmv)}{\mathbf{C}} \right) = \mu_{\mathbf{C}}^* \left( \overset{(efdgp)}{\mathbf{C}} \right) = 1$ .

Тогда нечеткие эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей трехминеральной горно-породной фрактальной среды будут соответственно определяться выражениями (2.121) и (2.122).

### **2.3.5. Мультифрактальная математическая модель породного массива относительно деформационных свойств**

Разработаем содержательную модель породного массива относительно деформационных свойств. Породный массив представляет собой геоматериал мультифрактальной структуры, состоящий из горных пород, каждая из которых принадлежит к какому-то одному определенному виду. При этом горные породы, относящиеся к одному виду, имеют идентичные деформационные свойства.

Горные породы в породном массиве случайно ориентированы в пространстве, являются анизотропными, обусловленными преимущественной ориентацией минералов. В противном случае, если ориентация минералов случайна, то горная порода будет изотропной. Горные породы взаимодействуют между собой посредством упругого поля напряжений или деформаций.

Не теряя общности, в качестве объекта дальнейших исследований примем породный массив, состоящий из трех видов горных пород.

Перейдем к построению математической модели. Математическим эквивалентом породного массива является трехмерная неограниченная сплошная

среда с тремя типами неоднородностей, случайно-ориентированных в пространстве. При этом каждый тип неоднородности соответствует горным породам одного вида. Рассматриваемая сплошная среда, ввиду мультифрактальности породного массива, также является мультифрактальной.

Разделим данную мультифрактальную сплошную среду на три вложенных одна в другую фрактальных сред. Причем свойства каждой последующей среды основываются на свойствах предыдущей. В итоге такого деления получим: трехпородную, двухпородную и однопородную массивные фрактальные среды. Разработаем для каждой из них – математическую модель, позволяющую определить соответствующие эффективные упругие константы.

При таком мультифрактальном подходе, как и в предыдущих случаях, математическая модель последней фрактальной среды опишет деформационные свойства породного массива как целого.

Однопородная массивная фрактальная среда представляет собой трехмерную неограниченную сплошную среду со случайно ориентированными в пространстве неоднородностями одного типа, которые соответствуют одному виду горных пород. Причем в качестве неоднородностей в рассматриваемой фрактальной среде следует использовать тот тип, концентрация которого в мультифрактальной сплошной среде является наибольшей, т.е. с концентрацией:

$$m_{\max} = \max(m_1, m_2, m_3), \quad (2.125)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  – концентрации, принадлежащие соответственно первому, второму и третьему типу эллипсоидов. В реальных наблюдениях исследуемая фрактальная структура будет соответствовать модели сплошной среды, описывающей породный массив, состоящий из горных пород одного вида.

Как следует из данной содержательной модели, рассматриваемая и одноминеральная горно-породная фрактальная среды имеют аналогичное описание, отличаясь только видом прилегающих друг к другу неоднородностей (в данном случае в качестве них выступают горные породы).

Отсюда математическая модель однопородной массивной фрактальной среды может быть получена в рамках математического метода аналогий с

моделью, описываемой выражениями (2.109) и (2.110).

В итоге получим математическую модель однопородной массивной фрактальной среды, сводящуюся к следующим уравнениям:

а) если тензор модулей упругости эллипсоидальной неоднородности имеет четкий

вид, т.е. равен  $\overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}$ , то

$$\overset{\text{(efopm)}}{\mathbf{C}} = \left\langle \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(opm)}}{\mathbf{B}} \cdot \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(opm)}}{\mathbf{B}} \cdot \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (2.126)$$

где  $\overset{\text{(opm)}}{\mathbf{B}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{\text{(opm)}}{\mathbf{K}}(Ak) dS$ ;  $\overset{\text{(opm)}}{\mathbf{K}}(k)$  – преобразование Фурье-ядра

$\overset{\text{(opm)}}{K}_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l \overset{\text{(tgp)}}{G}_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-

пространстве;  $\overset{\text{(tgp)}}{\mathbf{G}}$  – тензорная функция Грина горно-породной матрицы;

$\overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}} = \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}} - \left\langle \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}} \right\rangle$ .

б) если тензор модулей упругости эллипсоидальной неоднородности имеет

нечеткий вид, т.е. равен  $\overset{\text{(efopm)}}{\tilde{\mathbf{C}}}$ , то

$$\overset{\text{(efopm)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\overset{\text{(eftgp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\overset{\text{(lopmp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right), \overset{\text{(efopm)}}{\mathbf{C}} \left( \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) \right), \quad (2.127)$$

где  $\mu_C^* \left( \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}_{[i]} \right), \mu_C^* \left( \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]} \right) \right)$ ;  $\overset{\text{(efopm)}}{\mathbf{C}} \left( \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) =$

$$= \left\langle \overset{\text{(eftgp)}}{\mathbf{C}}_{[i]}(t) \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(opm)}}{\mathbf{B}}_{[i]}(t) \cdot \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \overset{\text{(opm)}}{\mathbf{B}}_{[i]}(t) \cdot \overset{\text{(lopmp)}}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right)^{-1} \right\rangle^{-1}; \quad h\left(\overset{\text{(eftgp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right) \quad \text{и}$$

$h\left(\overset{\text{(lopmp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)\right)$  – функции, определяющие количество упорядоченных пар в нечетких

множествах  $\overset{\text{(eftgp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)$  и  $\overset{\text{(lopmp)}}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)$  соответственно.

Перейдем к двухпородной массивной фрактальной среде. В реальных наблюдениях такая структура будет соответствовать модели сплошной среды

породного массива, состоящего из двух видов горных пород.

Рассматриваемая фрактальная среда представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами первой среды (однопородной массивной фрактальной среды) со случайным полем разнесенных в пространстве неоднородностей соответствующего типа, концентрация которых равна

$$m_{mid} = \max(\text{delmax}(m_1, m_2, m_3)), \quad (2.128)$$

где оператор  $\text{delmax}$  в этом выражении удаляет из совокупности  $(m_1, m_2, m_3)$  максимальное значение.

Из представленной описания следует, что содержательная модель рассматриваемой фрактальной среды аналогична такой же модели двухминеральной горно-породной фрактальной среды, отличаясь только типом неоднородности.

В итоге, применяя метод аналогий с ранее полученной моделью двухминеральной горно-породной фрактальной среды, получим следующую математическую модель, описывающую рассматриваемую фрактальную среду:

а) если эффективные тензоры модулей упругости однопородной массивной фрактальной среды и эллипсоида в двухпородной массивной фрактальной среде

задаются в четком виде, т.е. равны соответственно  $\overset{(\text{efopm})}{\mathbf{C}}$  и  $\overset{(\text{eftgp})}{\mathbf{C}}$ , то

$$\begin{aligned} \overset{(\text{efdpm})}{\mathbf{C}} &= \overset{(\text{efopm})}{\mathbf{C}} + \left\langle \frac{\overset{(\text{ELdpm})}{V}}{\overset{(\text{BVdpm})}{V}} \overset{(\text{ldpm})}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(\text{dpm})}{\mathbf{Z}} \cdot \overset{(\text{ldpm})}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ &\times \left( \mathbf{I} - \overset{(\text{dpm})}{\mathbf{Z}} \left\langle \frac{\overset{(\text{ELdpm})}{V}}{\overset{(\text{BVdpm})}{V}} \overset{(\text{ldpm})}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(\text{dpm})}{\mathbf{Z}} \cdot \overset{(\text{ldpm})}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где  $\overset{(\text{ELdpm})}{V}$  и  $\overset{(\text{BVdpm})}{V}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в рассматриваемой двухпородной массивной фрактальной среде;

$\overset{(\text{dpm})}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(\text{dpm})}{\mathbf{K}} (Ak) dS$ ;  $\overset{(\text{dpm})}{\mathbf{K}} (k)$  – преобразование Фурье-ядра

$\overset{(\text{dpm})}{K}_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l \overset{(\text{opm})}{G}_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-

пространстве;  $\overset{(1dpm)}{C} = \overset{(eftgp)}{C} - \overset{(efopm)}{C}$ .

б) если эффективные тензоры модулей упругости однопородной массивной фрактальной среды и (или) эллипсоида в двухпородной массивной фрактальной среде имеют нечеткий вид, то

$$\overset{(efdpm)}{\tilde{C}}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\overset{(efopm)}{\tilde{C}}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\overset{(1dpm)}{\tilde{C}}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \overset{(efopm)}{C}_{[i]}, \overset{(1dpm)}{C}_{[j]}(t) \right), \overset{(efdpm)}{C} \left( \overset{(efopm)}{C}_{[i]}, \overset{(1dpm)}{C}_{[j]}(t) \right) \right), \quad (2.130)$$

где  $\mu_C^* \left( \overset{(efopm)}{C}_{[i]}, \overset{(1dpm)}{C}_{[j]}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \overset{(efopm)}{C}_{[i]} \right), \mu_C^* \left( \overset{(1dpm)}{C}_{[j]} \right) \right)$ ;

$$\overset{(efdpm)}{C} \left( \overset{(efopm)}{C}_{[i]}, \overset{(1dpm)}{C}_{[j]}(t) \right) = \overset{(efopm)}{C}_{[i]} + \left\langle \frac{(ELdpm)}{V} \overset{(1dpm)}{C}_{[j]} \left( \mathbf{I} + \overset{(dpm)}{Z}_{[i]} \cdot \overset{(1dpm)}{C}_{[j]} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \overset{(dpm)}{Z}_{[i]} \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{(ELdpm)}{V} \overset{(1dpm)}{C}_{[j]} \left( \mathbf{I} + \overset{(dpm)}{Z}_{[i]} \cdot \overset{(1dpm)}{C}_{[j]} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \quad h\left(\overset{(efopm)}{\tilde{C}}(t)\right) \text{ и } h\left(\overset{(1dpm)}{\tilde{C}}(t)\right) - \text{функции,}$$

определяющие количество упорядоченных пар в нечетких множествах  $\overset{(efopm)}{\tilde{C}}(t)$  и  $\overset{(1dpm)}{\tilde{C}}(t)$  соответственно.

Перейдем к разработке математической модели последней – трехпородной массивной фрактальной среды. Определив эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей для этой среды, мы получим деформационные свойства породного массива в целом.

Рассматриваемая фрактальная среда представляет собой трехмерную сплошную среду с эффективными деформационными свойствами второй среды (двухпородной массивной фрактальной среды) со случайным полем разнесенных в пространстве неоднородностей соответствующего типа, концентрация которых в исходной мультифрактальной среде равна

$$m_{\min} = \max(\text{delmax}(\text{delmax}(m_1, m_2, m_3))) = \min(m_1, m_2, m_3). \quad (2.131)$$

Как и в случае с ранее рассмотренными фрактальными средами для разработки математической модели трехпородной массивной фрактальной среды

воспользуемся методом аналогий.

В итоге, применяя данный метод к результатам моделирования трехминеральной горно-породной фрактальной среды, получим следующую математическую модель, описывающую свойства породного массива в целом:

а) если эффективный тензор модулей упругости двухпородной массивной фрактальной среды и модуль упругости эллипсоида в рассматриваемой трехпородной массивной фрактальной среде задаются в четкой форме, т.е. равны

соответственно  $\overset{(efdpm)}{\mathbf{C}}$  и  $\overset{(eftgp)}{\mathbf{C}}$ , то

$$\overset{(eftpm)}{\mathbf{C}} = \overset{(efdpm)}{\mathbf{C}} + \left\langle \frac{\overset{(ELtpm)}{V}}{\overset{(BVtpm)}{V}} \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \left\langle \frac{\overset{(ELtpm)}{V}}{\overset{(BVtpm)}{V}} \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (2.132)$$

где  $\overset{(tpm)}{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(tpm)}{\mathbf{K}} (Ak) dS$ ;  $\overset{(tpm)}{\mathbf{K}} = -def \overset{(dpm)}{\mathbf{G}} def$ ;  $\overset{(dpm)}{\mathbf{G}}$  – тензорная функция Грина

двухпородной массивной матрицы;  $\overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} = \overset{(eftgp)}{\mathbf{C}} - \overset{(efdpm)}{\mathbf{C}}$ ;  $\overset{(ELtpm)}{V}$  и  $\overset{(BVtpm)}{V}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в рассматриваемой трехпородной массивной фрактальной среде.

Отсюда эффективный тензор упругих податливостей  $\overset{(eftpm)}{\mathbf{C}'}$  будет определяться выражением:

$$\overset{(eftpm)}{\mathbf{C}'} = \left( \overset{(efdpm)}{\mathbf{C}} + \left\langle \frac{\overset{(ELtpm)}{V}}{\overset{(BVtpm)}{V}} \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \left\langle \frac{\overset{(ELtpm)}{V}}{\overset{(BVtpm)}{V}} \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}. \quad (2.133)$$

б) если эффективный тензор модулей упругости двухпородной массивной фрактальной среды и (или) модуль упругости эллипсоида в трехпородной массивной фрактальной среде имеют нечеткий вид, то

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(eftpm)}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efdpm)}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1tpm)}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right), \mathbf{C} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right) \right), \quad (2.134)$$

где  $h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efdpm)}(t)\right)$  и  $h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1tpm)}(t)\right)$  – функции, определяющие количество

упорядоченных пар в нечетких множествах  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efdpm)}(t)$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(1tpm)}(t)$  соответственно.

$$\begin{aligned} \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right) &= MEAN \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)} \right), \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \right) \right); \quad \mathbf{C} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right) = \\ &= \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)} + \left\langle \frac{(ELtpm)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tpm)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]}^{(tpm)} \left\langle \frac{(ELtpm)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tpm)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \end{aligned}$$

В свою очередь нечеткий эффективный тензор упругих податливостей  $\tilde{\mathbf{C}}^{(eftpm)}$  будет определяться следующим выражением:

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(eftpm)}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(efdpm)}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(1tpm)}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right), \mathbf{C}' \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right) \right), \quad (2.135)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)} \right), \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \right) \right);$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)}, \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)}(t) \right) &= \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(efdpm)} + \left\langle \frac{(ELtpm)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tpm)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]}^{(tpm)} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left\langle \frac{(ELtpm)}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]}^{(tpm)} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(1tpm)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

## 2.4. Мультифрактальное математическое моделирование функциональной задачи определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив

Итак, математические модели геоматериалов мультифрактальной структуры

относительно деформационных свойств разработаны. Используя полученные результаты, перейдем к математическому моделированию следующей функциональной задачи – определению внешнего поля напряжений, действующего на породный массив.

В ходе исследований было обнаружено, что упругие константы исследуемого геоматериала мультифрактальной структуры являются основой для разработки математических моделей его структурных составляющих относительно полей напряжений.

По этой причине разработаем мультифрактальные математические модели, позволяющие определить поле напряжений в горных породах, минералах, минералах с наполненными флюидом порами и включениями. И только потом на основе полученных результатов разработаем математическую модель, позволяющую определить величину внешнего поля напряжений, действующего на породный массив.

#### **2.4.1. Мультифрактальная математическая модель горной породы относительно поля напряжений**

Согласно разработанному комплексному методу самосогласованного поля, а также используя работу [40] в рамках метода аналогии, получим поле деформаций внутри произвольных неоднородностей, соответствующих горным породам, которые составляют породный массив:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(ngp)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(1tpm)} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \mathbf{K}^{(tpm)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi^{(tpm)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0tpm)}, \quad (2.136)$$

где  $\Phi^{(tpm)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  – часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанная с попаданием точек в разные неоднородности;  $n$  – концентрация неоднородностей в породном массиве;  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0tpm)}$  – внешнее поле деформаций, связанное с внешним полем напряжений, действующим на породный массив, посредством следующего выражения:

$$\varepsilon^{(0\text{tpm})} = \mathbf{C}'^{(\text{eftpm})} \sigma^{(0\text{tpm})}, \quad (2.137)$$

Умножая обе части уравнения (2.136) на эффективный тензор модулей упругости горной породы  $\mathbf{C}^{(\text{eftgp})}$  слева, для напряжения внутри любой неоднородности, соответствующей горной породе, получим:

$$\sigma^{(\text{ngp})} = \mathbf{C}^{(\text{eftgp})} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(\text{tpm})} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \varepsilon^{(0\text{tpm})}, \quad (2.138)$$

где  $\sigma^{(\text{ngp})} = \mathbf{C}^{(\text{eftgp})} \varepsilon^{(\text{ngp})}$ . Эффективный тензор  $\mathbf{C}^{(\text{eftgp})}$  определяется посредством выражения (2.119). Для построения функции  $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  необходимо задаться конкретной моделью случайного поля неоднородностей в виде горных пород в среде, соответствующей породному массиву.

В свою очередь, если какой-либо тензор из (2.138) окажется нечетким (например, когда эффективный тензор модулей упругости горной породы имеет нечеткий вид, т.е. равен  $\mathbf{C}^{(\text{eftgp})}(t)$ ), то тензор напряжений внутри любой неоднородности, будет определяться в нечеткой форме:

$$\tilde{\sigma}^{(\text{ngp})} = \bigcup_{i=1}^h \left( \mu_{\sigma}^* \left( \sigma_{[i]}^{(\text{ngp})}(t) \right), \sigma_{[i]}^{(\text{ngp})}(t) \right).$$

#### 2.4.2. Мультифрактальная математическая модель минерала с флюидными включениями относительно поля напряжений

Согласно разработанному комплексному методу самосогласованного поля, а также используя работу [40] в рамках метода аналогии, получим поле деформаций внутри произвольных неоднородностей, соответствующих минералам с жидкостными включениями, составляющих горную породу:

$$\varepsilon^{(\text{nmv})} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(\text{tgp})} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \varepsilon^{(0\text{tgp})}, \quad (2.139)$$

где  $r$  – концентрация неоднородностей в горной породе;  $\Phi^{(tgp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  – часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанная с попаданием точек в разные неоднородности; для построения функции  $\Phi^{(tgp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  необходимо задаться конкретной моделью случайного поля неоднородностей в виде минералов с флюидными включениями в среде, соответствующей горной породе.

Умножая обе части уравнения (2.139) на эффективный тензор модулей упругости минерала с флюидными включениями  $\mathbf{C}^{(efmv)}$  слева, для напряжения внутри любой неоднородности, получим:

$$\sigma^{(nmv)} = \mathbf{C}^{(efmv)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(tgp)} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \mathbf{K}^{(tgp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi^{(tgp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \varepsilon^{(0tgp)}, \quad (2.140)$$

где  $\sigma^{(nmv)} = \mathbf{C}^{(efmv)} \varepsilon^{(nmv)}$ . Эффективный тензор  $\mathbf{C}^{(efmv)}$  определяется посредством выражения (2.104).

Учитывая, что  $\varepsilon^{(0tgp)} = \varepsilon^{(ngp)}$  и используя (2.136), окончательно для поля напряжений внутри неоднородности, соответствующей минералу с флюидными включениями получим:

$$\begin{aligned} \sigma^{(nmv)} &= \mathbf{C}^{(efmv)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(tgp)} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \mathbf{K}^{(tgp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi^{(tgp)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \times \\ &\times \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(tpm)} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \mathbf{K}^{(tpm)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi^{(tpm)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \varepsilon^{(0tpm)}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Если какой-либо тензор из (2.141) окажется нечетким (например, эффективный тензор модулей упругости минерала с флюидными включениями равен  $\tilde{\mathbf{C}}^{(efmv)}(t)$ ), то тензор напряжений внутри любой неоднородности будет определяться в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}^{(nmv)} = \bigcup_{i=1}^h \left( \mu_{\sigma}^* \left( \sigma_{[i]}^{(nmv)}(t) \right), \sigma_{[i]}^{(nmv)}(t) \right).$$

### 2.4.3. Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными флюидами порами относительно поля напряжений

Разработаем содержательную модель исследуемого объекта относительно упругого поля напряжений. Минерал с наполненными жидкостью порами входит в состав горной породы и представляет собой трехмерный объект, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу зерен – фрактальных неоднородностей, каждая из которых содержит пору. Данные неоднородности случайно ориентированы в пространстве, являются анизотропными и взаимодействуют между собой через упругое поле напряжений или деформаций. Исследуемый объект является геоматериалом мультифрактальной структуры.

Перейдем ко второму этапу – построению математической модели. В этой модели математическим эквивалентом минерала с наполненными жидкостью порами является неограниченная сплошная среда, имеющая эффективные деформационные свойства минерала с жидкостными включениями со случайно-ориентированными в пространстве и расположенными вплотную друг к другу неоднородностями, каждая из которых соответствует зерну с порой.

Обозначим через  $\mathbf{C}^{(nzp)}$  тензор модулей упругости эллипсоида, соответствующий зерну с наполненной флюидом порой. Каждый эллипсоид в зависимости от ориентации в пространстве будет принимать свое значение. Следовательно, тензор  $\mathbf{C}^{(nzp)}$  является случайной величиной. Рассмотрим сплошную среду, упругие свойства которой характеризуются тензором модулей упругости, равным  $\mathbf{C}^{(efmv)}$ . Назовем данную среду эффективной минеральной матрицей с включениями.

Поместим в эту матрицу эллипсоидальные неоднородности и тем самым получим модель сплошной среды для рассматриваемого минерала с наполненными флюидом порами.

В результате имеем матрицу с упругими свойствами  $\mathbf{C}^{(efmv)}$ , в которой находятся эллипсоидальные неоднородности, модуль упругости которых

отличается на величину  $\overset{(1nzp)}{C} = \overset{(nzp)}{C} - \overset{(efmv)}{C}$ . Тогда полученную среду с неоднородностями, описывающую минерал с наполненными флюидом порами, будем характеризовать тензором модулей упругости равного  $\overset{(nzp)}{C}(\mathbf{x}) = \overset{(efmv)}{C} + \overset{(1nzp)}{C} V(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $V(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.  $V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$  (поскольку неоднородности вплотную прилегают друг к другу, то  $V(\mathbf{x})$  не принимает нулевых значений);  $\overset{(1nzp)}{C}$  – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате  $\overset{(nzp)}{C}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидов. Обозначим через тензор  $\overset{(0nzp)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(1nzp)}{C} = 0$  в эффективной минеральной матрице с включениями при заданных внешних силах. А через тензор  $\overset{(nzp)}{\varepsilon}(\mathbf{x})$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно содержательной модели и уравнению (2.14), имеем следующее

уравнение для  $\overset{(1nzp)}{\varepsilon}$ :

$$\overset{(1nzp)}{\varepsilon} + \overset{(nzp)}{K} \overset{(1nzp)}{C} V \overset{(1nzp)}{\varepsilon} = - \overset{(nzp)}{K} \overset{(1nzp)}{C} V \overset{(0nzp)}{\varepsilon}, \quad (2.142)$$

где оператор имеет ядро  $\overset{(nzp)}{K}_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l \overset{(mve)}{G}_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$ ;  $\overset{(mve)}{G}$  – тензорная функция Грина эффективной минеральной матрицы с включениями.

Согласно рассматриваемой задаче, а также используя работу [53] в рамках метода аналогии, получим решение уравнения (2.42) при постоянном внешнем

поле деформаций  $\overset{(0nzp)}{\varepsilon}$ :

$${}^{(inzp)}\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} {}^{(0nzp)}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.143)$$

где  ${}^{(inzp)}\boldsymbol{\varepsilon}$  – поле деформаций внутри изолированного включения в области  $V$ ;  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  $\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} {}^{(nzp)}\mathbf{K}(Ak) dS$ ;  $A$  – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства;  ${}^{(nzp)}\mathbf{K}(k)$  – преобразование Фурье-ядра  $K_{ijkl}(x-x')$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле деформаций внутри включения используем уже рассмотренный выше комплексный метод самосогласованного поля. Не теряя общности, будем считать, что поле  ${}^{(Enzp)}\boldsymbol{\varepsilon}$  является постоянным. В результате в рамках предложенного комплексного метода самосогласованного поля для поля деформаций внутри любого включения имеем:

$${}^{(nzp)}\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} {}^{(0nzp)}\boldsymbol{\varepsilon} + \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} {}^{(nzp)}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.144)$$

или

$${}^{(nzp)}\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} {}^{(Enzp)}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.145)$$

где  ${}^{(Enzp)}\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{(0nzp)}\boldsymbol{\varepsilon} + {}^{(nzp)}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ;  ${}^{(nzp)}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^{(nzp)}\boldsymbol{\varepsilon} + {}^{(Nnzp)}\boldsymbol{\varepsilon}$ ;  ${}^{(Nnzp)}\boldsymbol{\varepsilon}$  – поле, наведенное другими неоднородностями.

Умножая правую и левую части уравнения (2.145) на  ${}^{(nzp)}\mathbf{C}$  слева, в рамках комплексного метода самосогласованного поля для поля напряжений внутри любого включения имеем:

$${}^{(nzp)}\boldsymbol{\sigma} = {}^{(nzp)}\mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} {}^{(Enzp)}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.146)$$

где  ${}^{(nzp)}\boldsymbol{\sigma} = {}^{(nzp)}\mathbf{C} {}^{(nzp)}\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Усредним (2.145) и (2.146) по ансамблю полей реализаций случайного поля неоднородностей. В результате получим:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(nzp)} \rangle = \langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Enzp)}, \quad (2.147)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(nzp)} \rangle = \langle \mathbf{C}^{(nzp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \rangle \boldsymbol{\varepsilon}^{(Enzp)}, \quad (2.148)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Enzp)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(nzp)} \rangle$ .

Разрешим уравнение (2.147) относительно величины  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Enfm)}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(Enzp)} = \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(nzp)} \rangle. \quad (2.149)$$

Полученное выражение подставим в (2.148):

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(nzp)} \rangle = \langle \mathbf{C}^{(nzp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(nzp)} \rangle. \quad (2.150)$$

Но усредняя деформации, испытываемые отдельными зёрнами с порами по ансамблю полей неоднородностей, получим внешнее поле деформаций, в котором находится весь минерал с наполненными флюидом порами в целом, т.е.

$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(nzp)} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^{(nmv)}$ . С учетом этого выражение (2.150) следует преобразовать к следующему виду:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{(nzp)} \rangle = \langle \mathbf{C}^{(nzp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(nmv)}. \quad (2.151)$$

В итоге, используя (2.139), а также учитывая, что  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(nzp)} \rangle = \boldsymbol{\sigma}^{(nmp)}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0tgp)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(ngp)}$ , окончательно для поля напряжений внутри минерала с наполненными жидкостью порами получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(nmp)} = & \langle \mathbf{C}^{(nzp)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(nzp)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ & \times \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(tgp)} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \times \\ & \times \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}^{(tpm)} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0tpm)}. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Если какой-либо тензор из (2.152) задается в нечетком виде, то применяя к последнему выражению принцип обобщения, получим следующее выражения для тензора напряжений внутри исследуемого геоматериала:

$$\tilde{\sigma}^{(nmp)} = \bigcup_{i=1}^h \left( \mu_{\sigma}^* \left( \sigma_{[i]}^{(nmp)}(t) \right), \sigma_{[i]}^{(nmp)}(t) \right).$$

#### 2.4.4. Мультифрактальная математическая модель минерала относительно поля напряжений

Разработаем содержательную модель минерала относительно упругого поля напряжений. Минерал является частью минерала с наполненными флюидом порами, и представляет собой трехмерный объект, состоящий из впамятную прилегающих друг к другу зерен – фрактальных неоднородностей. Данные неоднородности являются анизотропными, случайно ориентированы в пространстве, и взаимодействуют между собой через упругое поле напряжений или деформаций.

Перейдем к построению математической модели. В разрабатываемой модели, минерал следует описывать неограниченной сплошной средой с эффективными деформационными свойствами минерала с наполненными флюидом порами со случайно-ориентированными в пространстве и расположенными впамятную друг к другу эллипсоидальными неоднородностями, соответствующими зернам (фрактальным неоднородностям).

Обозначим через  $\mathbf{C}^{(nz)}$  – тензор модулей упругости эллипсоида, соответствующий зерну. Каждый эллипсоид в зависимости от ориентации в пространстве принимает свое значение. Отсюда, тензор  $\mathbf{C}^{(nz)}$  – случайная величина.

Рассмотрим эффективную минеральную матрицу с порами – сплошную среду, упругие свойства которой характеризуются эффективным тензором модулей упругости минерала с наполненными жидкостью порами  $\mathbf{C}^{(efmp)}$ . Тогда

сплошную среду рассматриваемого минерала можно заменить эквивалентной ей эффективной минеральной матрицей с порами с упругими свойствами  $\overset{(efmp)}{\mathbf{C}}$ , в которой находятся эллипсоидальные неоднородности, модуль упругости которых

отличается на величину  $\overset{(1nz)}{\mathbf{C}} = \overset{(nz)}{\mathbf{C}} - \overset{(efmp)}{\mathbf{C}}$ . Тогда полученную среду с неоднородностями, описывающую минерал, будем характеризовать тензором модулей упругости, равным  $\overset{(nz)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \overset{(efmp)}{\mathbf{C}} + \overset{(1nz)}{\mathbf{C}} V(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;

$V(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ , т.е.  $V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mathbf{x} \in V \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} \notin V \end{cases}$

(поскольку неоднородности вплотную прилегают друг к другу, то  $V(\mathbf{x})$  не принимает нулевых значений);  $\overset{(1nz)}{\mathbf{C}}$  – случайный четырехвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате имеем кусочно-постоянную положительно-определенную функцию  $\overset{(nz)}{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ , имеющую разрыв на границе эллипсоидов.

Обозначим через тензор  $\overset{(0nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  непрерывное внешнее поле деформаций, которое существовало бы при  $\overset{(1nz)}{\mathbf{C}} = 0$  в эффективной минеральной матрице с порами при заданных внешних силах. А через тензор  $\overset{(nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Согласно содержательной модели и уравнению (2.14), имеем следующее

уравнение для  $\overset{(1nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ :

$$\overset{(1nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{(nz)}{\mathbf{K}} \overset{(1nz)}{\mathbf{C}} V \overset{(1nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = - \overset{(nz)}{\mathbf{K}} \overset{(1nz)}{\mathbf{C}} V \overset{(0nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.153)$$

где оператор  $\overset{(nz)}{\mathbf{K}}$  имеет ядро  $\overset{(nz)}{K}_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l \overset{(mpe)}{G}_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$ ;  $\overset{(mpe)}{\mathbf{G}}$  – тензорная функция Грина эффективной минеральной матрицы с порами.

Согласно рассматриваемой задаче и работе [53], используемой в рамках метода аналогии, решение уравнения (2.153) при постоянном внешнем поле

деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0nz)}$  можно представить в следующем виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(inz)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1nz)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0nz)}, \quad (2.154)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(inz)}$  – поле деформаций внутри изолированного включения в области  $V$ ;  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  $\mathbf{B}^{(nz)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{K}^{(nz)}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{A}$  – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства;  $\mathbf{K}^{(nz)}(k)$  – преобразование Фурье-ядра  $K_{ijkl}^{(nz)}(x-x')$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Для учета взаимодействия неоднородностей и влияния его на поле деформаций внутри включения используем уже рассмотренный выше комплексный метод самосогласованного поля. Будем считать, что поле  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Enz)}$  является постоянным.

В итоге для поля деформаций внутри любого включения в рамках разработанного комплексного метода самосогласованного поля имеем:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(nz)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1nz)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0nz)} + \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1nz)} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(nz)} \quad (2.155)$$

или

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(nz)} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1nz)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Enz)}, \quad (2.156)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Enz)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0nz)} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(nz)}$ ;  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(nz)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0nz)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(Nnz)}$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(Nnz)}$  – поле, наведенное другими неоднородностями.

Умножая правую и левую части уравнения (2.156) на  $\mathbf{C}^{(nz)}$  слева, в рамках комплексного метода самосогласованного поля для напряжения внутри любого включения, соответствующего зерну, имеем:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(nz)} = \mathbf{C}^{(nz)} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{(1nz)} \right)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{(Enz)}, \quad (2.157)$$

где  $\sigma = C \varepsilon$ .

Усредним (2.156) и (2.157) по ансамблю полей реализаций случайного поля неоднородностей. В результате получим:

$$\langle \varepsilon \rangle = \left\langle \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \varepsilon, \quad (2.158)$$

$$\langle \sigma \rangle = \left\langle C \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \varepsilon, \quad (2.159)$$

где  $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle$ .

Разрешим уравнение (2.158) относительно величины  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \left\langle \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \langle \varepsilon \rangle. \quad (2.160)$$

Полученное выражение подставим в (2.159):

$$\langle \sigma \rangle = \left\langle C \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \langle \varepsilon \rangle. \quad (2.161)$$

Но усредняя деформации, испытываемые отдельными зернами по ансамблю полей фрактальных неоднородностей, получим внешнее поле деформаций, в котором находится минерал в целом, т.е.  $\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon$ .

Если учесть, что  $\varepsilon = \varepsilon$ , выражение (2.161) преобразуется к следующему виду:

$$\langle \sigma \rangle = \left\langle C \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \varepsilon. \quad (2.162)$$

В итоге, используя (2.139), а также учитывая, что  $\langle \sigma \rangle = \sigma$  и  $\varepsilon = \varepsilon$ , окончательно для поля напряжений внутри минерала получим:

$$\begin{aligned} \sigma = & \left\langle C \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( I + B \cdot C \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ & \times \left( I + H \cdot C \right)^{-1} \cdot \left[ I + \frac{1}{r} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \end{aligned} \quad (2.163)$$

$$\times \left( \mathbf{I} + \overset{(tpm)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1tpm)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \overset{(tpm)}{\mathbf{K}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \overset{(tpm)}{\Phi} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \overset{(0tpm)}{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

Если какой-либо тензор из (2.163) задается в нечетком виде, то применяя к последнему выражению принцип обобщения, получим нечеткий тензор напряжений внутри минерала:

$$\overset{(nm)}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \bigcup_{i=1}^h \left( \overset{(nm)}{\boldsymbol{\sigma}} \right) \left( \mu_{\sigma}^* \left( \overset{(nm)}{\boldsymbol{\sigma}}_{[i]}(t) \right), \overset{(nm)}{\boldsymbol{\sigma}}_{[i]}(t) \right).$$

#### 2.4.5. Мультифрактальная математическая модель зерна относительно поля напряжений

Полученные результаты дают возможность перейти к разработке математической модели, предназначенной для определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив. Для разработки такой модели необходимо установить, как связаны между собой величины внешнего (действующего на породный массив) и внутреннего неоднородного поля напряжений, формируемого на уровне фрактальных неоднородностей. Причем с целью увеличения точности определяемой тензорной величины внешнего поля напряжений, внутреннее неоднородное поле следует рассматривать на уровне зерен – наименьших структурных элементов породного массива, к которым применима модель сплошной среды.

Таким образом, приходим к необходимости разработки мультифрактальных математических моделей зерна относительно упругого поля напряжений и зерна с наполненной флюидом порой относительно поля давлений.

Определим упругое поле напряжений в рамках модели, которая сводится к уравнению (2.153):

$$\overset{(1nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{(nz)}{\mathbf{K}} \overset{(1nz)}{\mathbf{C}} \overset{(1nz)}{V} \overset{(1nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = - \overset{(nz)}{\mathbf{K}} \overset{(1nz)}{\mathbf{C}} \overset{(0nz)}{V} \overset{(0nz)}{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

Решая данное уравнение в рамках предложенного комплексного метода самосогласованного поля, было получено выражение (2.157):

$$\sigma^{(nz)} = C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \varepsilon^{(Enz)},$$

где  $C^{(nz)}$  – модуль упругости эллипсоидальной неоднородности, соответствующей зерну.

В этом выражении величина тензора  $\varepsilon^{(Enz)}$  является неизвестной. Для того чтобы найти  $\varepsilon^{(Enz)}$ , усредним последнее выражение по ансамблю полей фрактальных неоднородностей. В результате получим:

$$\langle \sigma^{(nz)} \rangle = \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle \varepsilon^{(Enz)}, \quad (2.164)$$

где  $\varepsilon^{(Enz)} = \langle \varepsilon^{(Enz)} \rangle$ . Но усредняя напряжения, испытываемые отдельными зернами по ансамблю полей фрактальных неоднородностей, получаем внешнее поле напряжений, в котором находится минерал в целом, т.е.  $\langle \sigma^{(nz)} \rangle = \sigma^{(nm)}$ . С учетом этого выражение (2.164) примет следующий вид:

$$\sigma^{(nm)} = \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle \varepsilon^{(Enz)}. \quad (2.165)$$

Разрешим (2.165) относительно  $\varepsilon^{(Enz)}$ :

$$\varepsilon^{(Enz)} = \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \sigma^{(nm)}. \quad (2.166)$$

Подставляя полученное выражение в (2.157), окончательно для поля напряжений  $\sigma^{(nz)}$  внутри зерна получим:

$$\sigma^{(nz)} = C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \cdot \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \sigma^{(nm)}. \quad (2.167)$$

Учитывая (2.163) и (2.137), последнее выражение можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma^{(nz)} = & C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \cdot \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \cdot \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle \times \\ & \times \langle \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \cdot \left( I + H \cdot C^{(1tgp)} \right)^{-1} \cdot \left[ I + \frac{1}{r} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\times \left( \mathbf{I} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \mathbf{K} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \mathbf{C}' \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

В случае если один или более тензоров из (2.168) задается в нечетком виде, то тензор, характеризующий поле напряжений в зернах, будет нечетким и определяться на основе следующего выражения:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(nz)} = \bigcup_{i=1}^h \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(nz)} \right\} \left( \mu_{\sigma}^* \left( \boldsymbol{\sigma}_{[i]}^{(nz)}(t) \right), \boldsymbol{\sigma}_{[i]}^{(nz)}(t) \right). \quad (2.169)$$

#### 2.4.6. Мультифрактальная математическая модель зерна с наполненной флюидом порой относительно поля давлений

Разработаем содержательную модель зерен (фрактальных неоднородностей) с наполненными флюидом порами относительно поля давлений. Фрактальные неоднородности, входящие в структуру минерала, имеют различную ориентацию в пространстве и плотно прилегают друг к другу. В каждой из фрактальных неоднородностей имеется наполненная жидкостью пора.

Перейдем к разработке математической модели одного зерна с порой. Сопоставим этому зерну трехмерную анизотропную однородную упругую среду с известной из эксперимента упругой константой  $\mathbf{C}^{(nz)}$ . Тогда мы получаем трехмерную анизотропную упругую среду с неоднородностью в эллипсоидальной области  $V$ , которая соответствует наполненной газом (или жидкостью) поре. Первоначальное давление  $p_0$  в поре играет роль модуля упругости эллипсоидальной неоднородности. Тогда тензор модулей упругости с неоднородностью равен  $\mathbf{C}^{(nzp)}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}^{(nz)} + \left( p_0 \mathbf{I} - \mathbf{C}^{(nz)} \right) W(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $W(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ .

В результате  $\mathbf{C}^{(nzp)}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоида. Внешнее поле

напряжений, в котором находится эллипсоидальная неоднородность, может характеризоваться как четким, так и нечетким тензором. В первом случае – поле напряжений в зерне определяется из выражения (2.193), во втором – из (2.194). Рассмотрим случай, когда внешнее поле напряжений, в котором находится эллипсоидальная неоднородность, определяется посредством решения (2.193). Это поле напряжений в данной задаче соответствует непрерывному внешнему полю деформаций  $\varepsilon^{(0nzp)}(\mathbf{x})$ , которое существовало бы при  $p_0 \mathbf{I} - \mathbf{C}^{(nz)} = 0$  в рассматриваемой упругой среде в отсутствие неоднородности при заданных внешних силах. Обозначим через тензор  $\varepsilon^{(nzp)}(\mathbf{x})$  – кусочно-непрерывное поле деформаций в среде с неоднородностями при тех же внешних условиях.

Отсюда смещение в среде с эллипсоидальной неоднородностью в произвольной аффинной системе координат удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\partial_j \left[ \left( \mathbf{C}^{(nz)} + \left( p_0 \mathbf{I} - \mathbf{C}^{(nz)} \right) W(\mathbf{x}) \right) \partial_k u_l^{(nzp)}(\mathbf{x}) \right] = -f^i(\mathbf{x}), \quad (2.170)$$

где  $u_l^{(nzp)}(\mathbf{x}) \rightarrow u_l^{(0nzp)}(\mathbf{x})$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $f^i(\mathbf{x})$  – внешние силы, не содержащие сингулярностей типа простого и двойного слоев, что обеспечивается непрерывностью внешнего поля деформаций  $\varepsilon^{(0nzp)}(\mathbf{x}) = \partial_{(k} u_{l)}^{(nzp)}(\mathbf{x})$ ; круглые скобки при индексах указывают на симметризацию по соответствующим индексам. Поскольку данное уравнение должно пониматься в смысле обобщенных функций, отсутствие простых слоев автоматически обеспечивает непрерывность нормальной составляющей тензора напряжений

$$\sigma^{ij} = \left[ \mathbf{C}^{(nz)} + \left( p_0 \mathbf{I} - \mathbf{C}^{(nz)} \right) W(\mathbf{x}) \right] \varepsilon_{kl}^{(nzp)}(\mathbf{x}) \text{ на границе } S \text{ области } V.$$

Принятая запись уравнения в аффинно-инвариантной форме дает возможность без ограничения общности предположить, что  $S$  является единичной сферой, т.е.  $x_i x^i = 1$ .

В рамках разработанной модели и согласно работе [53], используемой в

рамках метода аналогии, для изолированной эллипсоидальной неоднородности поле давлений будет иметь следующий вид:

$$p\delta^{ij} = p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + \mathbf{B}^{(nzp)klpq} \left( p_0 I^{pqmn} - \mathbf{C}^{(nz)pqmn} \right) \right)^{-1(0nzp)} \varepsilon_{mn}$$

или

$$p\delta^{ij} = p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + \mathbf{B}^{(nzp)klpq} \left( p_0 I^{pqmn} - \mathbf{C}^{(nz)pqmn} \right) \right)^{-1} \left( \mathbf{C}^{(nz)mnsd} \right)^{-1(0nzp)} \sigma_{sd}, \quad (2.171)$$

где  $\mathbf{C}^{(nz)mnsd}$  – тензор модулей упругости зерна.

Учитывая, что  $\sigma^{(0nzp)} = \sigma^{(nz)}$ , выражение (2.171) можно преобразовать к следующему виду:

$$p\delta^{ij} = p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + \mathbf{B}^{(nzp)klpq} \left( p_0 I^{pqmn} - \mathbf{C}^{(nz)pqmn} \right) \right)^{-1} \left( \mathbf{C}^{(nz)mnsd} \right)^{-1(nz)} \sigma_{sd}. \quad (2.172)$$

В случае, когда поле напряжений в зерне характеризуется нечетким тензором, т.е. определяется выражением (2.169), тогда для изолированной эллипсоидальной неоднородности поле давлений будет иметь следующий вид:

$$\tilde{p}\delta^{ij} = \tilde{p}_0 \tilde{I}^{ijkl} \left( \tilde{I}^{klmn} + \tilde{\mathbf{B}}^{(nzp)klpq} \left( \tilde{p}_0 \tilde{I}^{pqmn} - \tilde{\mathbf{C}}^{(nz)pqmn} \right) \right)^{-1} \left( \tilde{\mathbf{C}}^{(nz)mnsd} \right)^{-1(nz)} \tilde{\sigma}_{sd}. \quad (2.173)$$

#### 2.4.7. Перколяционная модель экспериментального исследования образования трещин в минерале под действием внешнего поля напряжений

Полученные результаты позволяют перейти к разработке перколяционной модели, определяющей закономерности разрушения зерен в текстурных составляющих породного массива под действием внешнего поля напряжений. В конечном счете, именно данные закономерности должны позволить по экспериментальным данным процессов трещинообразования в геоматериалах определить величину внешнего поля напряжений в породном массиве.

Исходными данными в решаемой задаче будет: трехмерная фигура исследуемого минерала с наполненными флюидом порами, входящего в состав

пласта, для которого требуется определить величину внешнего поля напряжений. При этом в рассматриваемом минерале должна присутствовать вертикально ориентированная трещина, не являющаяся магистральной, и имеющей длину равную  $d$ . Тогда, рассматриваемая задача исследований сводится к моделированию процесса разрушения минерала как текстурной составляющей породного массива, и установлению при какой величине внешнего поля напряжений в рассматриваемом геоматериале реализуется трещина, длиной равной  $d$ .

В дальнейшем не теряя общности, будем считать, что трехмерная фигура исследуемого минерала с наполненными флюидом порами имеет вид прямоугольного параллелепипеда. Разобьем данную фигуру на одинаковые кубики. При этом объем каждого из таких кубиков установим равным среднему объему зерна рассматриваемого минерала в исследуемом пласте. Полученный многогранник, разделенный на кубики одинакового размера, будем называть трехмерной перколяционной решеткой (рисунок 12).

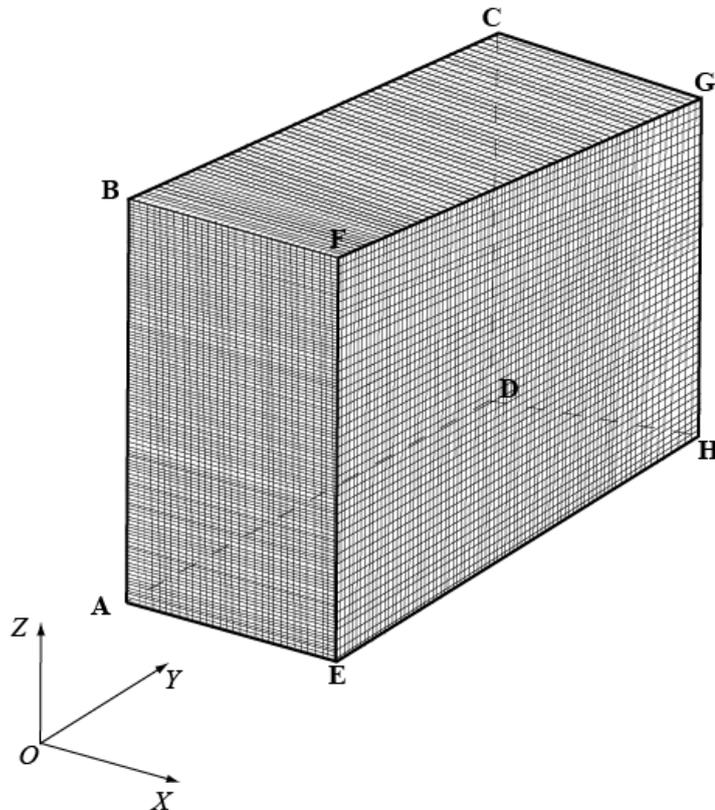


Рисунок 12 – Трехмерная перколяционная решетка минерала с наполненными флюидом порами

По существу представленная решетка является графической моделью исследуемого минерала, в которой каждому зерну с наполненной флюидом порой соответствует кубик.

Каждому кубику из исследуемой трехмерной перколяционной решетки сопоставим параметр  $r = (x, y, z, \lambda)$ , где  $x, y, z$  – координаты центра кубика;  $\lambda$  – индикатор разрушения, определяемый следующим образом:

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если кубик разрушен} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда трехмерную перколяционную решетку  $ABCDEF$  можно описать множеством  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , где  $n$  – общее количество кубиков в рассматриваемой решетке.

Исследование процессов разрушения в трехмерной решетке является трудоемкой задачей. Поэтому разделим трехмерную решетку на совокупность слоев параллельных плоскости  $YOZ$  (рисунок 13).

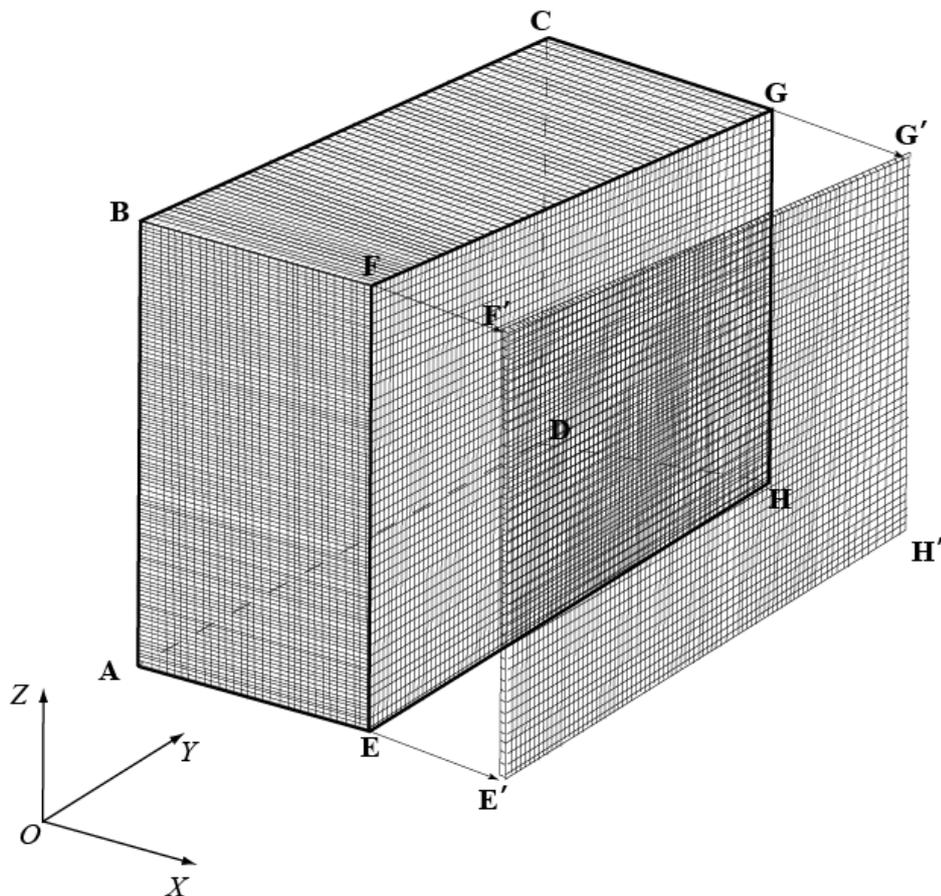


Рисунок 13 – Разделение трехмерной перколяционной решетки на совокупность слоев параллельных плоскости  $YOZ$

Полученные слои будут описываться подмножествами  $L_1, L_2, \dots, L_m$  множества  $R$ , каждое из которых определяется следующим образом:

$$L_i = \{r : x = h_i\}, r \in R, i = 1..m;$$

где  $h_i$  – набор значений, указывающих соответственно на координаты центра кубика по оси  $OX$ ;  $m$  – количество слоев в направлении плоскости  $YOZ$  в рассматриваемой трехмерной перколяционной решетке.

Поскольку ширина всех слоев равна ширине кубика, то каждый слой можно заменить соответствующей плоской фигурой (рисунок 14).

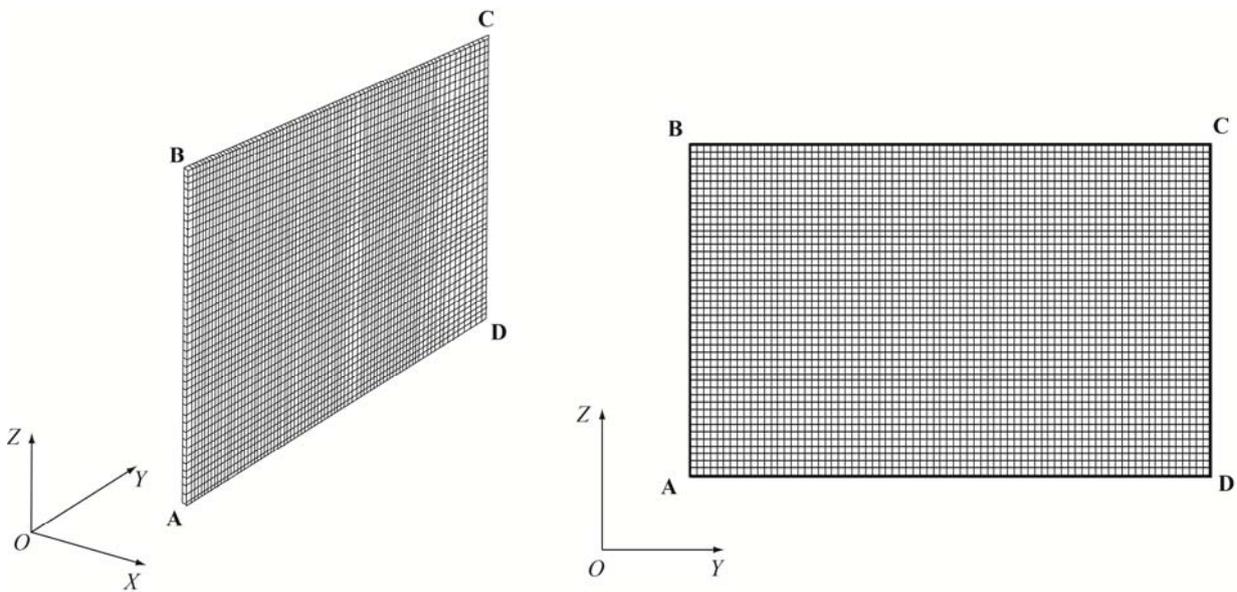


Рисунок 14 –Слой перколяционной решетки и соответствующая ему плоская фигура

Таким образом, далее вместо трехмерной перколяционной решетки будем исследовать совокупность из  $m$  двумерных перколяционных решеток, каждая из которых, описывается подмножеством  $L_i \in R$ .

Перейдем к компьютерному моделированию процесса разрушения минерала как составной части породного массива. Этот процесс заключается в выполнении для каждой полученной двумерной перколяционной решетки следующего компьютерного эксперимента.

Пусть каждый квадрат рассматриваемой двумерной перколяционной

решетки может находиться в двух состояниях – "занято трещиной" и "свободно от трещины". Первое из них соответствует случаю, когда зерно – разрушено. Второе – зерно целое. Квадрат в занятом состоянии будем закрашивать черным цветом, в свободном – белым.

Вначале все квадраты двумерной перколяционной решетки устанавливаются в состояние "свободно от трещины". Далее, для каждого квадрата из рассматриваемой решетки осуществляется следующая процедура. Сначала генерируется случайное число  $P$  от 0 до 1. Так как в изучаемом минерале зерна ориентированы случайно и любая из возможных ориентаций для отдельного зерна имеет одинаковую вероятность появления, тогда случайное число  $P$  следует получать с использованием генератора равномерно распределенных случайных чисел. Если полученное значение  $P$  окажется меньше некоторого значения  $P_D$ , которое будем называть вероятностью разрушения зерна с наполненной жидкостью порой, то квадрат переходит в состояние "занято трещиной" и закрашивается в черный цвет. В противном случае – квадрат сохраняет свое состояние – "свободно от трещины".

Определим величину  $P_D$ , которая в рамках рассматриваемой задачи отвечает за вероятность разрушения отдельного зерна с наполненной флюидом порой. Для этого вернемся к разработанным ранее мультифрактальным математическим моделям зерна относительно поля напряжений и зерна с наполненной флюидом порой относительно поля давлений:

$$\begin{aligned} \sigma = & C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(nz)} \right)^{-1} \cdot \left\langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(nz)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(nz)} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ & \times \left\langle \left( I + B \cdot C^{(nz)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \left( I + H \cdot C^{(tgp)} \right)^{-1} \cdot \left[ I + \frac{1}{r} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \times \\ & \times \left( I + H \cdot C^{(tpm)} \right)^{-1} \cdot \left[ I + \frac{1}{n} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} C'^{(eftpm)} \cdot \sigma^{(0tpm)} \end{aligned} \quad (2.168)$$

и

$$p\delta^{ij} = p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + B^{(nzp)} \left( p_0 I^{pqmn} - C^{(nz)} \right) \right)^{-1} \left( C^{(nz)} \right)^{-1} \sigma_{sd}^{(nz)}. \quad (2.172)$$

Применение данных моделей при решении рассматриваемой задачи

позволяет получить значение тензора напряжений в каждом зерне минерала породного массива, а также поле давлений в наполненных жидкостью порах. Упругое поле напряжений формируется из напряжений, которое испытывает зерно в зависимости от ориентации. В свою очередь, поле давлений формируется из давления в порах, находящихся в зернах, обусловленных напряжением, испытываемым отдельным зерном. Таким образом, в исследуемом минерале приборного участка породного массива реализуется два конкурирующих процесса разрушения зерен. С одной стороны разрушение зерен происходит под действием напряжений. С другой – под действием поля давлений.

Введем два события:  $A$  – зерно с наполненной жидкостью порой разрушено под действием поля напряжений;  $B$  – зерно с наполненной жидкостью порой разрушено под действием поля давлений. Тогда событие  $D$  – разрушение зерна с наполненной жидкостью порой реализуется в случае выполнения события  $A$  или события  $B$ . В соответствии с законами теории вероятности данное обстоятельство свидетельствует о том, что событие  $D$  представляет собой сумму событий  $A$  и  $B$ , т.е.  $D = A + B$ .

Поскольку события  $A$  и  $B$  несовместны, т.е.  $AB = \emptyset$ , то вероятность события  $D$  определяется на основе следующего выражения:

$$P(D) = P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.174)$$

Найдем вероятность  $P(A)$ . Вероятность наступления события  $A$  определяется как отношение числа состояний  $q_A$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля напряжений к числу возможных состояний  $w_A$  отдельного зерна с наполненной жидкостью порой:

$$P(A) = \frac{q_A}{w_A}. \quad (2.175)$$

Определим число возможных состояний  $w_A$  отдельного зерна с наполненной жидкостью порой по углам Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  (рисунок 15). Поскольку углы  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  являются непрерывными величинами, то число возможных состояний отдельного зерна с наполненной жидкостью порой равно

$\infty$ . Поэтому произведем дискретизацию полученного пространства обобщенных координат с шагом, равным  $\frac{\pi}{12}$ . В итоге получим число возможных состояний  $w_A$  отдельного зерна с наполненной жидкостью порой в рамках дискретной модели, равным 13824.

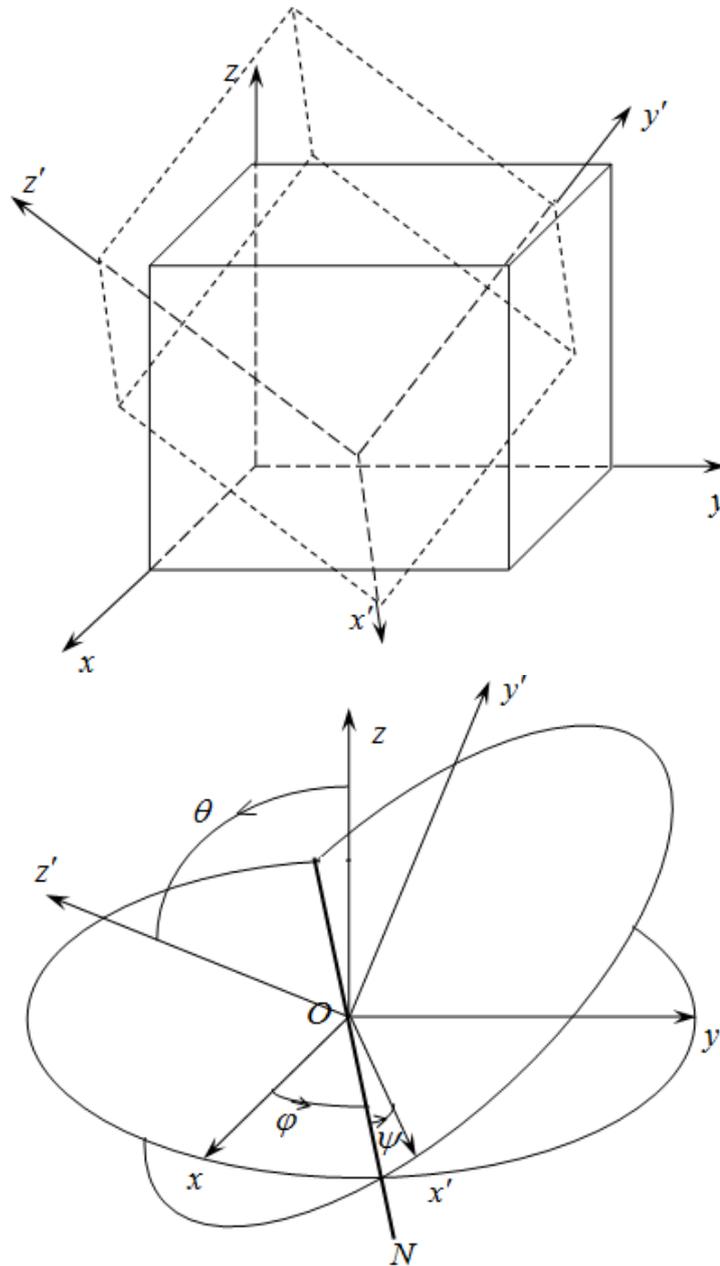


Рисунок 15 – Кристаллит кубической сингонии (ориентация задается углами Эйлера)

Определение числа состояний  $q_A$ , при которых происходит разрушение зерна с порой посредством поля напряжений, требует использования

соответствующего критерия разрушения. Установлено, что при внешнем одноосном сжатии отдельные зерна с определенной ориентацией испытывают растягивающие напряжения в направлении перпендикулярном внешней нагрузке. В связи с этим, целесообразно выбрать критерий на достижение напряжением предела прочности зерна на растяжение:

$$\sigma_{11}^{(nf)}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p \text{ или } \sigma_{22}^{(nf)}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p. \quad (2.176)$$

Таким образом, процесс вычисления  $q_A$  сводится к подсчету количества таких ориентаций зерен (из 13824 возможных), для которых вычисление тензора напряжений, задаваемого выражением (2.168) приводит к удовлетворению условия (2.176).

Найдем вероятность  $P(B)$ . Вероятность наступления события  $B$  определяется как отношение числа состояний  $q_B$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля давлений к числу возможных состояний  $w_B$  отдельного зерна с наполненной жидкостью порой:

$$P(B) = \frac{q_B}{w_B}. \quad (2.177)$$

Так как число возможных состояний  $w_B = w_A$ , то определим величину  $q_B$ .

Определение числа состояний  $q_B$ , при которых происходит разрушение зерна с порой посредством поля давлений, требует использования соответствующего критерия разрушения. Установлено, что трещина с одной части объекта может проникнуть в другую с отличными прочностными свойствами при следующем условии: если предел первоначальной прочности той части объекта, в которой есть трещина, больше  $\frac{1}{5}$  от предела прочности другой части без трещины [182]. Так как жидкость с точки зрения теории разрушения, есть объект с бесконечным числом различно ориентированных трещин (полностью разрушен), то критерий разрушения объекта в целом будет иметь вид:

$$p > \frac{1}{5} \sigma_p, \quad (2.178)$$

где  $p$  – давление в поре;  $\sigma_p$  – предела прочности на растяжение зерна.

Таким образом, процесс вычисления  $q_B$  сводится к подсчету количества таких ориентаций зерен (из 13824 возможных), для которых вычисление тензора напряжений, задаваемого выражением (2.172) приводит к удовлетворению условия (2.178).

Итак, вероятность разрушения  $P_D$  с учетом выражений (2.174), (2.175) и (2.177), можно определить на основе следующего выражения:

$$P_D = P(D) = \frac{q_A + q_B}{w}, \quad (2.179)$$

где  $w = w_B = w_A = 13824$ .

Вернемся к двумерным перколяционным решеткам. В результате выполнения серий из  $m$  компьютерных экспериментов при увеличении значений  $P_D$  было получено, что некоторые квадраты в двумерных решетках либо изолированы друг от друга (рисунок 16), либо образуют конечные кластеры (рисунок 17) – группа занятых трещиной квадратов, связанных с ближайшим соседом по стороне квадрата.

Анализ компьютерных экспериментов процессов разрушения минерала как текстурной составляющей породного массива, показал следующее. Изменение величины внешнего поля напряжений приводит к увеличению вероятности разрушения  $P_D$ , а следовательно, и к формированию конечных кластеров различной длины в каждой из  $m$  двумерных перколяционных решеток. Теперь, если учесть тот факт, что каждый конечный кластер соответствует срезу трещины минерала в одной из плоскостей (в нашем случае – параллельной плоскости  $YOZ$ ), то придем к следующему выводу. Задачу определения вертикальной составляющей величины внешнего поля напряжений можно свести к подбору компонентов тензора  $\sigma$  (отрим) таким образом, чтобы в каждой из  $m$  двумерных перколяционных решеток реализовался конечный кластер длиной  $d$ . В свою очередь для определения горизонтальной составляющей внешнего поля необходимо повторить вышеприведенные исследования только используя при

этом образец минерала с горизонтально ориентированной трещиной.

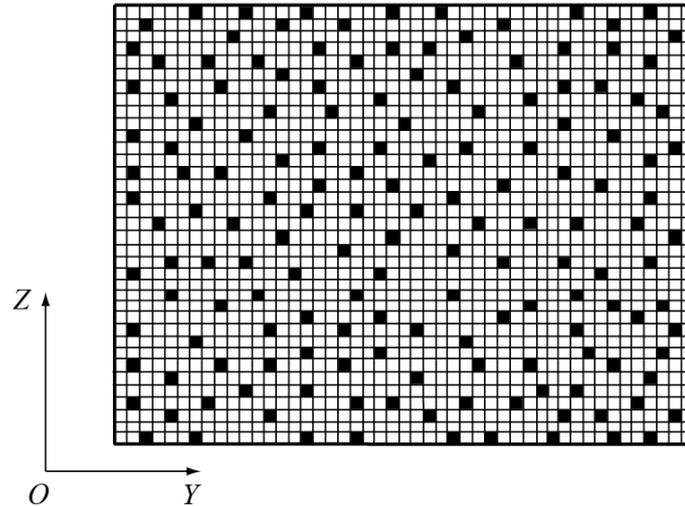


Рисунок 16 – Изолированные квадраты в двухмерной перколяционной решетке

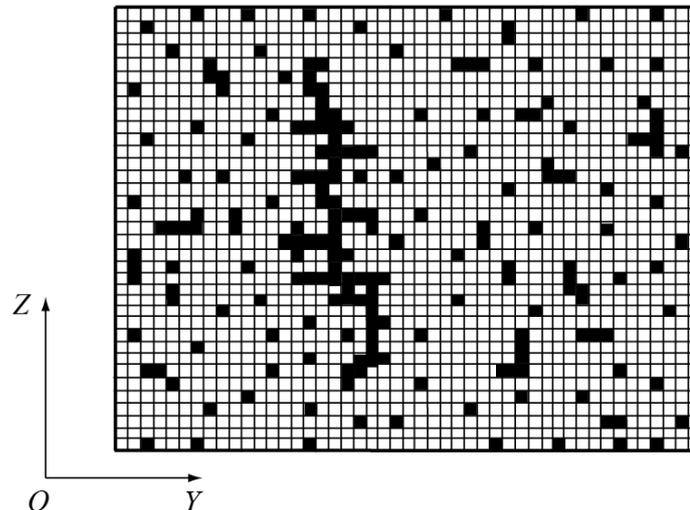


Рисунок 17 – Конечные кластеры в двухмерной перколяционной решетке

Все вышеизложенное позволяет окончательно формализовать в обобщенном алгоритмическом виде перколяционную модель, предназначенную для определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив.

1. В породном массиве выбрать пласт, для которого необходимо определить величину внешнего поля напряжений. Выбрать вид минерала, исследование которого позволит определить величину внешнего поля напряжений.
2. Посредством портативного оптического микроскопа получить микрофотографии структур рассматриваемого вида минерала в плоскости  $YOZ$ , входящего в состав исследуемого пласта.

3. Среди полученных микрофотографий выбрать одну, на которой присутствует вертикально-ориентированная трещина.
4. Посредством методов фотограмметрии на выбранной микрофотографии определить длину  $d$  вертикально-ориентированной трещины.
5. С помощью экспериментальных методов построить трехмерную фигуру минерала (представляемого в виде сплошной среды), плоская структура которого представлена на выбранной микрофотографии. Полученную фигуру минерала аппроксимировать многогранником – параллелепипедом, тетраэдром и др. Разбить данный многогранник на одинаковые кубики, объем каждого из которых равен среднему объему зерна рассматриваемого вида минерала в исследуемом пласте. В результате будет получена трехмерная перколяционная решетка минерала.
6. Разделить полученную трехмерную решетку на совокупность слоев параллельных плоскости  $YOZ$ . Каждому такому слою сопоставить двухмерную перколяционную решетку.
7. Для зерен рассматриваемого вида минерала определить предел прочности  $\sigma_p$  на растяжение. Главному значению  $\sigma_3$  тензора внешнего поля напряжений  $\overset{(0\text{тпм})}{\sigma}$  задать начальное приближение  $\sigma_p$ , т.е.  $\sigma_3 \leftarrow \sigma_p$ .
8. Рассчитать текущее значение величины внешнего поля напряжений  $\overset{(0\text{тпм})}{\sigma}$ , действующего на породный массив –  $\overset{(0\text{тпм})}{\sigma} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ .
9. Определить текущую вероятность разрушения  $P_{RD}$  в исследуемой трехмерной перколяционной решетке.
- 9.1. Для рассматриваемого пласта определить значения величин, являющихся входными параметрами в мультифрактальных математических моделях зерна относительно поля напряжений (2.168), и зерна с наполненной жидкостью порой относительно поля давлений (2.172).
- 9.2. Посредством нижеследующей процедуры определить вероятность  $P(A)$

разрушения зерна с наполненной жидкостью порой под действием поля напряжений и вероятность  $P(B)$  его разрушения под действием поля давлений.

$$q_A \leftarrow 0; q_B \leftarrow 0;$$

$\{\varphi, \theta, \psi$  – углы Эйлера. В качестве конечного значения счетчиков цикла приняты  $11\pi/12$  и  $23\pi/12$  поскольку  $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ ,  $\theta(0) = \theta(2\pi)$ ,  $\psi(0) = \psi(2\pi)\}$

Цикл  $\varphi = 0$  до  $11\pi/12$  с шагом  $\pi/12$

Цикл  $\theta = 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$

Цикл  $\psi = 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$

$$\begin{aligned} & \overset{(nz)}{\sigma}(\varphi, \theta, \psi) \leftarrow \overset{(nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nz)}{B} \cdot \overset{(1nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \times \\ & \times \left\langle \overset{(nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nz)}{B} \cdot \overset{(1nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \left\langle \overset{(nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nz)}{B} \cdot \overset{(1nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle \times \\ & \times \left\langle \left( \mathbf{I} + \overset{(nz)}{B} \cdot \overset{(1nz)}{C}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \left( \mathbf{I} + \overset{(tgp)}{H} \cdot \overset{(1tgp)}{C} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \overset{(tgp)}{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \overset{(tgp)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \times \\ & \times \left( \mathbf{I} + \overset{(tpm)}{H} \cdot \overset{(1tpm)}{C} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{n} \int \overset{(tpm)}{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \overset{(tpm)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \cdot \overset{(eftpm)}{C'} \cdot \overset{(0tpm)}{\sigma}; \end{aligned}$$

Если  $\overset{(nz)}{\sigma}_{11}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p$  или  $\overset{(nz)}{\sigma}_{22}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p$ , то увеличить на 1 число состояний (ориентаций зерна в пространстве)  $q_A$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля напряжений;  $\{q_A \leftarrow q_A + 1\}$

$$\begin{aligned} p\delta^{ij}(\varphi, \theta, \psi) \leftarrow p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + \overset{(nzp)}{B}^{klpq} \left( p_0 I^{pqmn} - \overset{(nz)}{C}^{pqmn}(\varphi, \theta, \psi) \right) \right)^{-1} \times \\ \times \left( \overset{(nz)}{C}^{mnsd}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \overset{(nz)}{\sigma}_{sd}(\varphi, \theta, \psi); \end{aligned}$$

Если  $p(\varphi, \theta, \psi) > \frac{1}{5}\sigma_p$ , то увеличить на 1 число состояний  $q_B$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля давлений;  $\{q_B \leftarrow q_B + 1\}$

Конец цикла  $\psi$ ; конец цикла  $\theta$ ; конец цикла  $\varphi$ ;

$P(A) \leftarrow q_A / w$ ;  $P(B) \leftarrow q_B / w$ ; {число возможных состояний  $w$  отдельного зерна с наполненной жидкостью порой в рамках рассматриваемого алгоритма равно 13824}

$$9.3 \quad P_{RD} \leftarrow P(A) + P(B);$$

10. Для каждой двумерной перколяционной решетки, полученной на шаге 6, провести компьютерный эксперимент, заключающийся в следующем.

Вначале все квадраты рассматриваемой двумерной перколяционной решетки установить в состояние "свободно от трещины" и закрасить в белый цвет. Далее, для каждого квадрата из рассматриваемой решетки с помощью генератора равномерно распределенных случайных чисел сгенерировать случайное число  $P$  от 0 до 1. Если полученное значение  $P$  окажется меньше вероятности  $P_{RD}$  разрушения зерна с наполненной жидкостью порой, то квадрат переходит в состояние "занято трещиной" и закрашивается в черный цвет. В противном случае, квадрат сохраняет свое состояние – "свободно от трещины".

11. Если в каждой двумерной решетке реализуется конечный кластер, линейный размер которого равен или превышает длину трещины  $d$ , то экспериментальному значению компоненты внешнего поля напряжений  $\sigma_3^{(ext)}$  присвоить значение  $\sigma_3$  и перейти к шагу 12; иначе увеличить компоненту  $\sigma_3$  на величину  $z$  (по умолчанию  $z = 10^3 \text{ Па}$ ) и перейти к шагу 8.

12. Определить параметры  $\sigma_2^{(ext)}$ . Процедура определения значения данного компонента идентична вышеприведенной (шаги 2-11), отличаясь следующим:

1) на 2 шаге используется микрофотография, содержащая горизонтально-ориентированную трещину; 2) на шаге 7 вместо  $\sigma_3$  использовать  $\sigma_2$ , и наоборот, т.е. выполнить замену  $\sigma_3 \leftrightarrow \sigma_2$ ; 3) на шаге 8 в качестве текущего значения

величины внешнего поля напряжений  $\sigma^{(0tpm)}$  используется тензор –

$$\sigma^{(0tpm)} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ 3) на шаге 11 выполнить замены } \sigma_3^{(ext)} \leftrightarrow \sigma_2^{(ext)} \text{ и } \sigma_3 \leftrightarrow \sigma_2.$$

$$13. \quad \sigma^{(0tpm)} \leftarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^{(ext)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^{(ext)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^{(ext)} \end{pmatrix}, \text{ где } \sigma_2^{(ext)} = \sigma_1^{(ext)}.$$

14. Вывод: Величина внешнего поля напряжений, действующего на породный массив, равна  $\sigma^{(0\text{прм})}$ .

Применение данного метода на практике позволяет осуществить реконструкцию неоднородного по глубине внешнего поля напряжений в исследуемом участке породного массива, учитывающего гравитационную и тектоническую составляющие. Согласно данному методу не наблюдается однозначное увеличение величины внешнего поля напряжений с глубиной: на отдельных участках идет рост значений компонентов тензора  $\sigma^{(0\text{ext})}$ , а на других более низких горизонтах – падение.

## **2.5. Мультифрактальное моделирование функциональных задач определения тепловых и электрических свойств геоматериалов**

Перейдем к рассмотрению следующей функциональной задачи, связанной с процессом теплопроводности в геоматериалах. Она имеет место при условии, когда между различными частями геоматериала поддерживается разность температур и между ними происходит перенос тепла.

Как указывалось в предыдущей главе, вследствие неудовлетворительного учета мультифрактальной структуры геоматериалов, применение существующих подходов не позволяет разработать количественно адекватные математические модели геоматериалов относительно процессов теплопроводности. Поэтому, как и в случае с вышерассмотренной функциональной задачей, применим мультифрактальный метод моделирования.

Итак, с помощью предложенного метода приступим к построению и исследованию мультифрактальных математических моделей геоматериалов относительно теплопроводных свойств. Как известно, в рамках существующих технологий горного производства реализация стационарного теплового потока в породных массивах не представляется возможной (по причине исключительно большой величины представительных объемов данных геоматериалов).

Вследствие этого мультифрактальное моделирование процессов теплопереноса в породных массивах не имеет практического смысла для горного производства и рассматриваться не будет.

Разработаем мультифрактальную математическую модель минерала относительно процесса теплопроводности. Придерживаясь общей схемы, разработаем содержательную модель. Минерал представляет собой объект, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу зерен, являющихся фрактальными неоднородностями. Эти зерна случайно ориентированы в пространстве, являются анизотропными и взаимодействуют между собой через стационарное тепловое поле. При этом возникающие теплопроводные характеристики обусловлены тепловым потоком, направленным в сторону убывания температуры. Исследуемый минерал обладает мультифрактальной структурой. Аппроксимируем каждое зерно минерала эллипсоидом.

На основе построенной содержательной модели минерала перейдем к построению математической модели.

Сопоставим минералу трехмерную неограниченную анизотропную упругую сплошную среду со случайно-ориентированными в пространстве неоднородностями в областях  $V$ , которые соответствуют зернам. Обозначим через  $\overset{(m)}{k}$  тензорный коэффициент теплопроводности эллипсоида, который является случайной величиной.

Поместим в матрицу с теплопроводными свойствами, равными усредненным значениям  $\langle \overset{(m)}{k} \rangle$ , указанные эллипсоидальные неоднородности. В результате получим модель сплошной среды для рассматриваемого минерала, которую назовем сплошной средой со структурой. Тогда полученную среду с неоднородностями следует характеризовать тензорным коэффициентом теплопроводности  $\overset{(m)}{k}(\mathbf{x}) = \langle \overset{(m)}{k} \rangle + \overset{(1m)}{k} V(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $V(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ ;  $\overset{(1m)}{k} = \overset{(m)}{k} - \langle \overset{(m)}{k} \rangle$  – случайный двухвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и

меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате  $\overset{(m)}{k}(x)$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидальных неоднородностей.

Выведем систему уравнений, к которой сводится разрабатываемая математическая модель. Первое из них получаем из следующих соображений.

В стационарном состоянии разность между количеством тепла, втекающего в любой объем и уходящего из него, равна количеству тепла, выделяемого в этом объеме. Это утверждение можно записать в виде уравнения сохранения:

$$\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_i} = q(x), \quad (2.180)$$

где  $q(x)$  – плотность непрерывно распределенных источников поля.

Второе уравнение

$$h_i(x) = -k_{ij}(x) \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.181)$$

представляет собой закон теплопроводности Фурье.

Третье уравнение

$$\text{rot}_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} = 0, \quad (2.182)$$

где  $\text{rot}_{ij} = \varepsilon_{ijk} \nabla_k$ ,  $\varepsilon_{ijk}$  – символ Леви-Чивита.

И последнее уравнение имеет вид

$$\langle h_i(x) \rangle = - \overset{(efm)}{k}_{ij}(x) \langle \frac{\partial T}{\partial x_j} \rangle, \quad (2.183)$$

где знак " $\langle \rangle$ " осреднение по ансамблю полей неоднородности,  $\overset{(efm)}{k}_{ij}(x)$  – эффективный тензорный коэффициент теплопроводности.

Запишем систему уравнений (2.180) – (2.183) для расчета стационарного температурного поля в теплопроводящих минералах в более удобной форме

$$\begin{aligned} \nabla_i h_i(x) &= -q(x) \\ h_i(x) &= k_{ij}(x) t_j(x) \end{aligned} \quad (2.184)$$

$$rot_{ij} t_j(x) = 0$$

$$\langle h_i(x) \rangle = - k_{ij}^{(efm)}(x) \langle t_j(x) \rangle,$$

где  $t_j(x) = \frac{\partial T}{\partial x_j}$ .

Сравнив полученную систему с уравнениями (2.6) – (2.8), получим, что первое уравнение является аналогом уравнения равновесия, второе – закона Гука, третье – уравнения совместности, четвертое – уравнения относительно средних. Данное обстоятельство дает основание для разработки рассматриваемой модели в рамках метода аналогий с компонентной математической моделью минерала в упругом состоянии.

В результате получим следующее выражения для определения эффективного тензорного коэффициента теплопроводности минерала

$$k^{(efm)} = \langle k^{(m)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot k^{(1m)} \right)^{-1} \rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot k^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle, \quad (2.185)$$

где  $\mathbf{W}$  – единичный двухвалентный тензор;  $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(m)} \mathbf{D}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{D}(Ak)$  –

преобразование Фурье-ядра  $D_{ij}^{(m)}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина матрицы, свойства которой характеризуются тензором  $\langle k^{(m)} \rangle$ .

Отсюда эффективный тензор теплового сопротивления минерала имеет следующий вид:

$$r^{(efm)} = \left\langle \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot k^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle k^{(m)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot k^{(1m)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (2.186)$$

Остальные мультифрактальные математические модели, позволяющие определить эффективный тензорный коэффициент теплопроводности и эффективный тензор теплового сопротивления геоматериалов, получим идентичным подходом с помощью метода аналогий. В результате получим:

1. Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными флюидом пораами относительно теплопроводных свойств имеет следующий вид:

$$\mathbf{k}^{(efmp)} = \mathbf{k}^{(efm)} + \left\langle \frac{V^{(ELmp)}}{V^{(BVmp)}} \mathbf{k}^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (2.187)$$

$$\times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \left\langle \frac{V^{(ELmp)}}{V^{(BVmp)}} \mathbf{k}^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1},$$

$$\mathbf{r}^{(efmp)} = \left( \mathbf{k}^{(efm)} + \left\langle \frac{V^{(ELmp)}}{V^{(BVmp)}} \mathbf{k}^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (2.188)$$

$$\times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \left\langle \frac{V^{(ELmp)}}{V^{(BVmp)}} \mathbf{k}^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1},$$

где  $\mathbf{\Omega}^{(mp)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(mp)} \mathbf{D}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{D}(Ak)^{(mp)}$  – преобразование Фурье-ядра  $D_{ij}^{(mp)}(x)$ ,

представляющего собой вторую производную функцию Грина минеральной матрицы, свойства которой характеризуются тензором  $\mathbf{k}^{(efm)}$ ;  $\mathbf{k} = \mathbf{k}^{(p)} - \mathbf{k}^{(efm)}$ ;  $\mathbf{k}^{(p)}$  – тензорный коэффициент теплопроводности газа (или жидкости), заполняющего поры;  $V^{(ELmp)}$  и  $V^{(BVmp)}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в минеральной фрактальной среде с порами.

2. Мультифрактальная математическая модель минерала с флюидными включениями относительно теплопроводных свойств сводится к выражениям:

$$\mathbf{k}^{(efmv)} = \mathbf{k}^{(efmp)} + \left\langle \frac{V^{(ELmv)}}{V^{(BVmv)}} \mathbf{k}^{(1mv)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mv)} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (2.189)$$

$$\times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \left\langle \frac{V^{(ELmv)}}{V^{(BVmv)}} \mathbf{k}^{(1mv)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mv)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1},$$

$$\mathbf{r}^{(efmv)} = \left( \mathbf{k}^{(efmp)} + \left\langle \frac{V^{(ELmv)}}{V^{(BVmv)}} \mathbf{k}^{(1mv)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mv)} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (2.190)$$

$$\times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \left\langle \frac{V^{(ELmv)}}{V^{(BVmv)}} \mathbf{k}^{(1mv)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(mv)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1},$$

где  $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(mv)} \mathbf{D}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{D}(Ak)$  – преобразование Фурье-ядра  $D_{ij}^{(mv)}(x)$ ,

представляющего собой вторую производную функцию Грина минеральной матрицы с порами, свойства которой характеризуются тензором  $\mathbf{k}^{(efmp)}$ ;  $\mathbf{k}^{(lmv)} = \mathbf{k}^{(v)} - \mathbf{k}^{(efmp)}$ ;  $\mathbf{k}^{(v)}$  – тензорный коэффициент теплопроводности газа (или жидкости), заполняющего включения;  $V^{(ELmv)}$  и  $V^{(BVmv)}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в минеральной фрактальной среде с включениями.

3. Мультифрактальная математическая модель горной породы относительно теплопроводных свойств имеет следующий вид

$$\mathbf{k}^{(eftgp)} = \mathbf{k}^{(efdgp)} + \left\langle \frac{V^{(ELtgp)}}{V^{(BVtgp)}} \mathbf{k}^{(1tgp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \cdot \left\langle \frac{V^{(ELtgp)}}{V^{(BVtgp)}} \mathbf{k}^{(1tgp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (2.191)$$

$$\mathbf{r}^{(eftgp)} = \left( \mathbf{k}^{(efdgp)} + \left\langle \frac{V^{(ELtgp)}}{V^{(BVtgp)}} \mathbf{k}^{(1tgp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \cdot \left\langle \frac{V^{(ELtgp)}}{V^{(BVtgp)}} \mathbf{k}^{(1tgp)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k}^{(tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad (2.192)$$

где  $\mathbf{k}^{(1tgp)} = \mathbf{k}^{(efmv)} - \mathbf{k}^{(efdgp)}$ ;  $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(tgp)} \mathbf{D}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{D}(Ak)$  – преобразование Фурье-

ядра  $D_{ij}^{(tgp)}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина двухминеральной горно-породной матрицы (трехмерной сплошной среды с эффективными свойствами  $\mathbf{k}^{(efdgp)}$ );  $V^{(ELtgp)}$  и  $V^{(BVtgp)}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в трехминеральной горно-породной фрактальной среде;

$$\begin{aligned} \overset{(efdgp)}{\mathbf{k}} = \overset{(efogp)}{\mathbf{k}} + \left\langle \frac{\overset{(ELdgp)}{V}}{\overset{(BVdgp)}{V}} \overset{(ldgp)}{\mathbf{k}} \left( \mathbf{W} + \overset{(dgp)}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \overset{(ldgp)}{\mathbf{k}} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{W} - \overset{(dgp)}{\boldsymbol{\Omega}} \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{\overset{(ELdgp)}{V}}{\overset{(BVdgp)}{V}} \overset{(ldgp)}{\mathbf{k}} \left( \mathbf{W} + \overset{(dgp)}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \overset{(ldgp)}{\mathbf{k}} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \overset{(ldgp)}{\mathbf{k}} = \overset{(efmv)}{\mathbf{k}} - \overset{(efogp)}{\mathbf{k}}; \overset{(dgp)}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(dgp)}{\mathbf{D}}(\mathbf{A}\mathbf{k}) dS; \end{aligned}$$

$\overset{(dgp)}{\mathbf{D}}(\mathbf{A}\mathbf{k})$  – преобразование Фурье-ядра  $\overset{(dgp)}{D}_{ij}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина одноминеральной горно-породной матрицы (трехмерной сплошной среды с эффективными свойствами  $\overset{(efogp)}{\mathbf{k}}$ );  $\overset{(ELdgp)}{V}$  и  $\overset{(BVdgp)}{V}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в двухминеральной

горно-породной фрактальной среде;  $\overset{(efogp)}{\mathbf{k}} = \left\langle \overset{(efmv)}{\mathbf{k}} \left( \mathbf{W} + \overset{(ogp)}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \overset{(logp)}{\mathbf{k}} \right)^{-1} \right\rangle \times$   
 $\times \left\langle \left( \mathbf{W} + \overset{(ogp)}{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \overset{(logp)}{\mathbf{k}} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}; \overset{(logp)}{\mathbf{k}} = \overset{(efmv)}{\mathbf{k}} - \left\langle \overset{(efmv)}{\mathbf{k}} \right\rangle; \overset{(dgp)}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(dgp)}{\mathbf{D}}(\mathbf{A}\mathbf{k}) dS; \overset{(dgp)}{\mathbf{D}}(\mathbf{A}\mathbf{k})$  –

преобразование Фурье-ядра  $\overset{(dgp)}{D}_{ij}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина минеральной матрицы с включениями (трехмерной сплошной среды со свойствами  $\left\langle \overset{(efmv)}{\mathbf{k}} \right\rangle$ ).

Перейдем к разработке мультифрактальных математических моделей минералов, минералов с наполненными флюидом порами, минералов с флюидными включениями, а также горных пород относительно электропроводных свойств. При этом, как и при рассмотрении предыдущей функциональной задачи, в виду отсутствия технологий реализации стационарного электрического поля в представительном объеме породного массива, мультифрактальное моделирование данного вида геоматериала не рассматривается.

Разработаем мультифрактальную математическую модель минерала относительно электропроводных свойств. Исследуемый геоматериал состоит из зерен, плотно прилегающих друг другу, анизотропных по отношению электрических свойств, в частности – к удельной электропроводности. Зерна в

минерале случайно ориентированы в пространстве и взаимодействуют между собой через стационарное электрическое поле. Исследуемый минерал обладает мультифрактальной структурой. Аппроксимируем каждое зерно минерала эллипсоидом.

На основе данной содержательной модели рассматриваемого геоматериала перейдем к построению математической модели. Сопоставим минералу трехмерную неограниченную анизотропную упругую сплошную среду со случайно-ориентированными в пространстве неоднородностями. Поскольку данные неоднородности являются анизотропными, то их электропроводные характеристики являются тензорными величинами и описываются случайной величиной  $\lambda^{(m)}$ , называемой тензорным коэффициентом удельной электропроводности.

Поместим в матрицу с электропроводными свойствами, равными усредненным значениям  $\langle \lambda^{(m)} \rangle$ , указанные эллипсоидальные неоднородности. В результате получим модель сплошной среды для рассматриваемого минерала, которую назовем сплошной средой со структурой. Тогда полученная среда с эллипсоидальными неоднородностями можно охарактеризовать тензорным коэффициентом удельной электропроводности  $\lambda^{(m)}(\mathbf{x}) = \langle \lambda^{(m)} \rangle + \lambda^{(1m)} V(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$  – точка среды;  $V(\mathbf{x})$  – характеристическая функция области  $V$ ;  $\lambda^{(1m)} = \lambda^{(m)} - \langle \lambda^{(m)} \rangle$  – случайный двухвалентный тензор, постоянный в пределах каждой неоднородности и меняющийся скачком на границе эллипсоидов. В результате – тензор  $\lambda^{(m)}(\mathbf{x})$  является кусочно-постоянной положительно-определенной функцией, имеющей разрыв на границе эллипсоидальных неоднородностей.

И как результат данная математическая модель сводится к следующей системе уравнений, записанных в индексном обозначении:

$$\nabla_i j_i(x) = -q(x), \quad (2.193)$$

где  $j_i(x)$  – объемная плотность стационарного тока;  $q(x)$  – скалярная плотность непрерывно распределенных источников тока.

$$j_i(x) = \lambda_{ik}(x) E_k(x), \quad (2.194)$$

где  $E_k(x)$  – напряженность электрического поля.

$$\text{rot}_{il} E_l = 0, \quad (2.195)$$

$$\langle j_i(x) \rangle = \overset{\text{(efm)}}{\lambda}_{ik}(x) \langle E_k(x) \rangle, \quad (2.196)$$

где знак " $\langle \rangle$ " осреднение по ансамблю полей неоднородности;  $\overset{\text{(efm)}}{\lambda}$  – эффективный тензорный коэффициент удельной электропроводности.

Как и в предыдущей функциональной задаче при анализе полученной системы с выражениями (2.6) – (2.8) получим, что уравнения (2.193), (2.194), (2.195) и (2.196) является соответственно аналогами уравнений равновесия, обобщенного закона Гука, уравнения совместности и уравнения относительно средних. Данное обстоятельство дает основание для построения рассматриваемой модели в рамках метода аналогий с компонентной математической моделью минерала в упругом состоянии.

В результате получим следующее выражение для определения эффективного тензорного коэффициента удельной электропроводности минерала

$$\overset{\text{(efm)}}{\lambda} = \langle \overset{\text{(m)}}{\lambda} \left( \mathbf{W} + \overset{\text{(m)}}{\Psi} \cdot \overset{\text{(1m)}}{\lambda} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{W} + \overset{\text{(m)}}{\Psi} \cdot \overset{\text{(1m)}}{\lambda} \right)^{-1} \rangle, \quad (2.197)$$

где  $\overset{\text{(m)}}{\Psi} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{\text{(m)}}{\mathbf{T}}(Ak) dS$ ;  $\overset{\text{(m)}}{\mathbf{T}}(Ak)$  – преобразование Фурье-ядра  $\overset{\text{(m)}}{T}_{ij}(x)$ ,

представляющего собой вторую производную функцию Грина матрицы, свойства которой характеризуются тензором  $\langle \overset{\text{(m)}}{\lambda} \rangle$ .

Принимая во внимание, что  $\overset{\text{(ef)}}{\rho} = \overset{\text{(ef)}}{\lambda}^{-1}$ , получим следующее выражение для определения эффективного тензора электросопротивления минерала

$$\overset{\text{(efm)}}{\rho} = \langle \left( \mathbf{W} + \overset{\text{(m)}}{\Psi} \cdot \overset{\text{(1m)}}{\lambda} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \overset{\text{(m)}}{\lambda} \left( \mathbf{W} + \overset{\text{(m)}}{\Psi} \cdot \overset{\text{(1m)}}{\lambda} \right)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (2.198)$$

Оставшиеся мультифрактальные математические модели, позволяющие

определить эффективный тензорный коэффициент удельной электропроводности и эффективный тензор электросопротивления геоматериалов, найдем идентичным подходом в рамках метода аналогий. В результате получим:

1. Мультифрактальная математическая модель минерала с наполненными флюидом порами относительно электропроводных свойств имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda^{(efmp)} = \lambda^{(efm)} + \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \lambda^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(mp)} \cdot \lambda^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left( \mathbf{W} - \Psi^{(mp)} \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \lambda^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(mp)} \cdot \lambda^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.199)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(efmp)} = \left( \lambda^{(efm)} + \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \lambda^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(mp)} \cdot \lambda^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \right. \\ \left. \times \left( \mathbf{W} - \Psi^{(mp)} \left\langle \frac{(ELmp)}{V} \lambda^{(1mp)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(mp)} \cdot \lambda^{(1mp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.200)$$

где  $\Psi^{(mp)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(mp)} \mathbf{T}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{T}(Ak)$  – преобразование Фурье-ядра  $T_{ij}^{(mp)}(x)$ ,

представляющего собой вторую производную функцию Грина минеральной матрицы, свойства которой характеризуются тензором  $\lambda^{(efm)}$ ;  $\lambda^{(1mp)} = \lambda^{(p)} - \lambda^{(efm)}$ ;  $\lambda^{(p)}$  – тензорный коэффициент удельной электропроводности газа (или жидкости), заполняющего поры;  $V^{(ELmp)}$  и  $V^{(BVmp)}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в минеральной фрактальной среде с порами.

2. Мультифрактальная математическая модель минерала с флюидными включениями относительно электропроводных свойств:

$$\begin{aligned} \lambda^{(efmv)} = \lambda^{(efmp)} + \left\langle \frac{(ELmv)}{V} \lambda^{(1mv)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(mv)} \cdot \lambda^{(1mv)} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left( \mathbf{W} - \Psi^{(mv)} \left\langle \frac{(ELmv)}{V} \lambda^{(1mv)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(mv)} \cdot \lambda^{(1mv)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \left( \begin{array}{l} \text{(efmv)} \\ \lambda + \left\langle \frac{\text{(ELmv)}}{V} \frac{\text{(1mv)}}{(BV\text{mv})} \lambda \left( \mathbf{W} + \text{(mv)} \text{(1mv)} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left( \mathbf{W} - \text{(mv)} \Psi \left\langle \frac{\text{(ELmv)}}{V} \frac{\text{(1mv)}}{(BV\text{mv})} \lambda \left( \mathbf{W} + \text{(mv)} \text{(1mv)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \end{array} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.158)$$

где  $\text{(mv)} \Psi = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \text{(mv)} \mathbf{T} (Ak) dS$ ;  $\text{(mv)} \mathbf{T} (Ak)$  – преобразование Фурье-ядра  $\text{(mv)} T_{ij} (x)$ ,

представляющего собой вторую производную функцию Грина минеральной матрицы с порами, характеризуемой тензором  $\text{(efmv)} \lambda$ ;  $\text{(1mv)} \lambda = \lambda - \lambda$ ;  $\lambda$  – тензорный коэффициент удельной электропроводности газа (или жидкости), заполняющего включения;  $\text{(ELmv)} V$  и  $\text{(BVmv)} V$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в минеральной фрактальной среде с включениями.

3. Мультифрактальная математическая модель горной породы относительно электропроводных свойств имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \lambda = & \begin{array}{l} \text{(eftgp)} \\ \lambda = \text{(efdgp)} \lambda + \left\langle \frac{\text{(ELtgp)}}{V} \frac{\text{(1tgp)}}{(BV\text{tgp})} \lambda \left( \mathbf{W} + \text{(tgp)} \text{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left( \mathbf{W} - \text{(tgp)} \Psi \left\langle \frac{\text{(ELtgp)}}{V} \frac{\text{(1tgp)}}{(BV\text{tgp})} \lambda \left( \mathbf{W} + \text{(tgp)} \text{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \end{array} \end{aligned} \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \left( \begin{array}{l} \text{(eftgp)} \\ \lambda + \left\langle \frac{\text{(ELtgp)}}{V} \frac{\text{(1tgp)}}{(BV\text{tgp})} \lambda \left( \mathbf{W} + \text{(tgp)} \text{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \times \\ \times \left( \mathbf{W} - \text{(tgp)} \Psi \left\langle \frac{\text{(ELtgp)}}{V} \frac{\text{(1tgp)}}{(BV\text{tgp})} \lambda \left( \mathbf{W} + \text{(tgp)} \text{(1tgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \end{array} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.160)$$

где  $\text{(1tgp)} \lambda = \lambda - \lambda$ ;  $\text{(tgp)} \Psi = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \text{(tgp)} \mathbf{T} (Ak) dS$ ;  $\text{(tgp)} \mathbf{T} (Ak)$  – преобразование Фурье-

ядра  $\text{(tgp)} T_{ij} (x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина двухминеральной горно-породной матрицы (трехмерной сплошной среды со

$$\begin{aligned} \text{свойствами } \lambda^{(efdgp)}); \quad \lambda^{(efdgp)} = \lambda^{(efogp)} + \left\langle \frac{V^{(ELdgp)}}{(BVdgp)} \lambda^{(ldgp)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(dgp)} \cdot \lambda^{(ldgp)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{W} - \Psi^{(dgp)} \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{V^{(ELdgp)}}{(BVdgp)} \lambda^{(ldgp)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(dgp)} \cdot \lambda^{(ldgp)} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \quad \lambda^{(ldgp)} = \lambda^{(efmv)} - \lambda^{(efogp)}; \quad \Psi^{(dgp)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} T^{(dgp)}(Ak) dS; \end{aligned}$$

$T^{(dgp)}(Ak)$  – преобразование Фурье-ядра  $T_{ij}^{(dgp)}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина одноминеральной горно-породной матрицы (трехмерной сплошной среды с эффективными свойствами  $\lambda^{(efogp)}$ );

$$\lambda^{(efogp)} = \left\langle \lambda^{(efmv)} \left( \mathbf{W} + \Psi^{(ogp)} \cdot \lambda^{(logp)} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{W} + \Psi^{(ogp)} \cdot \lambda^{(logp)} \right)^{-1} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda^{(logp)} = \lambda^{(efmv)} - \left\langle \lambda^{(efmv)} \right\rangle;$$

$$\Psi^{(dgp)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} T^{(dgp)}(Ak) dS; \quad T^{(dgp)}(Ak) \text{ – преобразование Фурье-ядра } T_{ij}^{(dgp)}(x),$$

представляющего собой вторую производную функцию Грина минеральной матрицы включениями (трехмерной сплошной среды со свойствами  $\langle \lambda^{(efmv)} \rangle$ ).

## 2.6. Верификация мультифрактальных математических моделей геоматериалов

Одним из важнейших этапов математического моделирования любого исследуемого объекта является верификация полученной модели. На данном этапе осуществляется проверка разработанной математической модели на предмет ее адекватности изучаемому реальному объекту относительно выбранной системы его свойств. Поскольку, во всех выше разработанных моделях в качестве параметров используются эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей, то процедуру верификации уместно начать с математических моделей геоматериалов относительно деформационных свойств. Как правило, проверку адекватности модели осуществляют на основе сравнения результатов математического моделирования с экспериментальными данными. Известно, что

подобного рода данные сильно зависят от условий, методов и средств проведения эксперимента. В связи с этим, рассмотрим существующие экспериментальные методы определения деформационных свойств геоматериалов, и на их основе сформулируем требования, которым должны соответствовать опытные данные, для того, чтобы их можно было применить при верификации разработанных в данной главе математических моделей.

Экспериментальные методы определения деформационных свойств геоматериалов можно разделить на динамические и статические. Динамические методы разработаны значительно позднее, чем статические, и благодаря своей простоте и малой трудоемкости получают все большее распространение при решении широкого круга задач в горной промышленности. Однако в точности измерения деформационных свойств статические методы все еще превосходят динамические. Именно поэтому в качестве источника экспериментальных данных при верификации разработанных мультифрактальных моделей следует использовать опыты, основанные на статических методах. В этом заключается первое требование, предъявляемое к экспериментальным данным.

Как известно, статические методы основаны на измерении упругих деформаций образцов исследуемых геоматериалов под нагрузкой. При этом образцы должны обладать одним и тем же химическим составом, технологией изготовления, особенностями структуры и др. Установлено, что испытания над образцами, изготовленными из одного и того же геоматериала и обладающими разными геометрическими размерами, приводят к различным значениям параметров деформационных свойств. В тоже время, при увеличении размеров образцов, начиная с некоторой величины их объема (называемого представительным), наблюдается статистическое совпадение значений данных параметров. Подобный масштабный эффект широко известен, проявляется при исследовании всех типов геоматериалов, и подробно описывается в работах [86, 94, 95 и др.]. Кроме того, как показывают исследования, не всякий образец геоматериала относится к природным мультифракталам в строгом смысле данного термина. Действительно, на практике встречаются геоматериалы,

структурные составляющие которого или сам исследуемый объект в целом, не обладают свойством масштабной инвариантности. Для таких геоматериалов, обладающих так называемой незавершено-мультифрактальной структурой, степень количественной адекватности разработанных математических моделей будет существенно ниже – погрешность составляет более 15% и существенно зависит от состава и строения изучаемых объектов.

Как будет доказано в дальнейшем, для каждого исследуемого геоматериала представительный объем играет роль не только величины объема, начиная с которой наблюдается статистическое совпадение значений параметров деформационных свойств образцов, но и служит критерием проверки, определяющим, обладает ли исследуемый объект природно-мультифрактальной структурой. Следовательно, для того, чтобы использовать экспериментальные данные в процедуре верификации разработанных мультифрактальных математических моделей, они должны быть получены в результате испытаний образцов, объем которых превышает или равен представительному объему исследуемого геоматериала. В этом заключается второе и последнее требование, предъявляемое к экспериментальным данным.

Именно поэтому, верификацию мультифрактальных математических моделей минералов и минералов с наполненными флюидом порами, в виду малой величины их представительного объема, следует производить на основе сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными. А для всех остальных типов геоматериалов верификацию следует осуществлять посредством сопоставления полученных результатов в предельных случаях с другими упрощенными моделями, подтвердившими свою адекватность.

Сопоставим значения модулей Юнга образцов различных минералов осадочного происхождения, полученные на основе мультикомпонентной математической модели минерала относительно деформационных свойств, с экспериментальными значениями данных модулей (Таблица 1).

Таблица 1.

Наименование минерала	Размеры образца минерала ( $\times 10^{-2}$ м)	Значение модуля упругости $E$ , полученное в результате опыта ( $\times 10^9$ Н / м <sup>2</sup> )	Значение модуля упругости $E = \frac{1}{C'_{11}}$ , полученное с помощью модели ( $\times 10^9$ Н / м <sup>2</sup> )	Относительная погрешность (%)
Кальцит	8×8×6	90,11	92,71	2,89
	8×8×8	89,82	92,71	3,22
	10×10×10	89,23	92,71	3,9
Биотит	6×6×6	70,12	69,13	1,41
	8×6×6	68,24	69,13	1,30
	10×10×10	71,63	69,13	3,49
Гипс	8×8×6	14,25	13,9	2,46
	8×8×8	13,71	13,9	1,39
	10×10×10	13,5	13,9	2,96
Мусковит	8×8×8	95,33	96,39	1,11
	8×8×6	96,01	96,39	0,40
	10×10×10	94,05	96,39	2,49
Микроклин	8×6×6	83,24	84,7	1,75
	8×8×6	86,33	84,7	1,89
	10×10×10	88,34	84,7	4,12
Доломит	6×6×6	79,14	76,44	3,41
	8×6×6	77,92	76,44	1,90
	10×10×10	73,4	76,44	4,14

Из приведенной таблицы следует, что результаты моделирования незначительно отличаются от экспериментальных данных (отклонение составляет менее 5%). Это, в свою очередь, свидетельствует о высокой степени адекватности разработанной мультикомпонентной математической модели минерала относительно деформационных свойств.

Сравним величины модулей упругости образцов минералов с наполненными жидкостью порами, полученные в результате применения мультифрактальной математической модели минерала с наполненными жидкостью порами, с экспериментальными значениями данных модулей (таблица 2).

Таблица 2.

Наименование минерала	Размеры образца минерала с наполненными жидкостью порами ( $\times 10^{-2}$ м)	Значение модуля упругости $E$ , полученное в результате опыта ( $\times 10^9$ Н / м <sup>2</sup> )	Значение модуля упругости $E = \frac{1}{C'_{11} \cdot (e_{fmp})}$ , полученное с помощью модели ( $\times 10^9$ Н / м <sup>2</sup> )	Относительная погрешность (%)
Кальцит	8×8×6	31,13	30,31	2,63
	8×8×8	30,24	30,31	0,23
	10×8×8	29,38	30,31	3,17
	10×10×10	28,92	30,31	4,81
	12×12×12	28,88	30,31	4,96
Гипс	8×8×6	8,33	8,13	2,4
	10×8×8	8,16	8,13	0,37
	10×10×10	7,89	8,13	3,04
	12×10×10	7,82	8,13	3,96
	12×12×12	7,77	8,13	4,63

Анализируя результаты, приведенные в таблице 2, можно констатировать 5% отклонение результатов компьютерного моделирования от экспериментальных данных, что указывает на высокую степень адекватности разработанной мультифрактальной математической модели минерала с наполненными жидкостью порами.

Перейдем к верификации мультифрактальных математических моделей минерала с жидкостными включениями, горной породы и породного массива относительно деформационных свойств. Для этого сведем данные математические модели к предельному случаю. В результате получим модифицированную модель, которая не теряя своей строгости, сводит трехмерную неограниченную неоднородную упругую среду с фрактальными неоднородностями разнесенными в пространстве к изотропной однородной квадратной регулярной решетке с изотропными круговыми включениями (рисунок 18).

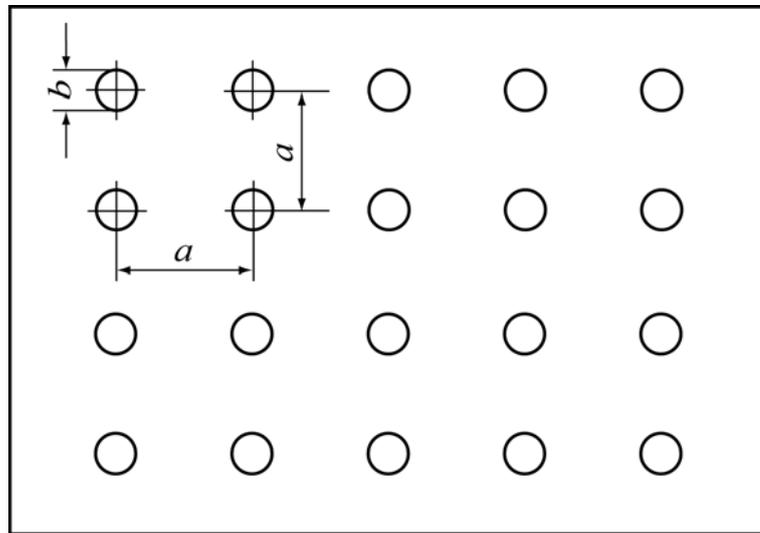


Рисунок 18 – Изотропная однородная квадратная регулярная решетка с изотропными круговыми включениями

Однако задача определения деформационных свойств для такой квадратной решетки поддается точному решению, представленному в [22]. Из данной работы следует, что это решение зависит от модуля упругости  $E^{осн}$  основной среды, модуля упругости  $E^{неод}$  изотропной неоднородности, расстояние  $a$  между центрами включений и диаметр включения  $b$ .

Поэтому для проверки адекватности сравним графики зависимости относительной величины эффективных модулей упругости  $E^{эф} / E^{осн}$  от концентрации включений при разных значениях отношения  $a / b$ , полученных с помощью модифицированной модели и работы [22] (рисунок 19).

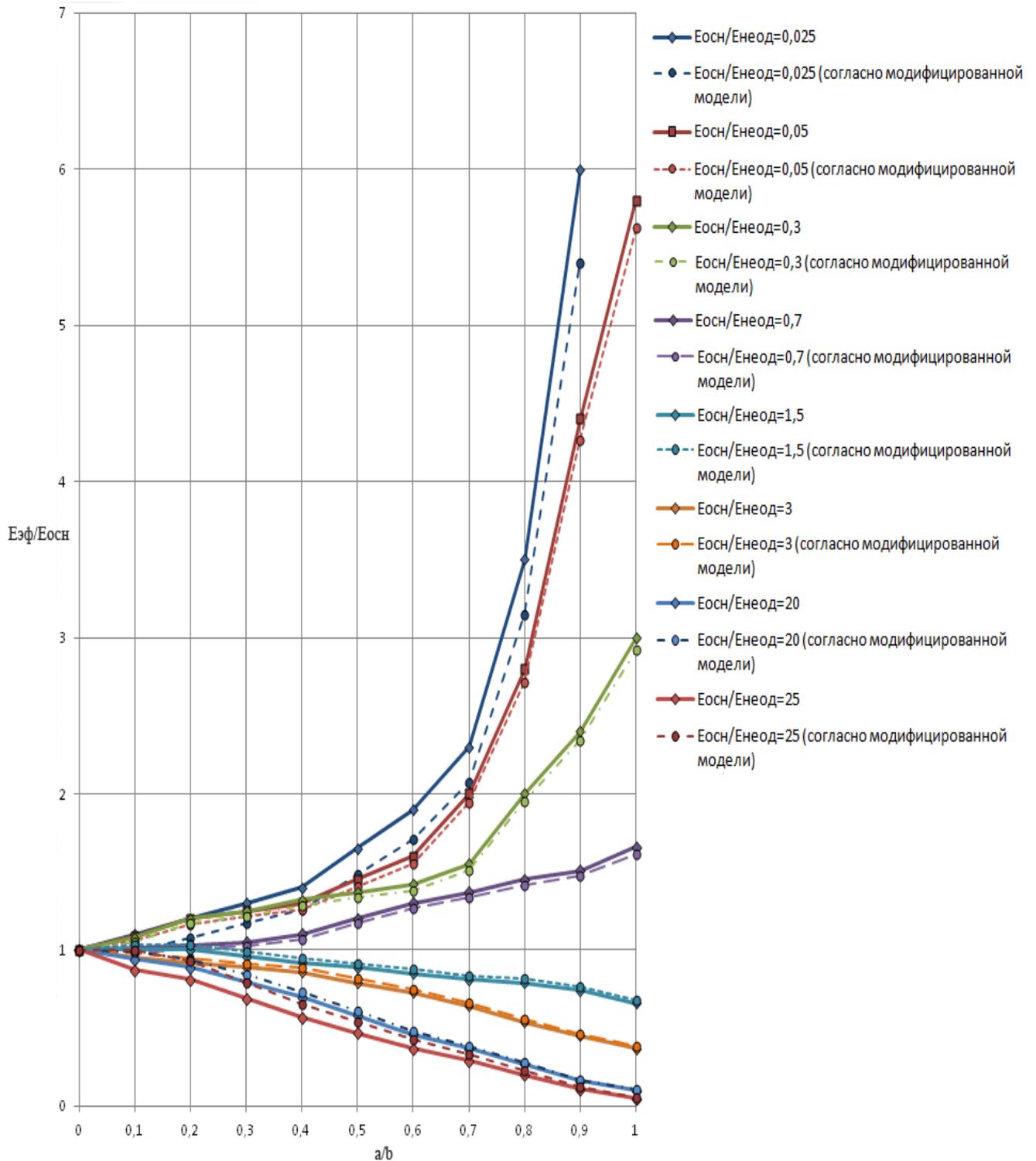


Рисунок 19 – Графики  $E^{эф} / E^{осн}$  от  $a / b$  (сплошные кривые – точное решение, штриховые с кружками – решение на основе модифицированной модели)

Анализ приведенных графиков показывает, что для рассмотренной регулярной структуры решение на основе модифицированной модели практически совпадает с точным решением (отклонение менее 5%), когда

отношение модуля упругости  $E^{неод}$  изотропной неоднородности к модулю упругости  $E^{осн}$  основной среды лежит в диапазоне  $0,05 \leq E^{осн} / E^{неод} \leq 20$ . При  $E^{осн} / E^{неод} > 20$  или  $E^{осн} / E^{неод} < 0,05$  решения на основе модифицированной модели дают погрешность, возрастающую с ростом концентрации включений в основной среде. Таким образом, разработанные мультифрактальные математические модели минерала с жидкостными включениями, горной породы и породного массива адекватны изучаемым объектам в случае выполнения условия  $0,05 \leq E^{осн} / E^{неод} \leq 20$ .

Итак, математические модели геоматериалов мультифрактальной структуры относительно деформационных свойств разработаны и верифицированы. Использование данных моделей, в пределах ограничений на структуру исследуемых объектов, дает высокую степень точности значений определяемых эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей.

В тоже время адекватность математических моделей геоматериалов относительно деформационных свойств свидетельствует об адекватности моделей тепло- и электропроводных свойств, что обусловлено их полной математической аналогией.

Перейдем к верификации мультифрактальных математических моделей геоматериалов относительно полей напряжений. При проверке адекватности рассматриваемых моделей необходимо обратить внимание на следующие обстоятельства. В любой из этих моделей в качестве входных параметров обязательно используется тензор внешнего поля напряжений, действующего на породный массив. Поскольку существующие экспериментальные методы определения внешнего поля напряжений обладают большой степенью погрешности (по причине неудовлетворительного учета масштабного эффекта), то полученные с их помощью данные не могут составить основу для сравнения с результатами мультифрактального моделирования геоматериалов относительно полей напряжений. В тоже время необходимо отметить, что перколяционная модель экспериментального исследования образования трещин в минерале под

действием внешнего поля напряжений по причине своей мультифрактальности в качестве входных данных включает выходные параметры всех выше представленных моделей. Поэтому доказав ее адекватность автоматически подтвердится правильность результатов, получаемых с помощью мультифрактальных математических моделей геоматериалов относительно полей напряжений.

Для верификации перколяционной модели экспериментального исследования образования трещин в минерале под действием внешнего поля напряжений сведем ее к вырожденному случаю, т.е. когда компоненты тензоров  $C^{(1tgp)}$ ,  $C^{(1tpm)}$  и  $C'^{(eftpm)}$  равны нулю. В таком случае тензоры внешних полей напряжений, действующих на породный массив, горные породы и минералы с жидкостными включениями, будут тождественны друг другу. Это дает основание для проверки адекватности рассматриваемой модели посредством сопоставления длин трещин, получаемых в результате моделирования и экспериментального нагружения макрообразцов минералов с наполненными жидкостью пораами. Результаты такого сравнения представлены в таблице 3.

Анализируя результаты, приведенные в данной таблице, можно констатировать высокую степень совпадения (отклонение менее 5%) экспериментальных данных с результатами, полученными на основе разработанной перколяционной модели экспериментального исследования образования трещин в минерале под действием внешнего поля напряжений. Данное обстоятельство в свою очередь подтверждает адекватность мультифрактальных математических моделей геоматериалов относительно полей напряжений. При этом границы адекватности рассматриваемых моделей и перколяционной модели, выраженной в алгоритмической форме, ввиду использования в качестве входных параметров эффективных тензоров модулей упругости и упругих податливостей исследуемых объектов, идентичны, что и для мультифрактальных математических моделей геоматериалов относительно деформационных свойств.

Таблица 3.

Наименование минерала	Размеры образца минерала с наполненными жидкостью пораами и трехмерной перколяционной решетки ( $\times 10^{-2}$ м)	Величина главного значения $\sigma_3$ внешнего поля напряжений (остальные компоненты равны нулю) (МПа)	Длина вертикально ориентированной трещины согласно опытам ( $\times 10^{-2}$ м)	Длина вертикально ориентированной трещины согласно результатам моделирования ( $\times 10^{-2}$ м)	Относительная погрешность (%)
Гипс	6×6×6	10	2,73	2,6	4,8
	6×6×6	5	1,95	1,87	4,1
	8×8×8	12	2,87	2,75	4,2
	8×8×8	6	2,04	1,98	2,9
	4×4×8	14	2,96	2,84	4,1
	4×4×8	7	2,11	2,01	4,7
	4×4×6	4	0,92	0,91	1,1
	4×4×6	2	0,51	0,5	1,9
Кальцит	6×6×6	5	2,82	2,71	3,9
	6×6×6	2,5	1,88	1,81	3,7
	8×8×8	6	2,95	2,83	4,1
	8×8×8	3	2,16	2,07	4,2
	4×4×8	7	3,01	2,92	3,0
	4×4×8	3,5	2,29	2,19	4,4
	4×4×6	2	0,99	0,97	2,0
	4×4×6	1	0,58	0,57	1,7

Итак, все приведенные выше математические методы и модели геоматериалов относительно деформационных свойств, тепло- и электропроводности, а также полей напряжений вместе составляют теоретические основы мультифрактального математического моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности. Использование данных теоретических снов при разработке математического обеспечения АСНИ, АСУ ТП и др. за счет более адекватного учета мультифрактальной структуры исследуемых объектов позволит существенно повысить эффективность выполнения данными системами функциональных задач, связанных с определением деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов, а также установлением внешнего поля напряжений, действующего на породный массив.

### **3. КАРКАС МАТЕМАТИЧЕСКОГО, ИНФОРМАЦИОННОГО И ПРОГРАММНОГО ВИДОВ ОБЕСПЕЧЕНИЯ АСНИ И АСУ ТП**

Полученные математические методы и модели геоматериалов, составляющие теоретические основы мультифрактального математического моделирования функциональных задач позволяют перейти к следующему этапу – разработке каркаса математического обеспечения АСНИ и АСУ ТП. Как указывалось ранее, данный этап заключается в построении математических моделей универсального типа и реализации на их основе алгоритмов, позволяющих эффективно решать функциональные задачи в нескольких предметных областях. Для реализации этого этапа сначала в рамках метода обобщения, установим наиболее полные аналоги геоматериалов и на этой основе модифицируем полученные во второй главе мультифрактальные математические модели на случай их использования для других объектов мультифрактальной структуры. И только потом произведем алгоритмизацию разработанных таким способом математических моделей универсального типа.

Действительно, с точки зрения своего строения минералы, минералы с наполненными флюидом порами, минералы с флюидными включениями, горные породы и породные массивы являются одними из представителей мультифрактальных объектов различного порядка сложности. И поэтому неудивительно, что с помощью методов обобщения и алгоритмизации математических моделей, разработанные теоретические основы мультифрактального моделирования при определенных ограничениях могут быть основой для эффективного выполнения функциональных задач в других предметных областях, не связанных с горной промышленностью.

#### **3.1. Каркас математического обеспечения АСНИ и АСУ ТП**

Для установления аналогов геоматериалов, модификации разработанных ранее математических моделей, а также их последующей алгоритмизации,

классифицируем существующие мультифрактальные объекты с точки зрения их структурной сложности. Кроме того, определим, какого рода объекты, помимо геоматериалов, относятся к каждому из установленных классов мультифракталов.

Для этого обратимся к следующему определению мультифрактала [24]: «Фракталы, характеризуемые целым спектром размерностей, представляют собой как бы несколько «втиснутых» одна в другую фрактальных структур и называются мультифракталами». Это определение не является исчерпывающим, но для нас оно является достаточным. И вот почему. Приведенное определение отражает важный отличительный признак мультифрактальных объектов. При этом ни это, ни более строгие определения не дают полного представления о мультифракталах. Это утверждение, как нетрудно заметить, справедливо также и для фракталов, на основе которых строится определение мультифракталов.

Наличие в этом определении мультифрактала нечетких терминов, таких как «несколько» и «втиснутых», увеличивает итак существующую неопределенность в понятии «мультифрактал» и требует некоторого уточнения. Не нарушая общности под термином «несколько» мы будем понимать значения  $1, 2, \dots, n$ . Термин «втиснутых» может быть раскрыт следующим образом. Пусть каждый элемент структуры тела наделяется и конечным объемом, и собственной симметрией, частным случаем которой является самоподобие, что является признаком самоподобного фрактала. В таком случае эти элементы структуры будут плотно прилегать друг к другу и составят мультифрактальный объект первого порядка сложности. К типичным представителям объектов данного класса следует отнести такой вид геоматериалов как минералы, а также другие поликристаллические образования в виде металлов.

Пусть теперь элементы исходного мультифрактального объекта первого порядка сложности содержат пустоты, заполненные другим объектом с собственной симметрией, отличной от симметрии рассматриваемых элементов. Причем эти включения обладают группой нечувствительности, (равноправности – термин, введенный У. Ноллом [208]), совпадающей с унимодулярной группой. В результате получим мультифрактальный объект второго порядка сложности. К

представителям данного класса мультифрактальных объектов помимо минералов и металлов с наполненными газом (или жидкостью) порами следует отнести жидкости с пузырьками воздуха (оба компонента являются объектами с группой нечувствительности, совпадающей с унимодулярной группой).

Если теперь в полученную мультифрактальную структуру внести включения с таким же содержанием, но с большими размерами, то в результате получим мультифрактальный объект третьего порядка сложности. К объектам данного порядка сложности можно отнести минералы и металлы с флюидными включениями, а также биологические материалы в виде костной ткани.

Для получения следующей более сложного объекта достаточно внести в отдельные области предыдущего мультифрактала отдельные фрагменты такого же типа структуры, но другого состава. При этом их число может меняться от 1 до  $N$ . В результате получим класс мультифрактальных объектов четвертого порядка сложности, к которому следует отнести горные породы, гидросмеси, сплавы, композиционные и строительные материалы.

И в заключение, осуществляя аналогичную процедуру, но уже с объектом, полученным в предыдущем случае, получим мультифрактальный объект пятого порядка сложности. К данному классу объектов следует отнести породные массивы, снежно-ледяные образования и водные объекты.

В итоге, применяя вышеописанную классификацию, посредством соответствующих модификаций и алгоритмизации, получим нижеследующие универсальные математические модели объектов мультифрактальной структуры различного порядка сложности относительно деформационных, тепло- и электропроводных свойств, а также алгоритм определения внешнего поля напряжений, действующий на исследуемый объект.

### **3.1.1. Математические модели и алгоритмы определения деформационных свойств мультифрактальных объектов**

Математическую модель мультифрактального объекта первого порядка

сложности (фрактала, состоящего из вплотную прилегающих друг к другу фрактальных неоднородностей) относительно деформационных свойств с помощью диаграммы состояний можно представить в следующем виде (рисунок 20).

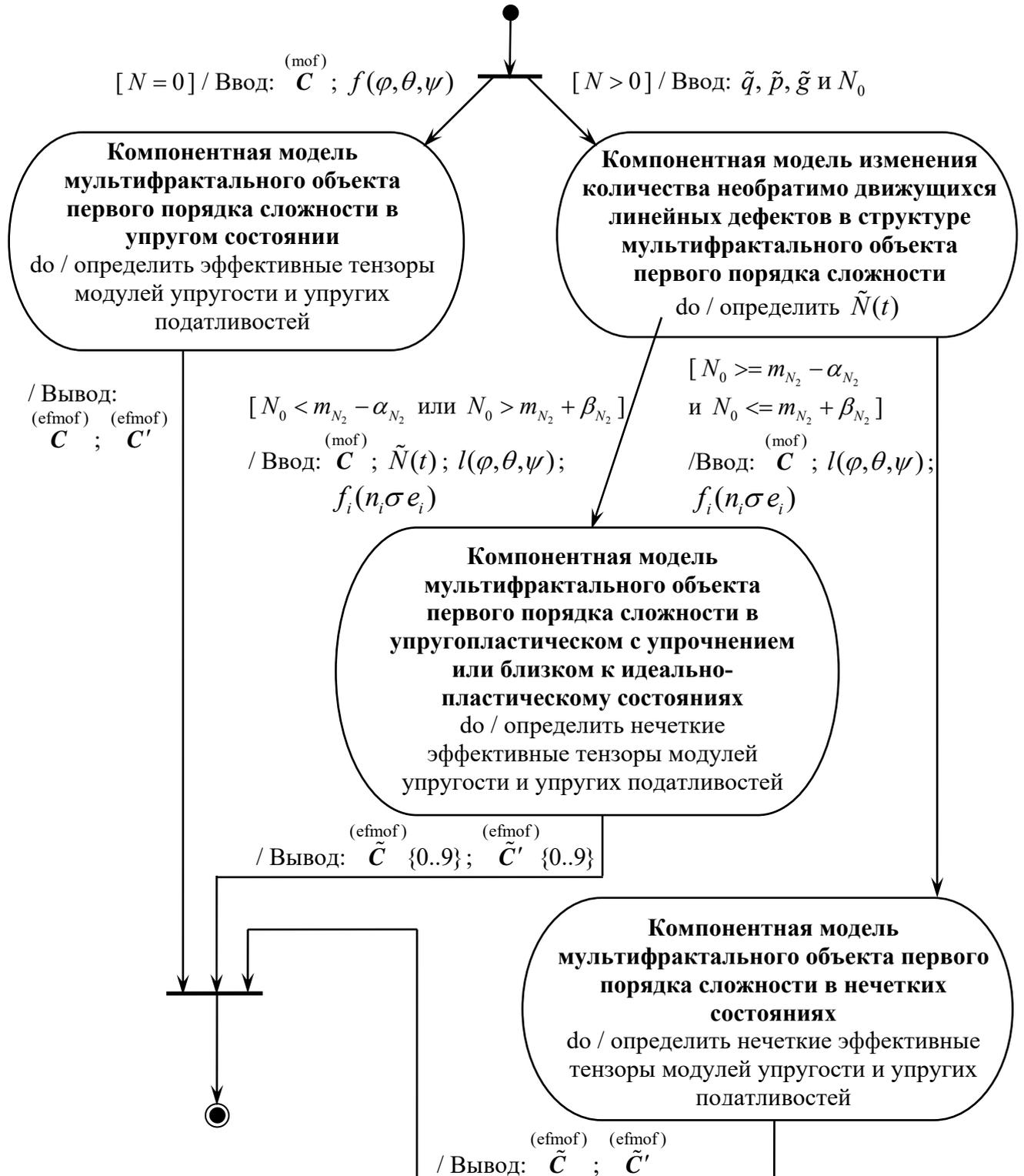


Рисунок 20 – Математическая модель мультифрактального объекта первого порядка сложности относительно деформационных свойств

Детализируем представленную модель более подробно. Первому состоянию на представленной диаграмме соответствует компонентная модель мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругом состоянии, являющаяся обобщением выражений (2.28) и (2.31), и сводящаяся к следующему виду:

$${}^{(efmof)}\mathbf{C} = \langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \rangle^{-1}, \quad (3.1)$$

$${}^{(efmof)}\mathbf{C}' = \langle \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)^{-1} \rangle^{-1}, \quad (3.2)$$

где  ${}^{(efmof)}\mathbf{C}$  и  ${}^{(efmof)}\mathbf{C}'$  – эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности;  ${}^{(mof)}\mathbf{C}$  – тензор модулей упругости фрактальной неоднородности рассматриваемого объекта;  ${}^{(1mof)}\mathbf{C} = \mathbf{C} - \langle \mathbf{C} \rangle$ ;  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  ${}^{(mof)}\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} {}^{(0mof)}\mathbf{K} (Ak) dS$ ;  $\mathbf{A}$  – тензор, определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства;  ${}^{(0mof)}\mathbf{K} (k)$  – преобразование Фурье-ядра  ${}^{(0mof)}K_{ijkl}(x-x') = -[\partial_i \partial_l {}^{(0mof)}G_{jk}(x-x')]_{(ij)(kl)}$ ;  ${}^{(0imof)}\mathbf{G}$  – тензорная функция Грина матрицы, получаемой усреднением  $\langle \mathbf{C} \rangle$ ;  $S_1$  – поверхность единичной сферы в Фурье-пространстве.

Анализируя выражения (3.1) и (3.2), а также используя нотацию Д. Кнута [44-46] в результате упрощающих преобразований получим следующий алгоритм, соответствующий рассматриваемой математической модели:

Алгоритм  $A_{etmp}$  (Алгоритм определения эффективного тензора модулей упругости и упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругом состоянии)

Входные данные:

$\overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}}$  – четырехвалентный тензор модулей упругости фрактальной неоднородности; содержит 81 компоненту, каждая из которых принимает вещественные значения {Для определения  $\overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}}$  необходимо использовать справочные данные, либо результаты других моделей}.

$f(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения неоднородностей по ориентациям {Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей в рассматриваемом мультифрактальном объекте отсутствует, то  $f(\varphi, \theta, \psi) = 1$ }.

#### Выходные данные:

$\overset{(\text{efmof})}{\mathbf{C}}$  – эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругом состоянии. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественные значения.

$\overset{(\text{efmof})}{\mathbf{C}'}$  – эффективный тензор упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругом состоянии. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественные значения.

#### Алгоритм:

Аетмп1. [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие

компоненты  $\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , где  $a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi$ ;

$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi$ ;  $a_{13} = \sin \psi \sin \theta$ ;  $a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi$ ;

$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi$ ;  $a_{23} = -\cos \psi \sin \theta$ ;  $a_{32} = \sin \varphi \sin \theta$ ;

$a_{31} = \cos \varphi \sin \theta$ ;  $a_{33} = \cos \theta$ .

Аетмп2. [Определить  $\langle \overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}} \rangle$  модулей упругости неоднородности, используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} \mathbf{C}^{(\text{mof})}_{mnp r} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

{При обозначении тензорных выражений по умолчанию считается, что по дважды повторяющемуся индексу идет суммирование}

Аетмп3. [Определить  $\mathbf{B}^{(\text{mof})}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle$  определить тензор  $\mathbf{B}^{(\text{mof})} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{K}^{(0\text{mof})}(\mathbf{A}k) dS$ .

Аетмп4. [Определить  $\mathbf{C}^{(1\text{mof})}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{C}^{(1\text{mof})} \leftarrow \mathbf{C}^{(\text{mof})} - \langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle$ .

Аетмп5. [Установить тензор  $\mathbf{T}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{T} \leftarrow \left( \mathbf{I} + \mathbf{B}^{(\text{mof})} \cdot \mathbf{C}^{(1\text{mof})} \right)^{-1}$ .

Аетмп6. [Установить  $\langle \mathbf{T} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{T} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{T} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} T_{mnp r} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Аетмп7. [  $\mathbf{C}^{(\text{efmof})} \leftarrow \langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$  ]. Присвоить эффективному тензору модулей упругости мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругом состоянии значение выражения  $\langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ .

Аетмп8. [  $\mathbf{C}'^{(\text{efmof})} \leftarrow \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle^{-1} \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$  ]. Присвоить эффективному тензору упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругом состоянии значение выражения  $\langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle^{-1} \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ .

Аетмп9. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Перейдем к следующему состоянию «Компонентная модель изменения количества необратимо движущихся линейных дефектов в структуре мультифрактального объекта первого порядка сложности». Данная компонентная модель сводится к вычислению выражения:

$$\tilde{N}(t) = \frac{(\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2})}{2\tilde{q}} \times \left( 1 - \exp \left[ \frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}} + \frac{(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2})^3}{4\tilde{q}^3} \times \ln \left| \frac{N_0 + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N_0 + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right| \right] \right) \times \left( \exp \left[ \frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}} + \frac{(\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2})^3}{4\tilde{q}^3} \times \ln \left| \frac{N_0 + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N_0 + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right| - 1 \right] \right), \quad (3.3)$$

где  $N_0$  – начальное значение количества линейных дефектов, совершающих необратимое движение в структуре мультифрактального объекта первого порядка сложности; параметры  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{p}$  и  $\tilde{g}$  характеризуют в структуре рассматриваемого объекта соответственно прирост необратимо движущихся линейных дефектов, скорость его изменения и скорость поглощения поверхностными дефектами линейных.

Алгоритм, соответствующий данной модели, можно представить в следующем виде.

Алгоритм  $A_{k\text{dmp}}$  (Алгоритм определения нечеткого значения количества линейных дефектов, совершающих необратимое движение в структуре мультифрактального объекта первого порядка сложности)

Входные данные:

$\tilde{q}$  – нечеткий параметр, характеризующий процесс увеличения коэффициента прироста необратимо движущихся дислокаций. Данный параметр задается в виде L-R представлений:  $\tilde{q} = (m_q, \alpha_q, \beta_q)$ ;  $m_q$ ,  $\alpha_q$ ,  $\beta_q$  – принимают вещественные значения, всегда положительны {*Определение L-R компонентов данного нечеткого параметра производится экспериментальным способом с использованием рентгеноструктурного анализа*}.

$\tilde{p}$  – нечеткий параметр, характеризующий начальное значение величины

прироста необратимо движущихся дислокаций в минерале. Данный параметр задается в виде L-R представлений:  $\tilde{p} = (m_p, \alpha_p, \beta_p)$ . L-R компоненты  $m_p, \alpha_p, \beta_p$  принимают вещественные значения, всегда положительны *{Определение данных компонентов осуществляется посредством проведения экспериментов над макрообразцами минералов с использованием рентгеноструктурного анализа}*.

$\tilde{g}$  – нечеткий параметр, характеризующий скорость поглощения поверхностными дефектами необратимо движущихся дислокаций, и задаваемый в виде L-R представлений:  $\tilde{g} = (m_g, \alpha_g, \beta_g)$ . Компоненты  $m_g, \alpha_g, \beta_g$  – принимают вещественные значения, всегда положительны *{Определение L-R компонентов данного нечеткого параметра осуществляется посредством проведения экспериментов над макрообразцами минералов с использованием рентгеноструктурного анализа}*.

$N_0$  – начальное количество необратимо движущихся дислокаций. Этот параметр не может быть отрицательным и принимает только целые значения *{Установление значения данного входного параметра осуществляется путем анализа макрообразцов минералов с применением рентгеноструктурного анализа}*.

#### Выходные данные:

$m_N[0..9]$  – массив модальных значений нечеткого параметра  $\tilde{N}$  в моменты модельного времени  $t = 0..9$ .

$\alpha_N[0..9]$  – массив левых коэффициентов нечеткости параметра  $\tilde{N}$  в моменты модельного времени  $t = 0..9$ .

$\beta_N[0..9]$  – массив правых коэффициентов нечеткости параметра  $\tilde{N}$  в моменты модельного времени  $t = 0..9$ .

*{Совокупность массивов  $m_N[0..9]$ ,  $\alpha_N[0..9]$  и  $\beta_N[0..9]$  определяют  $\tilde{N}(t)$  – нечеткий параметр, характеризующий эволюцию количества необратимо движущихся дислокаций в структуре мультифрактального объекта первого порядка сложности в моменты времени  $t = 0..9$ }*

$m_{N_2}$  – модальное значение нечеткого параметра  $\tilde{N}_2$ , характеризующего нечеткое состояние равновесия динамической системы изменения количества необратимо движущихся дислокаций. Этот L-R компонент нечеткого параметра  $\tilde{N}_2$  принимает положительные вещественные значения.

$\alpha_{N_2}$  – левый коэффициент нечеткости параметра  $\tilde{N}_2$ . Данный компонент принимает положительные вещественные значения.

$\beta_{N_2}$  – правый коэффициент нечеткости параметра  $\tilde{N}_2$ . Этот компонент всегда положителен и принимает вещественные значения.

Алгоритм:

Акdmp1. [Добавить  $N_0$  в  $m_N[0]$ ]. Добавить значение  $N_0$  в массив  $m_N[0]$ .

Акdmp2. [ $\alpha_N[0] \leftarrow 0$ ]. Присвоить элементу массива  $\alpha_N[0]$  значение, равное 0.

Акdmp3. [ $\beta_N[0] \leftarrow 0$ ]. Присвоить элементу массива  $\beta_N[0]$  значение, равное 0.

Акdmp4. [Установить  $m_{N_2}$ ]. Определить модальное значение  $m_{N_2}$  согласно

следующему выражению: 
$$m_{N_2} \leftarrow \frac{-m_p + \sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q}}{2m_p}.$$

Акdmp5. [Установить  $\alpha_{N_2}$ ]. Определить левый коэффициент нечеткости  $\alpha_{N_2}$  согласно следующему выражению:

$$\alpha_{N_2} \leftarrow \frac{2\beta_p \left( -m_p + \sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q} \right) + 2m_p \left( \beta_p + \frac{2m_p \alpha_p + 4m_p \alpha_q + 4m_q \alpha_p}{2\sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q}} \right)}{2m_p^2}.$$

Акdmp6. [Установить  $\beta_{N_2}$ ]. Определить правый коэффициент нечеткости  $\beta_{N_2}$  согласно следующему выражению:

$$\beta_{N_2} \leftarrow \frac{2\alpha_p \left( -m_p + \sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q} \right) + 2m_p \left( \alpha_p + \frac{2m_p \beta_p + 4m_p \beta_q + 4m_q \beta_p}{2\sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q}} \right)}{2m_p^2}.$$

A<sub>k</sub>dmp7. [Определить  $\tilde{L} = (m_L, \alpha_L, \beta_L)$ ]. Определить значение нечеткого параметра

$\tilde{L} = (m_L, \alpha_L, \beta_L) = \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}$  на основе следующих инструкций присваивания:

$$m_L \leftarrow \sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q}; \quad \alpha_L \leftarrow \frac{2m_p \alpha_p + 4(m_p \alpha_q + m_q \alpha_p)}{2\sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q}};$$

$$\beta_L \leftarrow \frac{2m_p \beta_p + 4(m_p \beta_q + m_q \beta_p)}{2\sqrt{m_p^2 + 4m_p m_q}}.$$

A<sub>k</sub>dmp8. [Определить  $\tilde{R} = (m_R, \alpha_R, \beta_R)$ ]. Определить значение нечеткого параметра

$\tilde{R} = (m_R, \alpha_R, \beta_R) = \frac{\tilde{L}^3}{4\tilde{q}^3}$  на основе выражений:

$$m_R \leftarrow \frac{m_L^3}{4m_q^3}; \quad \alpha_R \leftarrow \frac{12m_L^3 m_q^2 \beta_q + 12m_q^3 m_L^2 \alpha_L}{16m_q^6}; \quad \beta_R \leftarrow \frac{12m_L^3 m_q^2 \alpha_q + 12m_q^3 m_L^2 \beta_L}{16m_q^6}.$$

A<sub>k</sub>dmp9. [Определить  $\tilde{T} = (m_T, \alpha_T, \beta_T)$ ]. Определить значение нечеткого параметра

$$\tilde{T} = (m_T, \alpha_T, \beta_T) = \ln \left| \frac{N_0 + \frac{\tilde{p} - \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}}{N_0 + \frac{\tilde{p} + \sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}{2\tilde{q}}} \right| \text{ с использованием следующих инструкций}$$

присваивания:

$$m_T \leftarrow \ln \left| \frac{\left( N_0 + \frac{m_p - m_l}{2m_q} \right)}{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right)} \right|;$$

$$\alpha_T \leftarrow \ln \left| \frac{\left( N_0 + \frac{m_p - m_l}{2m_q} \right) \left( N_0 + \frac{2\alpha_q(m_p + m_l) + 2m_q(\beta_p + \beta_l)}{4m_q^2} \right)}{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right)^2} + \frac{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right) \left( N_0 + \frac{2\beta_q(m_p - m_l) + 2m_q(\alpha_p + \beta_l)}{4m_q^2} \right)}{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right)^2} \right|;$$

$$\beta_T \leftarrow \ln \left| \frac{\left( N_0 + \frac{m_p - m_l}{2m_q} \right) \left( N_0 + \frac{2\beta_q(m_p + m_l) + 2m_q(\alpha_p + \alpha_l)}{4m_q^2} \right)}{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right)^2} + \frac{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right) \left( N_0 + \frac{2\alpha_q(m_p - m_l) + 2m_q(\beta_p + \alpha_l)}{4m_q^2} \right)}{\left( N_0 + \frac{m_p + m_l}{2m_q} \right)^2} \right|;$$

Акдмп10. [Цикл  $t \leftarrow 1$  до 9]. Для модельного времени  $t$ , принимающего значения от 0 до 9, выполнить нижеследующие шаги.

Акдмп11. [Определить  $\tilde{W} = (m_W, \alpha_W, \beta_W)$ ]. Определить значение нечеткого параметра  $\tilde{W} = (m_W, \alpha_W, \beta_W) = \frac{4\tilde{q}^3 t}{\sqrt{4\tilde{q}\tilde{g} + \tilde{p}^2}}$  с использованием следующих

выражений:

$$m_W \leftarrow \frac{4tm_q^2}{m_L}; \quad \alpha_W \leftarrow \frac{4tm_q^3\beta_L + 12tm_q^2m_L\alpha_q}{m_L^2}; \quad \beta_W \leftarrow \frac{4tm_q^3\alpha_L + 12tm_q^2m_L\beta_q}{m_L^2}.$$

Акдмп12. [Определить  $\tilde{H} = (m_H, \alpha_H, \beta_H)$ ]. Определить значение нечеткого параметра  $\tilde{H} = (m_H, \alpha_H, \beta_H) = \tilde{W} + \tilde{R} \times \tilde{T}$ :

$$m_H \leftarrow m_W + m_R m_T;$$

$$\alpha_H \leftarrow \alpha_W + m_R \alpha_T + m_T \alpha_R;$$

$$\beta_H \leftarrow \beta_W + m_R \beta_T + m_T \beta_R.$$

Акдмп13. [Установить модальное значение  $m_N[t]$  нечеткого параметра

$\tilde{N}(t) = \frac{(\tilde{p} - \tilde{L}) \left( 1 - e^{\tilde{H}(t)} \right)}{2\tilde{q} \left( e^{\tilde{H}(t)} - 1 \right)}$ ]. Используя нечеткую алгебру, определить модальное

значение нечеткого параметра  $\tilde{N}$  (описывающего количество необратимо движущихся дислокаций в структуре мультифрактального объекта в момент времени  $t$ ) посредством следующего выражения:

$$m_N[t] \leftarrow \frac{(m_p - m_L)(1 - e^{m_H})}{2m_q(e^{m_H} - 1)};$$

Акdmp14. [Установить левый коэффициент нечеткости  $\alpha_N[t]$  параметра

$$\tilde{N}(t) = \frac{(\tilde{p} - \tilde{L})(1 - e^{\tilde{H}(t)})}{2\tilde{q} e^{\tilde{H}(t)} - 1}].$$

Используя нечеткую алгебру, определить левый коэффициент нечеткости параметра  $\tilde{N}$  в момент времени  $t$ , согласно следующему выражению:

$$\alpha_N[t] \leftarrow \frac{(m_p - m_L) \left[ e^{\alpha_H} + e^{\beta_H} - 2 + e^{m_H} (2 - e^{\beta_H} - e^{\alpha_H}) \right]}{2m_q(e^{m_H} - 1)^2} + \frac{(1 - e^{m_H}) \left[ 2\beta_q(m_p - m_L) + 2m_q(\alpha_p + \beta_L) \right]}{4m_q^2(e^{m_H} - 1)};$$

Акdmp15. [Установить правый коэффициент нечеткости  $\beta_N[t]$  параметра

$$\tilde{N}(t) = \frac{(\tilde{p} - \tilde{L})(1 - e^{\tilde{H}(t)})}{2\tilde{q} e^{\tilde{H}(t)} - 1}].$$

Используя нечеткую алгебру, определить левый коэффициент нечеткости параметра  $\tilde{N}$  в момент времени  $t$ , согласно следующему выражению:

$$\beta_N[t] \leftarrow \frac{(m_p - m_L) \left[ e^{\alpha_H} + e^{\beta_H} - 2 + e^{m_H} (2 - e^{\beta_H} - e^{\alpha_H}) \right]}{2m_q(e^{m_H} - 1)^2} + \frac{(1 - e^{m_H}) \left[ 2\alpha_q(m_p - m_L) + 2m_q(\beta_p + \alpha_L) \right]}{4m_q^2(e^{m_H} - 1)};$$

Акdmp16. [Конец Цикла Цикл  $t \leftarrow 1$  до 9]. Увеличить  $t$  на 1. Перейти к шагу 4.

Акdmp17. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Следующему состоянию из рассматриваемой диаграммы соответствует компонентная модель мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругопластическом с упрочнением или близком к идеально-пластическому состояниях. Она сводится к выражениям



$h(\tilde{N}(t))$  – функция, определяющая количество упорядоченных пар в нечетком

множестве  $\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{efmof})}(t)$ ;  $f_i(n_i \sigma e_i)$  – экспериментальная функция упрочнения;

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{efmof})}(t) = \left\{ \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}'^{(\text{efmof})}(t) \right), \mathbf{C}'^{(\text{efmof})}(t) \right) \right\} = \bigcup_{i=1}^{h(\tilde{N}(t))} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]}^{(\text{efmof})}(t) \right), \mathbf{C}'_{[i]}^{(\text{efmof})}(t) \right), \quad (3.5)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}'_{[i]}^{(\text{efmof})}(t) \right) = \mu \left( N_{[i]}(\tilde{N}(t)) \right)$ ;  $\mathbf{C}'_{[i]}^{(\text{efmof})}(t) = \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C}^{(\text{lmof})} - \mathbf{C}^{(\text{mof})} \times \right. \right.$

$$\left. \left. \times \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - < \mathbf{C}^{(\text{lmof})} - \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right) > \right] \right]^{-1} > \times$$

$$\left. \left. \times < \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C}^{(\text{lmof})} - \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \times \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - < \mathbf{C}^{(\text{lmof})} - \mathbf{C}^{(\text{mof})} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right. \right.$$

$$\times \left( \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{[i]}(\tilde{N}(t))} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(\text{mof})} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \right)^{-1} >^{-1}.$$

Анализируя выражения (3.4) и (3.5), а также принимая во внимание результаты предыдущей компонентной математической модели, получим следующий алгоритм.

Алгоритм  $A_{\text{ни}}$  (Алгоритм определения нечеткого эффективного тензора модулей упругости и упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности в упругопластическом с упрочнением или близком к идеально-пластическому состояниям)

Входные данные:

$\mathbf{C}^{(\text{mof})}$  – четырехвалентный тензор модулей упругости фрактальной неоднородности. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественное значение *{Для определения  $\mathbf{C}^{(\text{mof})}$  необходимо использовать либо справочные данные, либо результаты других моделей}*.

$l(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения фрактальных неоднородностей по ориентациям *{Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей в рассматриваемом объекте отсутствует, то  $l(\varphi, \theta, \psi) = 1$ }*.

$f_i(n_i \sigma e_i)$  – функция упрочнения *{Для определения данной функции необходимо воспользоваться результатами других исследователей (каждый мультифрактальный объект имеет свою функцию упрочнения)}*.

$m_N[0..9]$  – массив модальных значений нечеткого параметра  $\tilde{N}$  в моменты модельного времени  $t = 0..9$ .

$\alpha_N[0..9]$  – массив левых коэффициентов нечеткости параметра  $\tilde{N}$  в моменты модельного времени  $t = 0..9$ .

$\beta_N[0..9]$  – массив правых коэффициентов нечеткости параметра  $\tilde{N}$  в моменты модельного времени  $t = 0..9$ .

*{Значения элементов данных массивов являются результатом компонентной модели изменения количества необратимо движущихся линейных дефектов в структуре мультифрактального объекта первого порядка сложности}*

Выходные данные:

<sup>(efmof)</sup>

$\tilde{C} \{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости, определяющих эволюцию деформационных свойств мультифрактального объекта первого порядка сложности при упругопластическом с упрочнением или близком к идеально-пластическому состояниях. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором четвертого ранга.

<sup>(efmof)</sup>

$\tilde{C}' \{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругих податливостей, определяющих эволюцию деформационных свойств мультифрактального объекта первого порядка сложности при упругопластическом с упрочнением или близком к идеально-пластическому состояниях. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором четвертого ранга.

Алгоритм:

Алг1. [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие компоненты

$$\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi ;$$

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi ; a_{13} = \sin \psi \sin \theta ; a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi ;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi ; \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \theta ; \quad a_{32} = \sin \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \theta ; a_{33} = \cos \theta .$$

Алг2. [Определить  $\langle \overset{\text{(mof)}}{C} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \overset{\text{(mof)}}{C} \rangle$  модулей упругости неоднородности, используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} \mathbf{C}_{mnp r}^{(\text{mof})} l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Алг3. [Определить  $\mathbf{B}^{(\text{mof})}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle$

$$\text{определить тензор } \mathbf{B}^{(\text{mof})} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{K}^{(0\text{mof})} (Ak) dS.$$

Алг4. [Определить  $\mathbf{C}^{(1\text{mof})}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{C}^{(1\text{mof})} \leftarrow \mathbf{C}^{(\text{mof})} - \langle \mathbf{C}^{(\text{mof})} \rangle$ .

Алг5. [Цикл  $t \leftarrow 0$  до 9]. Для модельного времени  $t$ , принимающего значения от 0 до 9, выполнить нижеследующие шаги.

Алг6. [ $t = 0$ ?]. Если  $t = 0$ , то перейти к шагу 7, иначе к шагу 9.

Алг7. [Добавить  $m_N[t]$  в  $N[\ ]$ ]. Добавить значение  $m_N[t]$  в массив  $N[\ ]$ .

Алг8. [Добавить 1 в  $\mu[\ ]$ ]. Добавить значение 1 в динамический массив  $\mu[\ ]$ .

Перейти к шагу 18.

Алг9. [ $N_{\min} \leftarrow m_N[t] - \alpha_N[t]$ ]. Установить  $N_{\min}$ , определяющее минимальное значение из носителя  $\tilde{N}$  согласно следующему выражению:  $N_{\min} \leftarrow m_N[t] - \alpha_N[t]$ .

Алг10. [ $N_C \leftarrow \text{Trunc}(N_{\min})$ ]. Округлить  $N_{\min}$  до целого числа в большую сторону и присвоить его параметру  $N_C$ .

Алг11. [ $N_{\max} \leftarrow m_N[t] + \beta_N[t]$ ]. Установить  $N_{\max}$ , определяющее максимальное значение из носителя  $\tilde{N}$ , согласно следующему выражению:  $N_{\max} \leftarrow m_N[t] + \beta_N[t]$ .

Алг12. [Цикл пока  $N_C \leq N_{\max}$ ]. Пока выполняется условие  $N_C \leq N_{\max}$ , выполнять нижеследующие действия.

Алг13. [Добавить  $N_C$  в  $N[\ ]$ ]. Добавить значение  $N_C$  в динамический массив  $N[\ ]$ .

Алг14. [Определить  $\mu_N(N_C)$ ]. Определить значение степени принадлежности  $\mu_N(N_C)$ , согласно следующему выражению:

$$\mu_N(N_C) \leftarrow 0,5 \left[ 1 + \cos \left( \pi \frac{N_C - m_N}{\alpha_N} \right) \right].$$

A<sub>пui</sub>15. [Добавить  $\mu_N(N_C)$  в  $\mu[ ]$ ]. Добавить элемент со значением  $\mu_N(N_C)$  в динамический массив  $\mu[ ]$ .

A<sub>пui</sub>16. [ $N_C \leftarrow N_C + 1$ ]. Увеличить значение  $N_C$  на 1.

A<sub>пui</sub>17. [Конец цикла пока  $N_C \leq N_{\max}$ ]. Перейти к шагу 12.

A<sub>пui</sub>18. [Цикл  $w=1$  до  $\text{num}(N[ ])$ ]. Для переменной  $w$ , принимающей значения от 1 до  $\text{num}(N[ ])$  – количества элементов в динамическом массиве  $N[ ]$ , делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>пui</sub>19. [Определить тензор  $\mathbf{R}$ ]. Установить значение тензора  $\mathbf{R}$ , согласно следующему выражению:  $\mathbf{R} \leftarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N[w]} f_i(n_i \sigma e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i)$ .

A<sub>пui</sub>20. [Определить тензор  $\mathbf{D}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{D} \leftarrow \overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}} - \overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(\text{mof})}{\mathbf{R}} \cdot \overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}} \left( \overset{(\text{mof})}{\mathbf{R}} \cdot \overset{(\text{mof})}{\mathbf{C}} + \mathbf{I} \right)^{-1}$ .

A<sub>пui</sub>21. [Установить  $\langle \mathbf{D} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{D} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{D} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} D_{mnp r} l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

A<sub>пui</sub>22. [Установить тензор  $\mathbf{S}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{S} \leftarrow \left( \mathbf{I} + \overset{(\text{mof})}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(\text{mof})}{\mathbf{D}} - \overset{(\text{mof})}{\mathbf{B}} \cdot \langle \mathbf{D} \rangle \right)^{-1}$ .

A<sub>пui</sub>23. [Установить  $\langle \mathbf{S} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{S} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{S} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} S_{mnp r} l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

A<sub>пui</sub>24. [Добавить  $\overset{(\text{mof})}{\langle \mathbf{C} \rangle} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle^{-1}$  в  $\overset{(\text{efmof})}{\mathbf{C}} \{w\}$ ]. Добавить в совокупность эффективных тензоров модулей упругости  $\overset{(\text{efmof})}{\mathbf{C}} \{w\}$  значение выражения

$$\langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle^{-1}.$$

Алг25. [Добавить  $\left( \mu[w], \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}} [w] \right)$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}} \{t\}$ ]. Добавить в нечеткий эффективный тензор модулей упругости  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}} \{t\}$  пару  $\left( \mu[w], \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}} [w] \right)$ .

Алг26. [Добавить  $\left( \langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle^{-1} \right)^{-1}$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}'} \{w\}$ ]. Добавить в совокупность эффективных тензоров упругих податливостей  $\overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}'} \{w\}$  значение выражения  $\left( \langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle^{-1} \right)^{-1}$ .

Алг27. [Добавить  $\left( \mu[w], \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}'} [w] \right)$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}'}} \{t\}$ ]. Добавить в нечеткий эффективный тензор модулей упругости  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}'}} \{t\}$  пару  $\left( \mu[w], \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}'} [w] \right)$ .

Алг28. [Конец цикла  $w$ ]. Увеличить  $w$  на 1. Перейти к шагу 18.

Алг29. [Конец цикла  $t \leftarrow 1$  до 9]. Увеличить  $t$  на 1. Перейти к шагу 5.

Алг30. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Перейдем к заключительному состоянию, представленному на рассматриваемой диаграмме. Оно соответствует компонентной модели мультифрактального объекта первого порядка сложности в нечетких состояниях, которая сводится к выражениям:

$$\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}} = \left\{ \left( \mu_y(N_0), \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} \right), \left( \mu_{un}(N_0), \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} \right) \right\}, \quad (4.6)$$

и

$$\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}'}} = \left\{ \left( \mu_y(N_0), \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}'^*} \right), \left( \mu_{un}(N_0), \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}'^*} \right) \right\}, \quad (4.7)$$

где  $\overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} = \langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \left[ \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \overset{\text{(1mof)}}{\mathbf{C}} - \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + \right. \right. \right.$

$$\begin{aligned}
& + e_i \otimes n_i \Big) \cdot \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(\text{mof})} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& - < \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(\text{mof})} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Big]^{-1} > \times \\
& \times < \left( \mathbf{I} + \mathbf{B} \left[ \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \right. \right. \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(\text{mof})} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} - \\
& - < \mathbf{C} - \mathbf{C} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right) \times \\
& \times \mathbf{C} \left( \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i) (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \right)^{(\text{mof})} \mathbf{C} + \mathbf{I} \right)^{-1} \Big]^{-1} >^{-1}; \\
& \mathbf{C}^{* \text{ (efmof)}} = \left( \mathbf{C}^{* \text{ (mof)}} \right)^{-1}; \quad \mu_y(N_0) = w \left( \frac{(m_{N_2} + \beta_{N_2}) - N_0}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}} \right), \quad \mu_{un}(N_0) = w \left( \frac{N_0 - (m_{N_2} + \beta_{N_2})}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}} \right),
\end{aligned}$$

$$\text{где } w = \begin{cases} 1, & \text{для } m_{N_2} - \alpha_{N_2} \leq N_0 \leq m_{N_2} + \beta_{N_2} \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}.$$

Анализируя данные выражения, получим следующий алгоритм, определяющий действие в рассматриваемом состоянии.

Алгоритм  $A_{ns}$  (Алгоритм определения нечеткого эффективного тензора модулей упругости и упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности в нечетких состояниях)

Входные данные:

$\mathbf{C}^{(\text{mof})}$  – четырехвалентный тензор модулей упругости фрактальной неоднородности. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественное значение {Для определения  $\mathbf{C}^{(\text{mof})}$  необходимо использовать либо справочные данные, либо результаты других моделей}.

$l(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения фрактальных неоднородностей по ориентациям {Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей в рассматриваемом объекте отсутствует, то  $l(\varphi, \theta, \psi) = 1$ }.

$f_i(n_i \sigma e_i)$  – функция упрочнения {Для определения данной функции необходимо воспользоваться результатами других исследователей (каждый мультифрактальный объект имеет свою функцию упрочнения)}.

Выходные данные:

$\tilde{\mathbf{C}}^{(efmof)}$  – нечеткий эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта первого порядка сложности в одном из нечетких состояний.

$\tilde{\mathbf{C}}'^{(efmof)}$  – нечеткий эффективный тензор упругих податливостей мультифрактального объекта первого порядка сложности в одном из нечетких состояний.

Алгоритм:

Ans1. [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие компоненты

$$\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi ;$$

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi ; a_{13} = \sin \psi \sin \theta ; a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi ;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi ; \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \theta ; \quad a_{32} = \sin \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \theta ; a_{33} = \cos \theta .$$

Ans2. [Определить  $\langle \mathbf{C}^{(mof)} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{C}^{(mof)} \rangle$  модулей упругости неоднородности, используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{C}^{(mof)} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} \mathbf{C}^{(mof)}_{mnp r} l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi .$$

Ans3. [Определить  $\mathbf{B}^{(mof)}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\langle \mathbf{C}^{(mof)} \rangle$

определить тензор  $\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(0\text{mof})} \mathbf{K} (Ak) dS$ .

Ans4. [Определить  $\overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}}$ ]. Определить тензор  $\overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} \leftarrow \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} - \langle \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} \rangle$ .

Ans5. [Определить степень принадлежности  $\mu_y$ ]. Определить степень принадлежности  $\mu_y \leftarrow \frac{(m_{N_2} + \beta_{N_2}) - N_0}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}}$ .

Ans6. [Определить степень принадлежности  $\mu_{un}$ ]. Определить степень принадлежности  $\mu_{un} \leftarrow \frac{N_0 - (m_{N_2} + \beta_{N_2})}{\beta_{N_2} + \alpha_{N_2}}$ .

Ans7. [Определить тензор  $\mathbf{Q}$ ]. Установить значение тензора  $\mathbf{Q}$ , согласно следующему выражению:  $\mathbf{Q} \leftarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_0} f_i(n_i \sigma e_i)(n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i) \otimes (n_i \otimes e_i + e_i \otimes n_i)$ .

Ans8. [Определить тензор  $\mathbf{G}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{G} \leftarrow \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} - \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} \cdot \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} \left( \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{Q}} \cdot \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} + \mathbf{I} \right)^{-1}$ .

Ans9. [Установить  $\langle \mathbf{G} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{G} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{G} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} G_{mnp} l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Ans10. [Установить тензор  $\mathbf{U}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{U} \leftarrow \left( \mathbf{I} + \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{G}} - \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{B}} \cdot \langle \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{G}} \rangle \right)^{-1}$ .

Ans11. [Установить  $\langle \mathbf{U} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{U} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{U} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} U_{mnp} l(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Ans12. [  $\overset{(ef\text{mof})}{\mathbf{C}^*} \leftarrow \langle \overset{(1\text{mof})}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle^{-1}$ ]. Эффективному тензору модулей упругости при упругопластическом деформировании присвоить значение

выражения  $\langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle^{-1}$ .

A<sub>ns13</sub>. [Добавить  $\left( \mu_y, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} \right)$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}}$ ]. Добавить в нечеткий эффективный тензор модулей упругости пару  $\left( \mu_y, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} \right)$ .

A<sub>ns14</sub>. [Добавить  $\left( \mu_{un}, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} \right)$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}}$ ]. Добавить в нечеткий эффективный тензор модулей упругости пару  $\left( \mu_{un}, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^*} \right)$ .

A<sub>ns15</sub>. [ $\overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^{\prime*}} \leftarrow \left( \langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle^{-1} \right)^{-1}$ ]. Эффективному тензору упругих податливостей при упругопластическом деформировании присвоить значение выражения  $\left( \langle \overset{\text{(mof)}}{\mathbf{C}} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle \cdot \langle \mathbf{U} \rangle^{-1} \right)^{-1}$ .

A<sub>ns16</sub>. [Добавить  $\left( \mu_y, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^{\prime*}} \right)$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}'}$ ]. Добавить в нечеткий эффективный тензор упругих податливостей пару  $\left( \mu_y, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^{\prime*}} \right)$ .

A<sub>ns17</sub>. [Добавить  $\left( \mu_{un}, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^{\prime*}} \right)$  в  $\overset{\text{(efmof)}}{\tilde{\mathbf{C}}'}$ ]. Добавить в нечеткий эффективный тензор упругих податливостей пару  $\left( \mu_{un}, \overset{\text{(efmof)}}{\mathbf{C}^{\prime*}} \right)$ .

A<sub>ns18</sub>. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Рассмотрим следующую математическую модель, предназначенную для определения деформационных свойств мультифрактального объекта второго порядка сложности. Данный объект представляет собой фрактал, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу фрактальных неоднородностей, каждая из которых содержит микровключение, обладающее группой нечувствительности,

совпадающее с унимодулярной группой. В общем случае группа нечувствительности некоторого объекта соответствует совокупности его преобразований в исходном состоянии, не отражающихся на напряженном состоянии при произвольной программе последующего деформирования [85]. Использование понятия «группа нечувствительности» позволяет с позиций математики определить агрегатное состояние микровключения. Так если группа нечувствительности является подгруппой ортогональных преобразований плоскости, то микровключение находится в твердом агрегатном состоянии. Если же группа нечувствительности совпадает с унимодулярной группой, то микровключение является жидкостью (или газом). Итак, согласно выше сформулированному определению микровключения в мультифрактальном объекте второго порядка сложности находится в газообразном (или жидкостном) агрегатном состоянии.

В результате обобщения разработанной ранее мультифрактальной модели минерала с наполненными газом (или жидкостью) порами, а также применяя подход, основанный на диаграммах состояния [15, 16], получим следующую математическую модель мультифрактального объекта второго порядка сложности относительно деформационных свойств (рисунок 21).

Первое состояние «Математическая модель фрактальной среды первого порядка относительно деформационных свойств», представленное на рассматриваемой диаграмме, является составным и соответствует математической модели мультифрактального объекта первого порядка сложности.

В свою очередь второе состояние является одной из реализаций математической модели фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями относительно деформационных свойств. Таким образом, для детализации второго состояния требуется разработка модели, позволяющей определить эффективные тензоры модулей упругости и упругих податливостей фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями.



Рисунок 21 – Математическая модель мультифрактального объекта второго порядка сложности относительно деформационных свойств

Фрактальная среда с разнесенными в пространстве неоднородностями представляет собой трехмерную сплошную среду с некоторыми заранее известными эффективными деформационными свойствами (в дальнейшем данную среду будем называть основной) со случайным полем эллипсоидальных неоднородностей, использование которых в качестве включений в блоках Вороного образуют согласно  $\chi^2$ -критерию трансляционную симметрию. Модель данной среды сводится к следующим выражениям:

1) если эффективный тензор модулей упругости основной среды и тензор модулей упругости неоднородности имеют четкий вид, т.е. равны соответственно

${}^{(osn)} \mathbf{C}$  и  ${}^{(n)} \mathbf{C}$ , то

$${}^{(effsrn)} \mathbf{C} = {}^{(efosn)} \mathbf{C} + \left\langle \frac{{}^{(ELfsrn)} V}{{}^{(BVfsrn)} V} {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + {}^{(fsrn)} \mathbf{H} \cdot {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - {}^{(fsrn)} \mathbf{H} \left\langle \frac{{}^{(ELfsrn)} V}{{}^{(BVfsrn)} V} {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + {}^{(fsrn)} \mathbf{H} \cdot {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

$${}^{(effsrn)} \mathbf{C}' = \left( {}^{(efosn)} \mathbf{C} + \left\langle \frac{{}^{(ELfsrn)} V}{{}^{(BVfsrn)} V} {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + {}^{(fsrn)} \mathbf{H} \cdot {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \times \left( \mathbf{I} - {}^{(fsrn)} \mathbf{H} \left\langle \frac{{}^{(ELfsrn)} V}{{}^{(BVfsrn)} V} {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \left( \mathbf{I} + {}^{(fsrn)} \mathbf{H} \cdot {}^{(1fsrn)} \mathbf{C} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad (3.9)$$

где  ${}^{(1fsrn)} \mathbf{C} = {}^{(n)} \mathbf{C} - {}^{(efosn)} \mathbf{C}$ ;  ${}^{(n)} \mathbf{C}$  – тензор модулей упругости неоднородности;  $\mathbf{I}$  – единичный четырехвалентный тензор;  ${}^{(fsrn)} \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} {}^{(fsrn)} \mathbf{K} (Ak) dS$ ;  $\mathbf{A}$  – тензор,

определяющий невырожденное аффинное преобразование трехмерного пространства, переводящее эллипсоидальную область, занятую включением, в

единичный шар;  ${}^{(fsrn)} \mathbf{K} (k)$  – преобразование Фурье-ядра

${}^{(fsrn)} K_{ijkl}(x-x') = -[\nabla_k \nabla_l {}^{(osn)} G_{ij}(x-x')]_{(ik)(jl)}$ ;  ${}^{(osn)} \mathbf{G}$  – тензорная функция Грина основной

среды;  ${}^{(ELfsrn)} V$  и  ${}^{(BVfsrn)} V$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного во фрактальной среде с разнесенными в пространстве неоднородностями.

2) если эффективный тензор модулей упругости основной среды и тензор модулей упругости неоднородности имеют нечеткий вид, т.е. равны

соответственно  ${}^{(osn)} \tilde{\mathbf{C}}$  и  ${}^{(n)} \tilde{\mathbf{C}}$ , то

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{effsrn})}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{osn})}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{lfsrn})}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})}, \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})}(t) \right), \mathbf{C}^{(\text{effsrn})} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})}, \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})}(t) \right) \right), \quad (3.10)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}'^{(\text{effsrn})}(t) = \bigcup_{i=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{osn})}(t)\right)} \bigcup_{j=1}^{h\left(\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{lfsrn})}(t)\right)} \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})}, \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})}(t) \right), \mathbf{C}'^{(\text{effsrn})} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})}, \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})}(t) \right) \right), \quad (3.11)$$

где  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})}, \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})} \right), \mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})} \right) \right)$ ;  $MEAN$  – оператор,

возвращающий среднее значение от  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})} \right)$  и  $\mu_C^* \left( \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})} \right)$ ;

$$\mathbf{C}^{(\text{effsrn})} \left( \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})}, \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})}(t) \right) = \mathbf{C}_{[i]}^{(\text{osn})} + \left\langle \frac{(EL\text{fsrn})}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})} \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{I} - \mathbf{H}_{[i]} \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{(EL\text{fsrn})}{V} \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})} \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}_{[i]} \cdot \mathbf{C}_{[j]}^{(\text{lfsrn})} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1}; \quad h \left( \tilde{\mathbf{C}}^{(\text{osn})}(t) \right) \text{ и } h \left( \tilde{\mathbf{C}}^{(\text{lfsrn})}(t) \right) - \text{функции,}$$

определяющие количество упорядоченных пар в нечетких множествах  $\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{osn})}(t)$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{lfsrn})}(t)$  соответственно.

3) если эффективный тензор модулей упругости основной среды или тензор модулей упругости неоднородности имеют нечеткий вид, т.е. равны соответственно –  $\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{osn})}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{n})}$  или  $\mathbf{C}^{(\text{osn})}$  и  $\tilde{\mathbf{C}}^{(\text{n})}$ , то четкий тензор следует преобразовать в одноточечное нечеткое множество. Эффективные свойства такой среды определяются выражениями (3.10) и (3.11).

Алгоритм, соответствующий данной модели, можно представить в следующем виде.

Алгоритм  $A_{\text{fsr}}$  (Алгоритм определения деформационных свойств фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями)

Входные данные:

*{Параметры  $\overset{(n)}{C}$  и  $\overset{(n)}{\tilde{C}}\{0..9\}$  являются взаимоисключающими}*

$\overset{(n)}{C}$  – тензор модулей упругости неоднородности в основной среде. Этот тензор состоит из 81 вещественной компоненты *{Для определения  $\overset{(n)}{C}$  необходимо использовать справочные данные, экспериментальные способы и результаты других моделей}*.

$\overset{(n)}{\tilde{C}}\{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости, определяющих эволюцию деформационных свойств неоднородности. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором четвертого ранга.

*{Параметры  $\overset{(osn)}{C}$  и  $\overset{(osn)}{\tilde{C}}\{0..9\}$  являются взаимоисключающими}*

$\overset{(osn)}{C}$  – эффективный тензор модулей упругости основной среды. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественные значения.

$\overset{(osn)}{\tilde{C}}\{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости, определяющих эволюцию деформационных свойств основной среды. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором, представленным в виде нечеткого множества пар.

$u(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения неоднородностей по ориентациям *{Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей в рассматриваемой среде отсутствует, то  $u(\varphi, \theta, \psi) = 1$ }*.

$\langle \overset{(ELf_{srn})}{V} \rangle$  – средний объем неоднородности (аппроксимированной эллипсоидом) в рассматриваемой среде.

$\langle \overset{(BVf_{srn})}{V} \rangle$  – средний объем блока Вороного в рассматриваемой среде *{Блоки Вороного – структурные элементы, получаемые следующим образом. Для каждого включения в среде проводятся векторы, соединяющие центр этого включения с центрами соседних, и через середины полученных векторов*

перпендикулярно к ним восстанавливаются плоскости. Полученные полиэдры и будут представлять собой блоки Вороного рассматриваемой фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями}.

Выходные данные:

*{Параметры  $\overset{\text{(effsrn)}}{C}$  и  $\overset{\text{(effsrn)}}{\tilde{C}}$  {0..9} являются взаимоисключающими}*

$\overset{\text{(effsrn)}}{C}$  – эффективный тензор модулей упругости фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественные значения.

$\overset{\text{(effsrn)}}{\tilde{C}}$  {0..9} – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости, определяющих эволюцию деформационных свойств фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором, представленным в виде нечеткого множества пар.

*{Параметры  $\overset{\text{(effsrn)}}{C'}$  и  $\overset{\text{(effsrn)}}{\tilde{C}'}$  {0..9} являются взаимоисключающими}*

$\overset{\text{(effsrn)}}{C'}$  – эффективный тензор упругих податливостей фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями.

$\overset{\text{(effsrn)}}{\tilde{C}'}$  {0..9} – совокупность нечетких эффективных тензоров упругих податливостей, определяющих эволюцию деформационных свойств фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями.

Алгоритм:

$A_{\text{fsr1}}$ . [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие компоненты

$$\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi ;$$

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi ; a_{13} = \sin \psi \sin \theta ; a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi ;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi ; \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \theta ; \quad a_{32} = \sin \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \theta ; a_{33} = \cos \theta .$$

*{Шаги 2-9 при необходимости преобразуют входные параметры в нечеткий вид}*

A<sub>fsr2</sub>. [ $\overset{(n)}{C} \neq \emptyset ?$ ]. Если задан тензор  $\overset{(n)}{C}$ , то перейти к шагу 3, иначе к шагу 4.

A<sub>fsr3</sub>. [Добавить  $\left(1, \overset{(n)}{C}\right)$  в  $\overset{(n)}{\tilde{C}}\{0\}$ ]. Добавить в нечеткий тензор модулей упругости неоднородности  $\overset{(n)}{\tilde{C}}\{0\}$  пару  $\left(1, \overset{(n)}{C}\right)$ .

A<sub>fsr4</sub>. [ $\overset{(osn)}{C} \neq \emptyset ?$ ]. Если задан тензор  $\overset{(osn)}{C}$ , то перейти к шагу 5, иначе к шагу 10.

A<sub>fsr5</sub>. [Добавить  $\left(1, \overset{(osn)}{C}\right)$  в  $\overset{(osn)}{\tilde{C}}\{0\}$ ]. Добавить в нечеткий тензор модулей упругости основной среды  $\overset{(osn)}{\tilde{C}}\{0\}$  пару  $\left(1, \overset{(osn)}{C}\right)$ .

A<sub>fsr6</sub>. [Цикл  $t = 1$  до 9]. Для переменной  $t$ , принимающей значения от 1 до 9 (конечного момента модельного времени), делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsr7</sub>. [Добавить  $\left(1, \overset{(n)}{C}\right)$  в  $\overset{(n)}{\tilde{C}}\{t\}$ ]. Добавить в нечеткий тензор модулей упругости неоднородности  $\overset{(n)}{\tilde{C}}\{t\}$  пару  $\left(1, \overset{(n)}{C}\right)$ .

A<sub>fsr8</sub>. [Добавить  $\left(1, \overset{(osn)}{C}\right)$  в  $\overset{(osn)}{\tilde{C}}\{t\}$ ]. Добавить в нечеткий тензор модулей упругости основной среды  $\overset{(osn)}{\tilde{C}}\{t\}$  пару  $\left(1, \overset{(osn)}{C}\right)$ .

A<sub>fsr9</sub>. [Конец цикла  $t$ ]. Увеличить  $t$  на 1. Перейти к шагу 6.

*{Шаги 10-27 определяют значения параметров, характеризующих деформационные свойства рассматриваемой среды}*

A<sub>fsr10</sub>. [Цикл  $t = 0$  до 9]. Для переменной  $t$ , принимающей значения от 0 до 9 (конечного момента модельного времени), делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsr11</sub>. [Получить  $\overset{(ns)}{C}\{\}$  и  $\mu_1[\ ]$  из  $\overset{(n)}{\tilde{C}}\{t\}$ ]. Заполнить совокупность  $\overset{(ns)}{C}\{\}$  и массив

$\mu_1[ ]$  элементами из множества пар нечеткого тензора  $\tilde{\mathbf{C}}^{(n)}\{t\}$ .

A<sub>fsr</sub>12. [Получить  $\mathbf{C}^{(osns)}\{\}$  и  $\mu_2[ ]$  из  $\tilde{\mathbf{C}}^{(osn)}\{t\}$ ]. Заполнить совокупность  $\mathbf{C}^{(osns)}\{\}$  и массив  $\mu_2[ ]$  элементами из множества пар нечеткого тензора  $\tilde{\mathbf{C}}^{(osn)}\{t\}$ .

A<sub>fsr</sub>13. [Цикл  $l=1$  до  $num\left(\mathbf{C}^{(ns)}\{\}\right)$ ]. Для переменной  $l$ , принимающей значения от 1 до  $num\left(\mathbf{C}^{(ns)}\{\}\right)$  – количества элементов в динамическом массиве  $\mathbf{C}^{(ns)}\{\}$ , делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsr</sub>14. [Цикл  $w=1$  до  $num\left(\mathbf{C}^{(osns)}\{\}\right)$ ]. Для переменной  $w$ , принимающей значения от 1 до  $num\left(\mathbf{C}^{(osns)}\{\}\right)$  – количества элементов в динамическом массиве  $\mathbf{C}^{(osns)}\{\}$ , делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsr</sub>15. [Определить  $\mathbf{H}^{(fsrn)}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\mathbf{C}^{(osns)}\{w\}$  определить тензор  $\mathbf{H}^{(fsrn)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(fsrn)} \mathbf{K}(Ak) dS$ .

A<sub>fsr</sub>16. [Определить  $\mathbf{C}^{(1fsrn)}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{C}^{(1fsrn)} \leftarrow \mathbf{C}^{(ns)}\{l\} - \mathbf{C}^{(osns)}\{w\}$ .

A<sub>fsr</sub>17. [Установить  $\langle \mathbf{C}^{(1fsrn)} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{C}^{(1fsrn)} \rangle$ :

$$\langle \mathbf{C}^{(1fsrn)} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} \mathbf{C}^{(1fsrn)}_{mnp} u(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

A<sub>fsr</sub>18. [Определить тензор  $\mathbf{Z}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{Z} \leftarrow \frac{\langle \mathbf{V}^{(ELfsrn)} \rangle}{\langle \mathbf{V}^{(BVfsrn)} \rangle} \langle \mathbf{C}^{(1fsrn)} \rangle$ .

A<sub>fsr</sub>19. [Установить тензор  $\mathbf{Q}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{Q} \leftarrow \left( \mathbf{I} + \mathbf{H}^{(fsrn)} \cdot \mathbf{C}^{(1fsrn)} \right)^{-1}$ .

A<sub>fsr</sub>20. [Установить  $\langle \mathbf{Q} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{Q} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{Q} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} Q_{mnp} u(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

A<sub>fsr</sub>21. [Определить  $\mathbf{T}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{Z} \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle$ .

A<sub>fsr</sub>22. [Определить тензор  $\mathbf{R}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{R} \leftarrow \left( \mathbf{I} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{T} \right)^{-1}$ .

A<sub>fsr</sub>23. [Добавить  $\left( \frac{\mu_1[l] + \mu_2[w]}{2}, \mathbf{C} \{w\} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \right)$  в  $\tilde{\mathbf{C}} \{t\}$ ]. Добавить в

совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости  $\tilde{\mathbf{C}} \{t\}$  рассматриваемой среды пару, степень принадлежности которой равна  $\frac{\mu_1[l] + \mu_2[w]}{2}$ , а значение тензора определяется выражением  $\mathbf{C} \{w\} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$ .

A<sub>fsr</sub>24. [Добавить  $\left( \frac{\mu_1[l] + \mu_2[w]}{2}, \left[ \mathbf{C} \{w\} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \right]^{-1} \right)$  в  $\tilde{\mathbf{C}}' \{t\}$ ]. Добавить в

совокупность нечетких эффективных тензоров упругих податливостей  $\tilde{\mathbf{C}}' \{t\}$  рассматриваемой среды пару, степень принадлежности которой равна  $\frac{\mu_1[l] + \mu_2[w]}{2}$ , а значение тензора определяется выражением  $\mathbf{C} \{w\} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$ .

A<sub>fsr</sub>25. [Конец цикла  $w$ ]. Увеличить  $w$  на 1. Перейти к шагу 14.

A<sub>fsr</sub>26. [Конец цикла  $l$ ]. Увеличить  $l$  на 1. Перейти к шагу 13.

A<sub>fsr</sub>27. [Конец цикла  $t$ ]. Увеличить  $t$  на 1. Перейти к шагу 10.

*{Шаги 28-32 при возможности преобразуют выходные параметры в четкий вид, и выводят их пользователю}*

A<sub>fsr</sub>28. [  $\tilde{\mathbf{C}} \{0\} = \tilde{\mathbf{C}} \{1\}$  ? ]. Если  $\tilde{\mathbf{C}} \{0\} = \tilde{\mathbf{C}} \{1\}$ , то перейти к шагу 29, иначе к шагу 33.

A<sub>fsr</sub>29. [  $\mathbf{C} \leftarrow \text{taketensor} \left( \tilde{\mathbf{C}} \{0\} \right)$  ]. Получить значение выходного параметра

$\mathbf{C}$  посредством извлечения из первой пары нечеткого множества  $\tilde{\mathbf{C}} \{0\}$ .

A<sub>fsr30</sub>. [Удалить  $\tilde{C}^{(effsrn)} \{0..9\}$ ]. Удалить совокупность  $\tilde{C}^{(effsrn)} \{0..9\}$ .

A<sub>fsr31</sub>. [ $C' \leftarrow taketensor \left( \tilde{C}' \{0\} \right)$ ]. Получить значение тензора упругих податливостей  $C'^{(effsrn)}$  посредством извлечения из первой пары нечеткого множества  $\tilde{C}' \{0\}$ .

A<sub>fsr32</sub>. [Удалить  $\tilde{C}' \{0..9\}$ ]. Удалить совокупность  $\tilde{C}' \{0..9\}$ .

A<sub>fsr33</sub>. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Перейдем к следующей математической модели, позволяющей определить деформационные свойства мультифрактального объекта третьего порядка сложности. Рассматриваемый объект представляет собой фрактал, который наряду с микровключениями во фрактальных неоднородностях содержит полости, соответствующие макровключениям, обладающим группой нечувствительности, совпадающей с унимодулярной группой. При этом каждое макровключение занимает некоторый объем, величина которого больше объема фрактальной неоднородности мультифрактального объекта третьего порядка сложности.

Как и в предыдущих случаях, для представления рассматриваемой модели воспользуемся языком UML в части диаграмм состояний [12]. Тогда, обобщая результаты математического моделирования минерала с флюидными включениями на случай мультифрактального объекта третьего порядка сложности, получим три последовательно сменяющих друг друга состояния. Первые два из них полностью идентичны состояниям из диаграммы, описывающей математическую модель мультифрактального объекта второго порядка сложности относительно деформационных свойств (рисунок 21). В свою очередь третье состояние является одной из реализаций подробно рассмотренной выше математической модели фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями относительно деформационных свойств. В итоге получим следующую диаграмму состояний для математической модели третьего порядка сложности относительно деформационных свойств (рисунок 22).



Рисунок 22 – Математическая модель мультифрактального объекта третьего порядка сложности относительно деформационных свойств

Приступим к построению математической модели мультифрактального объекта четвертого порядка сложности относительно деформационных свойств. Этот объект представляет собой фрактал, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу мультифракталов третьего порядка, каждый из которых принадлежит к одному определенному виду. Воспользовавшись языком UML, получим следующую диаграмму состояний рассматриваемой модели (рисунок 23).

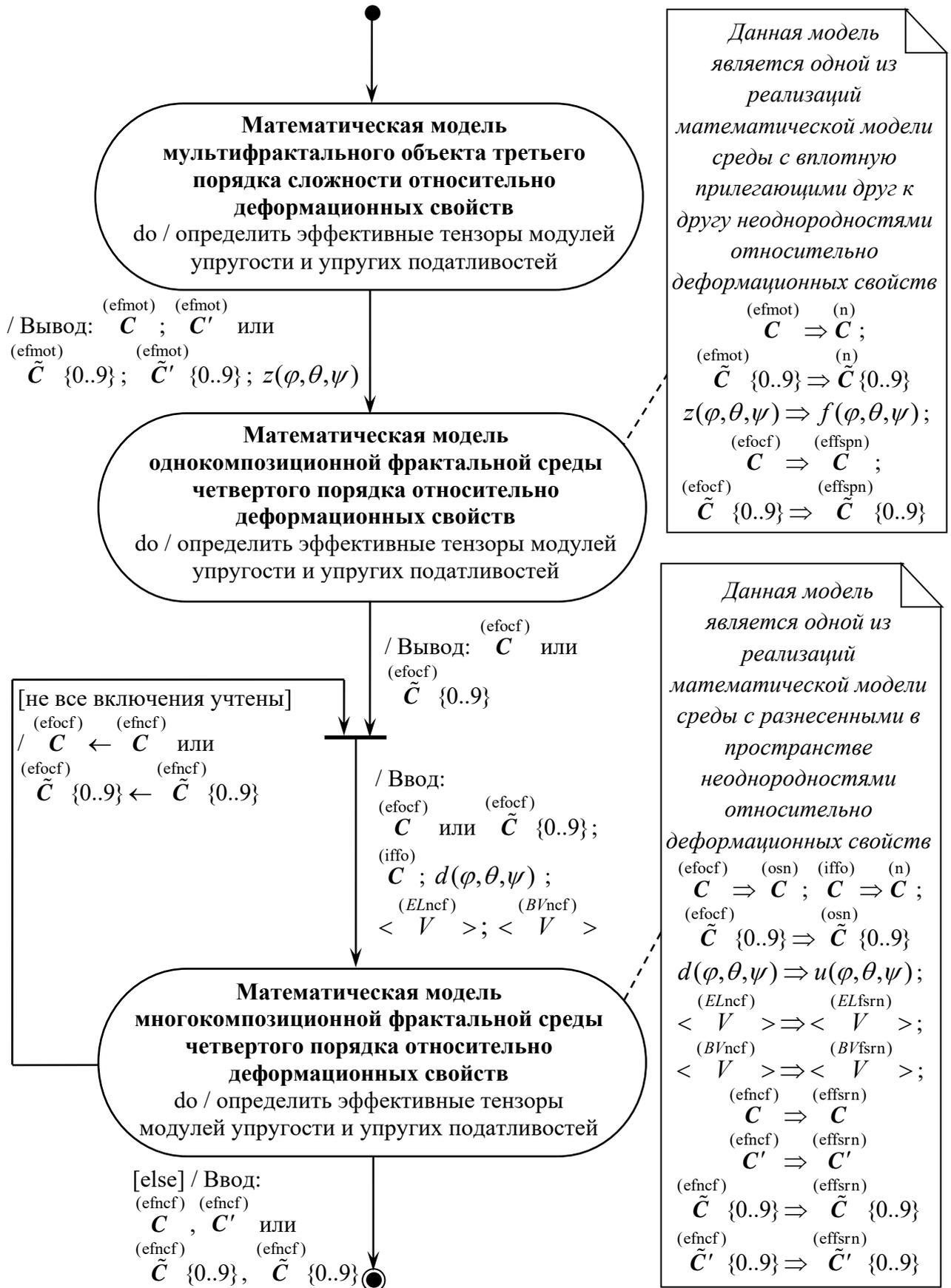


Рисунок 23 – Математическая модель мультифрактального объекта четвертого порядка сложности относительно деформационных свойств

Как следует из представленной модели, первое состояние является составным и описывается диаграммой, изображенной на рисунке 22. Третье состояние «Математическая модель многокомпозиционной фрактальной среды четвертого порядка относительно деформационных свойств» является одной из реализаций подробно описанной выше модели среды с разнесенными в пространстве неоднородностями относительно деформационных свойств.

Таким образом, детализация требуется только для состояния «Математическая модель однокомпозиционной фрактальной среды четвертого порядка относительно деформационных свойств». Согласно примечанию, изображенному на диаграмме, детализация этого состояния сводится к построению и последующей алгоритмизации математической модели среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями относительно деформационных свойств. Данная математическая модель сводится к одному из следующих выражений:

1) если эффективный тензор модулей упругости неоднородности имеет четкий вид, т.е. равен  $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ , то

$$\overset{(eff\text{spn})}{\mathbf{C}} = \langle \overset{(n)}{\mathbf{C}} \left( \mathbf{I} + \overset{(f\text{spn})}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{I} + \overset{(f\text{spn})}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \rangle^{-1}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим второй случай, когда тензор модулей упругости эллипсоида исследуемой фрактальной среды имеет нечеткий вид, т.е. равен  $\overset{(efmv)}{\tilde{\mathbf{C}}}$ .

$$\overset{(eff\text{spn})}{\tilde{\mathbf{C}}}(t) = \bigcup_{i=1}^{\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)} \bigcup_{j=1}^{\overset{(1f\text{spn})}{\tilde{\mathbf{C}}}(t)} \left( \mu_C^* \left( \overset{(n)}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right), \overset{(eff\text{spn})}{\mathbf{C}} \left( \overset{(n)}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) \right), \quad (3.13)$$

где  $\mu_C^* \left( \overset{(n)}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) = MEAN \left( \mu_C^* \left( \overset{(n)}{\mathbf{C}}_{[i]} \right), \mu_C^* \left( \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]} \right) \right)$ ;  $\overset{(eff\text{spn})}{\mathbf{C}} \left( \overset{(n)}{\mathbf{C}}_{[i]}, \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right) = \langle \overset{(n)}{\mathbf{C}}_{[i]}(t) \left( \mathbf{I} + \overset{(f\text{spn})}{\mathbf{B}}_{[i]}(t) \cdot \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{I} + \overset{(f\text{spn})}{\mathbf{B}}_{[i]}(t) \cdot \overset{(1f\text{spn})}{\mathbf{C}}_{[j]}(t) \right)^{-1} \rangle^{-1}$ ;  $h \left( \overset{(n)}{\tilde{\mathbf{C}}}(t) \right)$  и  $h \left( \overset{(1f\text{spn})}{\tilde{\mathbf{C}}}(t) \right)$  – функции, определяющие количество упорядоченных пар в нечетких

множествах  $\tilde{C}^{(efmv)}(t)$  и  $\tilde{C}^{(logp)}(t)$  соответственно.

В итоге, проанализировав выражения (3.12) и (3.13), получим следующий алгоритм, соответствующий рассматриваемой модели.

Алгоритм  $A_{fsp}$  (Алгоритм определения деформационных свойств фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями)

Входные данные:

*{Параметры  $\tilde{C}^{(n)}$  и  $\tilde{C}^{(n)}\{0..9\}$  являются взаимоисключающими}*

$\tilde{C}^{(n)}$  – тензор модулей упругости неоднородности. Этот тензор состоит из 81 вещественной компоненты *{Для определения  $\tilde{C}^{(n)}$  необходимо использовать справочные данные, экспериментальные способы и результаты других моделей}*.

$\tilde{C}^{(n)}\{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости, определяющих эволюцию деформационных свойств неоднородности. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором четвертого ранга.

$f(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения неоднородностей по ориентациям *{Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей в среде отсутствует, то  $f(\varphi, \theta, \psi) = 1$ }*.

Выходные данные:

*{Параметры  $\tilde{C}^{(effspn)}$  и  $\tilde{C}^{(effspn)}\{0..9\}$  являются взаимоисключающими}*

$\tilde{C}^{(effspn)}$  – эффективный тензор модулей упругости фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями. Этот тензор определяется 81 компонентами, принимающими вещественные значения.

$\tilde{C}^{(effspn)}\{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости, определяющих эволюцию деформационных свойств фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями. Каждый элемент совокупности является нечетким тензором, представленным в виде нечеткого

множества пар.

*{Параметры  $\overset{\text{(effspn)}}{C'}$  и  $\overset{\text{(effspn)}}{\tilde{C}'} \{0..9\}$  являются взаимоисключающими}*

$\overset{\text{(effspn)}}{C'}$  – эффективный тензор упругих податливостей фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями.

$\overset{\text{(effspn)}}{\tilde{C}'} \{0..9\}$  – совокупность нечетких эффективных тензоров упругих податливостей, определяющих эволюцию деформационных свойств фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями.

### Алгоритм:

A<sub>fsp1</sub>. [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие компоненты

$$\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi ;$$

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi ; a_{13} = \sin \psi \sin \theta ; a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi ;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi ; \quad a_{23} = -\cos \psi \sin \theta ; \quad a_{32} = \sin \varphi \sin \theta ;$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \theta ; a_{33} = \cos \theta .$$

*{Шаги 2-6 в случае необходимости преобразуют параметры в нечеткую форму}*

A<sub>fsp2</sub>. [ $\overset{\text{(n)}}{C} \neq \emptyset$  ?]. Если задан тензор  $\overset{\text{(n)}}{C}$ , то перейти к шагу 3, иначе к шагу 7.

A<sub>fsp3</sub>. [Добавить  $\left(1, \overset{\text{(n)}}{C}\right)$  в  $\overset{\text{(n)}}{\tilde{C}} \{0\}$ ]. Добавить в нечеткий тензор модулей упругости неоднородности  $\overset{\text{(n)}}{\tilde{C}} \{0\}$  пару  $\left(1, \overset{\text{(n)}}{C}\right)$ .

A<sub>fsp4</sub>. [Цикл  $t=1$  до 9]. Для переменной  $t$ , принимающей значения от 1 до 9 (конечного момента модельного времени), делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsp5</sub>. [Добавить  $\left(1, \overset{\text{(n)}}{C}\right)$  в  $\overset{\text{(n)}}{\tilde{C}} \{t\}$ ]. Добавить в нечеткий тензор модулей упругости неоднородности  $\overset{\text{(n)}}{\tilde{C}} \{t\}$  пару  $\left(1, \overset{\text{(n)}}{C}\right)$ .

A<sub>fsp6</sub>. [Конец цикла  $t$ ]. Увеличить  $t$  на 1. Перейти к шагу 4.

{Шаги 7-18 определяют значения параметров, характеризующих деформационные свойства рассматриваемой среды}

A<sub>fsp7</sub>. [Цикл  $t = 0$  до 9]. Для переменной  $t$ , принимающей значения от 0 до 9 (конечного момента модельного времени), делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsp8</sub>. [Получить  $\overset{(ns)}{C}\{\}$  и  $\mu_1[\ ]$  из  $\overset{(n)}{C}\{t\}$ ]. Заполнить совокупность  $\overset{(ns)}{C}\{\}$  и массив  $\mu_1[\ ]$  элементами из множества пар нечеткого тензора  $\overset{(n)}{C}\{t\}$ .

A<sub>fsp9</sub>. [Цикл  $l = 1$  до  $\text{num}\left(\overset{(ns)}{C}\{\}\right)$ ]. Для переменной  $l$ , принимающей значения от 1 до  $\text{num}\left(\overset{(ns)}{C}\{\}\right)$  – количества элементов в динамическом массиве  $\overset{(ns)}{C}\{\}$ , делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>fsp10</sub>. [ Определить  $\langle \overset{(ns)}{C}\{l\} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора модулей упругости неоднородности  $\langle \overset{(ns)}{C}\{l\} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \overset{(ns)}{C}\{l\} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} \overset{(ns)}{C}\{l\}_{mnp} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

A<sub>fsp11</sub>. [Определить  $\overset{(fspn)}{B}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\langle \overset{(ns)}{C}\{l\} \rangle$  определить тензор  $\overset{(fspn)}{B} \leftarrow \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \overset{(fspn)}{K}(Ak) dS$ .

A<sub>fsp12</sub>. [Определить  $\overset{(1fspn)}{C}$ ]. Определить тензор  $\overset{(1fspn)}{C} \leftarrow \overset{(ns)}{C}\{l\} - \langle \overset{(ns)}{C}\{l\} \rangle$ .

A<sub>fsp13</sub>. [Установить тензор  $T$ ]. Определить тензор  $T \leftarrow \left( \mathbf{I} + \overset{(fspn)}{B} \cdot \overset{(1fspn)}{C} \right)^{-1}$ .

A<sub>fsp14</sub>. [Установить  $\langle T \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle T \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{T} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lr} T_{mnp} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

A<sub>fsp15</sub>. [Добавить  $\left( \mu_1[l], \langle \overset{(ns)}{\mathbf{C}} \{l\} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1} \right)$  в  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{t\}$ ]. Добавить в совокупность нечетких эффективных тензоров модулей упругости  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{t\}$  рассматриваемой среды пару, степень принадлежности которой равна  $\mu_1[l]$ , а значение тензора определяется выражением  $\langle \overset{(ns)}{\mathbf{C}} \{l\} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ .

A<sub>fsp16</sub>. [Добавить  $\left( \mu_1[l], \left[ \langle \overset{(ns)}{\mathbf{C}} \{l\} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1} \right]^{-1} \right)$  в  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}'} \{t\}$ ]. Добавить в совокупность нечетких эффективных тензоров упругих податливостей  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}'} \{t\}$  рассматриваемой среды пару, степень принадлежности которой равна  $\mu_1[l]$ , а значение тензора определяется выражением  $\left[ \langle \overset{(ns)}{\mathbf{C}} \{l\} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1} \right]^{-1}$ .

A<sub>fsp17</sub>. [Конец цикла  $l$ ]. Увеличить  $l$  на 1. Перейти к шагу 9.

A<sub>fsp18</sub>. [Конец цикла  $t$ ]. Увеличить  $t$  на 1. Перейти к шагу 7.

*{Шаги 19-23 при возможности преобразуют выходные параметры в четкий вид и выводят их пользователю}*

A<sub>fsp19</sub>. [  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{0\} = \overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{1\} ?$  ]. Если  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{0\} = \overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{1\}$ , то перейти к шагу 20, иначе к шагу 24.

A<sub>fsp20</sub>. [  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \leftarrow \text{taketensor} \left( \overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{0\} \right)$  ]. Получить значение выходного параметра

$\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}}$  посредством извлечения из первой пары нечеткого множества  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{0\}$ .

A<sub>fsp21</sub>. [Удалить  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{0..9\}$ ]. Удалить совокупность  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}} \{0..9\}$ .

A<sub>fsp22</sub>. [  $\overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}'} \leftarrow \text{taketensor} \left( \overset{(effspn)}{\tilde{\mathbf{C}}'} \{0\} \right)$  ]. Получить значение тензора упругих

податливостей  $\overset{\text{(effspn)}}{C'}$  посредством извлечения из первой пары нечеткого множества  $\overset{\text{(effspn)}}{\tilde{C}'} \{0\}$ .

A<sub>fstr</sub>23. [Удалить  $\overset{\text{(effspn)}}{C'} \{0..9\}$ ]. Удалить совокупность  $\overset{\text{(effspn)}}{\tilde{C}'} \{0..9\}$ .

A<sub>fstr</sub>24. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Перейдем к построению математической модели, позволяющей определить деформационные свойства мультифрактального объекта пятого порядка сложности, представляющего собой фрактал, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу мультифракталов четвертого порядка, каждый из которых принадлежит к одному определенному виду. Проанализировав выражения (2.167) – (2.175), установим, что отличаясь только входными данными, разрабатываемая математическая модель идентична модели, описываемой диаграммой состояний, представленной на рисунке 23. В результате диаграмма состояний для разрабатываемой модели примет вид, изображенный на рисунке 24.

### 3.1.2. Математические модели и алгоритмы определения тепло- и электропроводных свойств мультифрактальных объектов

Анализ разработанных во второй главе теоретических основ мультифрактального математического моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП свидетельствует, что для каждого мультифрактального объекта  $n$ -го порядка сложности математические модели, описывающие процессы тепло- и электропроводности, имеют идентичный вид. Более того, каждая такая модель является композицией двух математических моделей. Первая из них описывает процесс теплопроводности (или электропроводности) во фрактальной среде с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями, а вторая – идентичный процесс во фрактальной среде с разнесенными в пространстве неоднородностями.

Разработаем данные математические модели фрактальных сред и на их основе построим модели мультифрактальных объектов различных порядков

сложности относительно тепло- или электропроводных свойств.

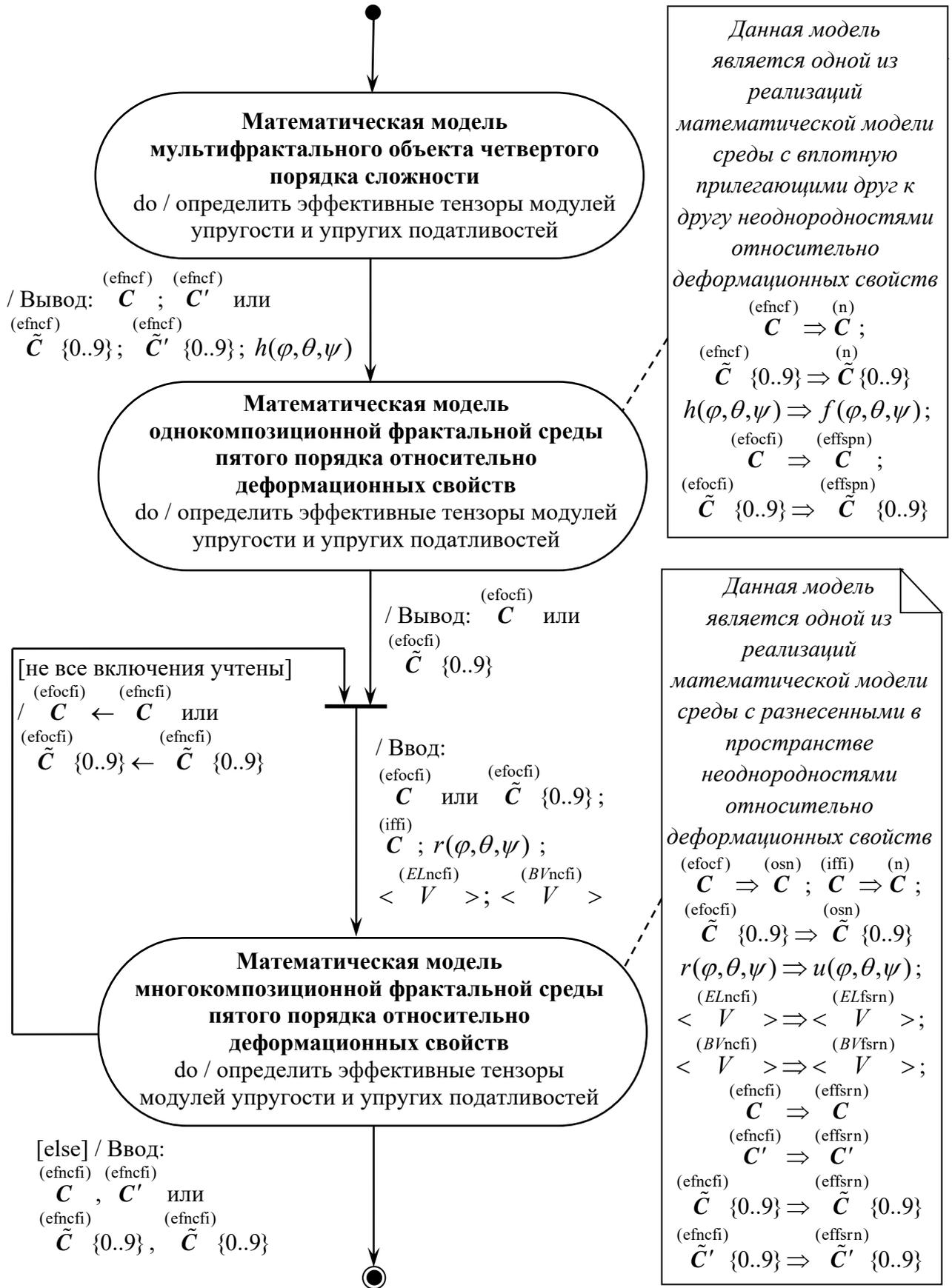


Рисунок 24 – Математическая модель мультифрактального объекта пятого порядка сложности относительно деформационных свойств

Проанализировав выражения (2.181), (2.182), (2.193), (2.194), получим следующую математическую модель фрактальной среды с впадною прилегающими друг к другу неоднородностями относительно тепло- или электропроводных свойств:

$$\mathbf{q}^{(\text{effspn})} = \langle \mathbf{q}^{(n)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q}^{(\text{fspn})} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q}^{(\text{fspn})} \right)^{-1} \rangle, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{q}'^{(\text{effspn})} = \langle \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q}^{(\text{fspn})} \right)^{-1} \rangle \cdot \langle \mathbf{q}^{(n)} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q}^{(\text{fspn})} \right)^{-1} \rangle, \quad (3.15)$$

где  $\mathbf{q}^{(n)}$  – тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) неоднородности;  $\mathbf{q}^{(\text{effspn})}$  – эффективный тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) рассматриваемой фрактальной среды;  $\mathbf{q}'^{(\text{effspn})}$  – эффективный тензор теплового (или электрического) сопротивления анализируемой фрактальной среды;  $\mathbf{W}$  – единичный двухвалентный тензор;  $\mathbf{\Omega}^{(\text{fspn})} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(n)} \mathbf{D}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{D}^{(n)}(Ak)$  –

преобразование Фурье-ядра  $D_{ij}^{(n)}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина матрицы, свойства которой характеризуются тензором  $\langle \mathbf{q}^{(n)} \rangle$ .

Алгоритм, соответствующий выражениям (3.14) и (3.15), можно представить в следующем виде.

Алгоритм  $A_{\text{tefsp}}$  (Алгоритм определения эффективных тензоров теплопроводности (или электропроводности) фрактальной среды с впадною прилегающими друг к другу неоднородностями)

#### Входные данные:

$\mathbf{q}^{(n)}$  – двухвалентный тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) фрактальной неоднородности; содержит 9 компонент, каждая из которых принимает вещественные значения {Для определения  $\mathbf{q}^{(n)}$

необходимо использовать справочные и экспериментальные данные, либо результаты других моделей}.

$f(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения неоднородностей по ориентациям {Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей отсутствует, то  $f(\varphi, \theta, \psi) = 1$ }.

### Выходные данные:

$(\text{effspn})$

$\mathbf{q}$  – эффективный тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями.

$(\text{effspn})$

$\mathbf{q}'$  – эффективный тензор теплового (или электрического) сопротивления фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями;

### Алгоритм:

Атеfsp1. [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие

компоненты  $\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ .

Атеfsp2. [ Определить  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(n)}$  ]. Определить усредненное значение тензорного коэффициента  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(n)}$  неоднородности, используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{q} \rangle^{(n)} \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} q_{mn}^{(n)} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Атеfsp3. [Определить  $\mathbf{\Omega}^{(\text{fspn})}$  ]. Для сплошной среды с теплопроводными (или электропроводными) свойствами  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(n)}$  определить тензор  $\mathbf{\Omega}^{(\text{fspn})} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \mathbf{D}(Ak) dS$ .

Атеfsp4. [Определить  $\mathbf{q}^{(\text{fspn})}$  ]. Определить тензор  $\mathbf{q}^{(\text{fspn})} \leftarrow \mathbf{q}^{(n)} - \langle \mathbf{q} \rangle^{(n)}$ .

Атеfsp5. [Установить тензор  $\mathbf{T}$  ]. Определить тензор  $\mathbf{T} \leftarrow \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega}^{(\text{fspn})} \cdot \mathbf{q}^{(\text{fspn})} \right)^{-1}$ .

Атеfсп6. [Установить  $\langle \mathbf{T} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{T} \rangle$ :

$$\langle \mathbf{T} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} T_{mn} f(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Атеfсп7. [  $\mathbf{q}^{(\text{effspn})} \leftarrow \langle \mathbf{q} \rangle^{(n)} \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ ]. Присвоить эффективному тензорному коэффициенту теплопроводности (или удельной электропроводности) фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями значение выражения  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(n)} \cdot \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ .

Атеfсп8. [  $\mathbf{q}'^{(\text{effspn})} \leftarrow \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{q} \rangle^{(n)} \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ ]. Присвоить эффективному тензору теплового (или электрического) сопротивления фрактальной среды с вплотную прилегающими друг к другу неоднородностями значение выражения  $\langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{q} \rangle^{(n)} \cdot \langle \mathbf{T} \rangle^{-1}$ .

Атеfсп9. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Перейдем к рассмотрению фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями относительно тепло- или электропроводных свойств.

Проанализировав выражения (2.183) – (2.188) и (2.195) – (2.200), получим следующую математическую модель для рассматриваемой фрактальной среды:

$$\mathbf{q}^{(\text{effsrn})} = \mathbf{q}^{(\text{efosn})} + \left\langle \frac{V^{(EL\text{fsrn})}}{V^{(BV\text{fsrn})}} \mathbf{q} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (3.16)$$

$$\times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \left\langle \frac{V^{(EL\text{fsrn})}}{V^{(BV\text{fsrn})}} \mathbf{q} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1},$$

$$\mathbf{q}'^{(\text{effsrn})} = \mathbf{q}^{(\text{efosn})} + \left\langle \frac{V^{(EL\text{fsrn})}}{V^{(BV\text{fsrn})}} \mathbf{q} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \right)^{-1} \right\rangle \times \quad (3.17)$$

$$\times \left( \mathbf{W} - \mathbf{\Omega} \left\langle \frac{V^{(EL\text{fsrn})}}{V^{(BV\text{fsrn})}} \mathbf{q} \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \right)^{-1} \right\rangle \right)^{-1},$$

где  $\mathbf{q}^{(efosn)}$  и  $\mathbf{q}^{(effsrn)}$  – эффективные тензорные коэффициенты теплопроводности (или удельной электропроводности) основной и рассматриваемой фрактальной сред;  $\mathbf{q}'^{(effsrn)}$  – эффективный тензор теплового (или электрического) сопротивления анализируемой фрактальной среды;  $\Omega^{(fsrn)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(fsrn)} \mathbf{D}(Ak) dS$ ;  $\mathbf{D}(Ak)^{(fsrn)}$  – преобразование Фурье-ядра  $D_{ij}^{(fsrn)}(x)$ , представляющего собой вторую производную функцию Грина матрицы, свойства которой характеризуются тензором  $\mathbf{q}^{(efosn)}$ ;  $\mathbf{q}^{(lfsrn)} = \mathbf{q}^{(n)} - \mathbf{q}^{(efosn)}$ ;  $V^{(ELfsrn)}$  и  $V^{(BVfsrn)}$  – соответственно объем эллипсоида и объем блока Вороного в рассматриваемой фрактальной среде.

Алгоритм, соответствующий данной модели, будет иметь следующий вид.  
 Алгоритм  $A_{tefsr}$  (Алгоритм определения эффективных тензоров теплопроводности (или электропроводности) фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями)

Входные данные:

$\mathbf{q}^{(n)}$  – двухвалентный тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) фрактальной неоднородности; содержит 9 компонент, каждая из которых принимает вещественные значения *{Для определения  $\mathbf{q}^{(n)}$  необходимо использовать справочные и экспериментальные данные, либо результаты других моделей}*.

$\mathbf{q}^{(osn)}$  – эффективный тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) основной среды. Этот тензор определяется 9 компонентами, принимающими вещественные значения.

$u(\varphi, \theta, \psi)$  – функция распределения неоднородностей по ориентациям *{Данная функция определяется на основе экспериментальных данных посредством анализа полюсных фигур, дифракционных спектров и др. Если преимущественная ориентация неоднородностей в рассматриваемой среде отсутствует, то*

$$u(\varphi, \theta, \psi) = 1\}.$$

$\langle V \rangle^{(ELfsrn)}$  – средний объем неоднородности (аппроксимированной эллипсоидом) в рассматриваемой среде.

$\langle V \rangle^{(BVfsrn)}$  – средний объем блока Вороного в рассматриваемой среде

### Выходные данные:

$\mathbf{q}^{(effsrn)}$  – эффективный тензорный коэффициент теплопроводности (или удельной электропроводности) фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями. Этот тензор определяется 9 компонентами, принимающими вещественные значения.

$\mathbf{q}'^{(effsrn)}$  – эффективный тензор теплового (или электрического) сопротивления фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями. Данный двухвалентный тензор определяется 9 компонентами, принимающими вещественные значения.

### Алгоритм:

Атеfсr1. [Задать тензор преобразований  $\mathbf{a}$ ]. Тензор  $\mathbf{a}$  имеет следующие

компоненты  $\mathbf{a} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , где  $a_{11} = \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi$ ;

$$a_{12} = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi; a_{13} = \sin \psi \sin \theta; a_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi; a_{23} = -\cos \psi \sin \theta; a_{32} = \sin \varphi \sin \theta;$$

$$a_{31} = \cos \varphi \sin \theta; a_{33} = \cos \theta.$$

Атеfсr2. [Определить  $\mathbf{\Omega}^{(fsrn)}$ ]. Для сплошной среды с теплопроводными (или электропроводными) свойствами  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(osn)}$  определить тензор

$$\mathbf{\Omega}^{(fsrn)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1}^{(fsrn)} \mathbf{D}(Ak) dS.$$

Атеfсr3. [Определить  $\mathbf{q}^{(1fsrn)}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q}^{(1fsrn)} - \mathbf{q}^{(n)} - \mathbf{q}^{(osn)}$ .

Атеfсr4. [Установить  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(1fsrn)}$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{q} \rangle^{(1fsrn)}$ ,

используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{q} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} \mathbf{q}_{mn} u(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Атеfсr5. [Определить тензор  $\mathbf{Z}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{Z} \leftarrow \frac{\langle V \rangle^{(ELfсrn)}}{\langle V \rangle^{(BVfсrn)}} \langle \mathbf{q} \rangle^{(1fсrn)}$ .

Атеfсr6. [Установить тензор  $\mathbf{Q}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{Q} \leftarrow \left( \mathbf{W} + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{q} \right)^{(fсrn) (1fсrn) -1}$ .

Атеfсr7. [Установить  $\langle \mathbf{Q} \rangle$ ]. Определить усредненное значение тензора  $\langle \mathbf{Q} \rangle$ , используя следующее выражение:

$$\langle \mathbf{Q} \rangle \leftarrow \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{im} a_{jn} Q_{mn} u(\varphi, \theta, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi.$$

Атеfсr8. [Определить  $\mathbf{T}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{T}$ , согласно следующей инструкции присваивания:

$$\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{Z} \cdot \langle \mathbf{Q} \rangle.$$

Атеfсr9. [Определить тензор  $\mathbf{R}$ ]. Определить тензор  $\mathbf{R}$ , согласно следующей инструкции присваивания:  $\mathbf{R} \leftarrow \left( \mathbf{I} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} \right)^{(fсrn) -1}$ .

Атеfсr10. [  $\mathbf{q}' \leftarrow \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$  ]. Присвоить эффективному тензорному коэффициенту теплопроводности (или удельной электропроводности) фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями значение выражения  $\mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R}$ .

Атеfсr11. [  $\mathbf{q}' \leftarrow \left( \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \right)^{(осn) -1}$  ]. Присвоить эффективному тензору теплового (или электрического) сопротивления фрактальной среды с разнесенными в пространстве неоднородностями значение выражения  $\left( \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \right)^{(осn) -1}$ .

Атеfсr12. [Конец алгоритма]. Выполнение алгоритма прекратить.

Полученные результаты позволяют построить следующие диаграммы состояний (рисунки 25-28), соответствующие математическим моделям

мультифрактальных объектов различных порядков сложности относительно тепло- или электропроводных свойств.

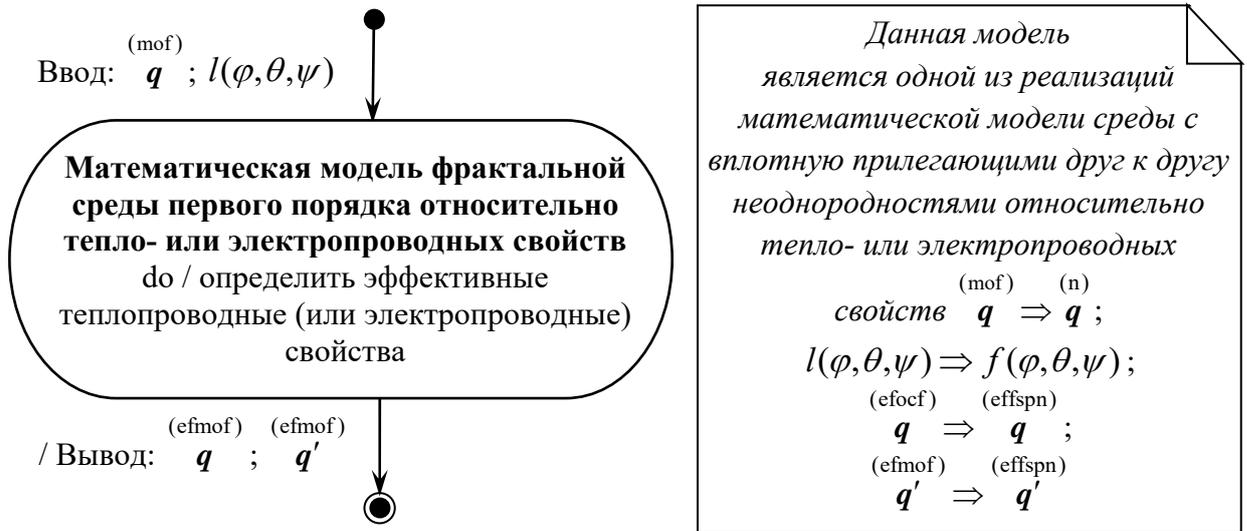


Рисунок 25 – Математическая модель мультифрактального объекта первого порядка сложности относительно тепло- или электропроводных свойств

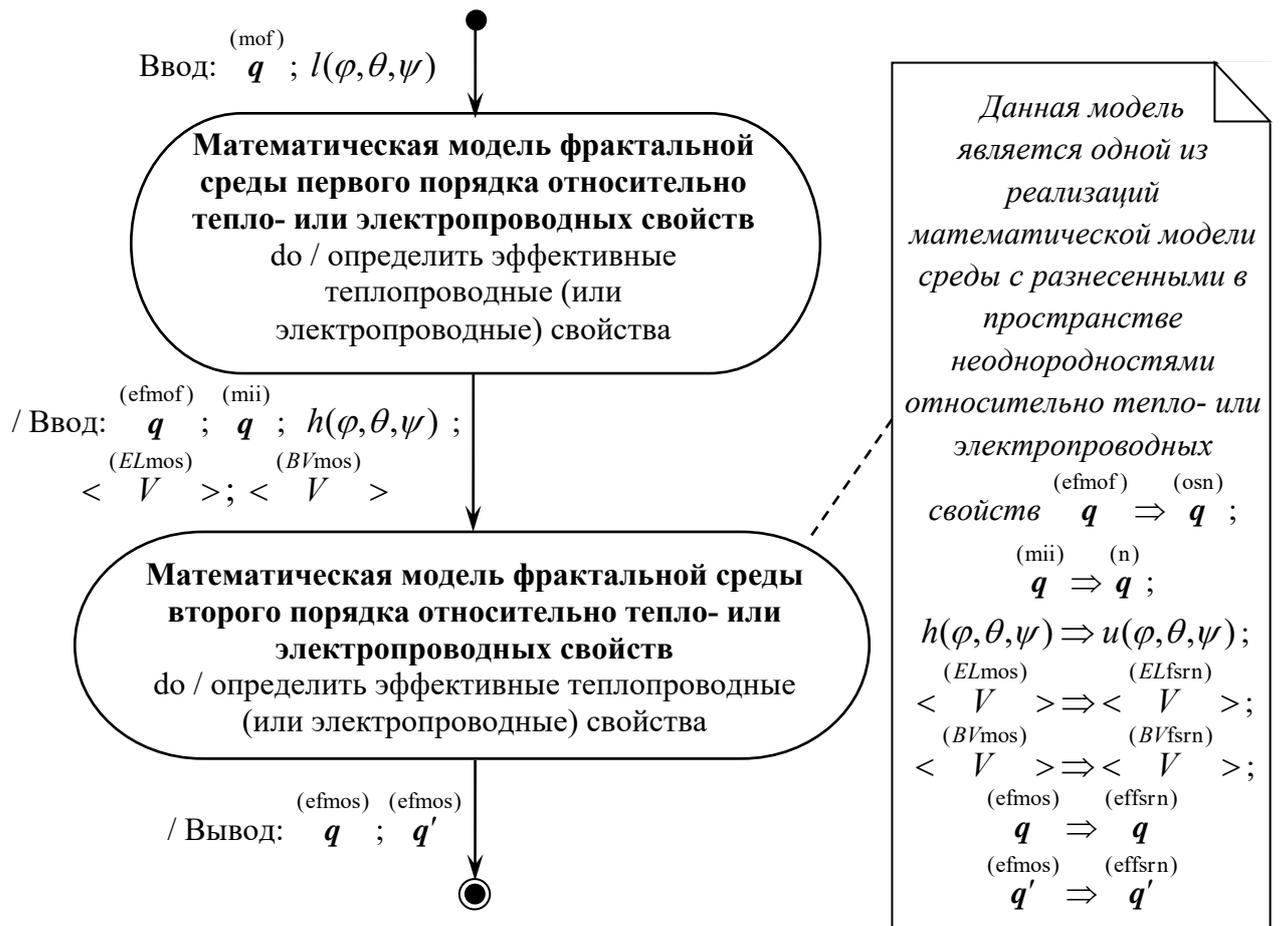


Рисунок 26 – Математическая модель мультифрактального объекта второго порядка сложности относительно тепло- или электропроводных свойств

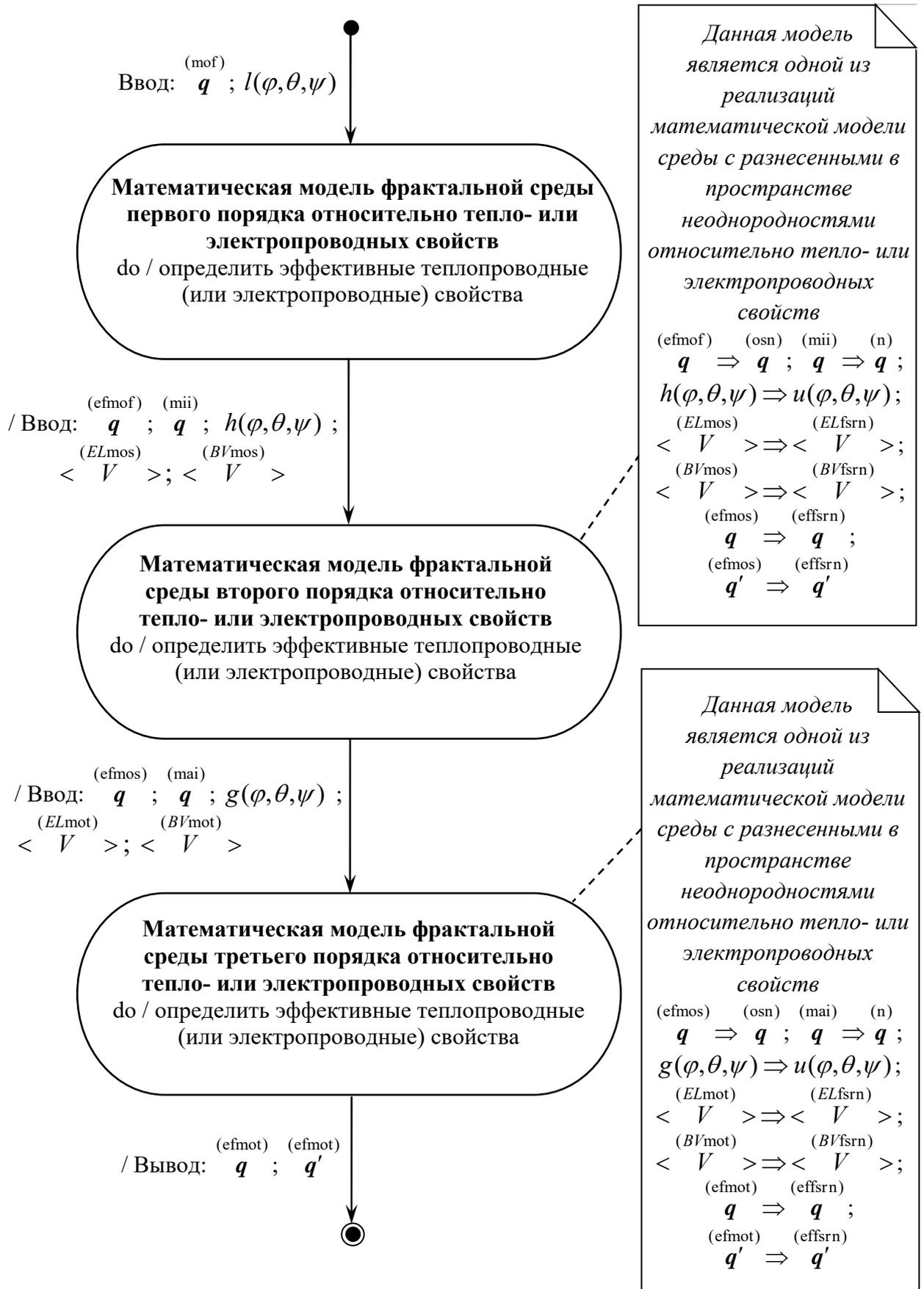


Рисунок 27 – Математическая модель мультифрактального объекта третьего порядка сложности относительно тепло- или электропроводных свойств

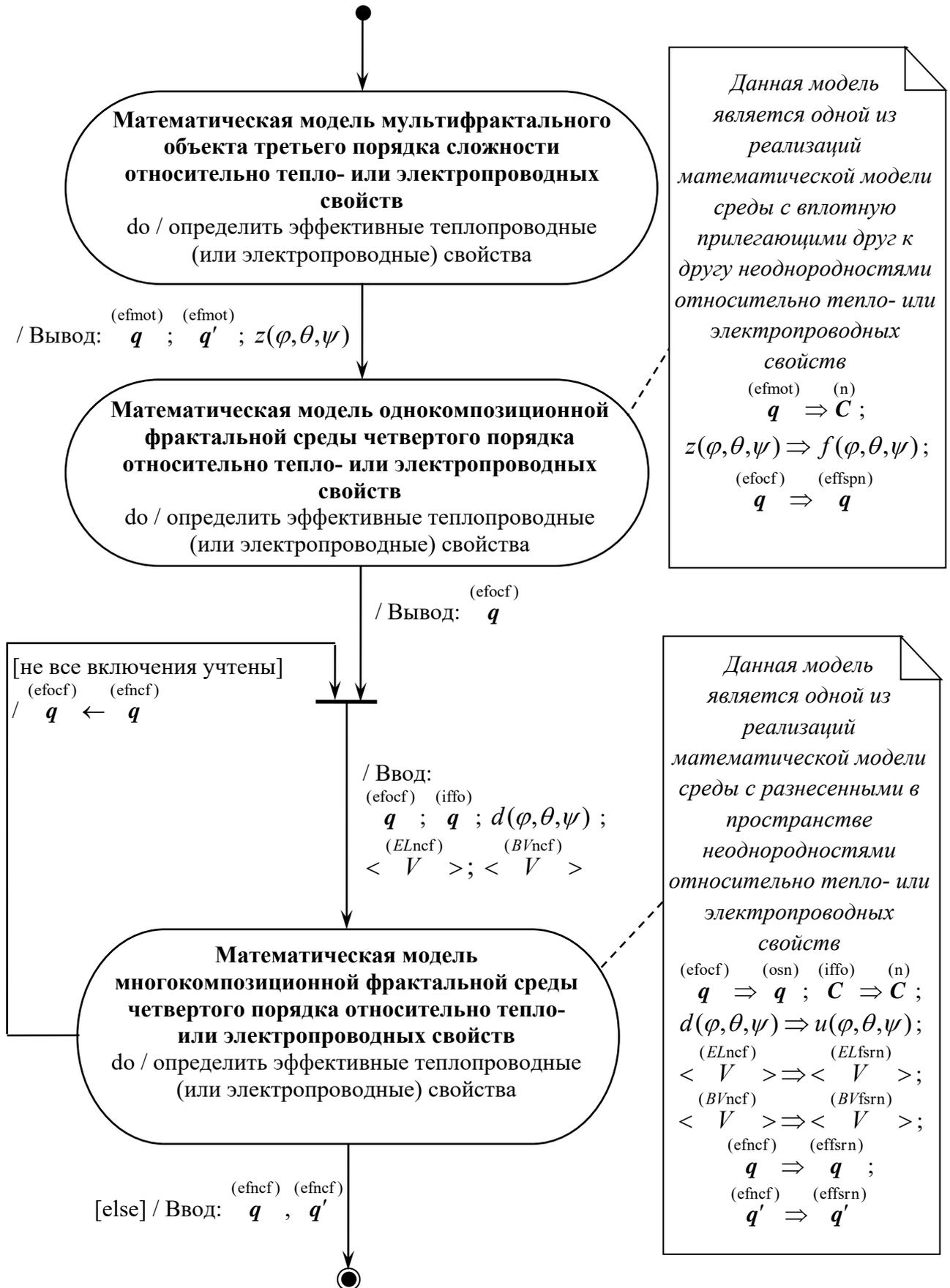


Рисунок 28 – Математическая модель мультифрактального объекта четвертого порядка сложности относительно тепло- или электропроводных свойств

### 3.1.3. Алгоритм определения внешнего поля напряжений, действующего на мультифрактальный объект четвертого или пятого порядков сложности

Проводя анализ теоретических основ мультифрактального моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в части определения внешнего поля напряжений в породном массиве, а также принимая во внимание, что для многих исследований требуется определение данного поля для мультифрактальных объектов не только пятого, но и четвертого порядков сложности, получим следующую диаграмму состояний (рисунок 29).

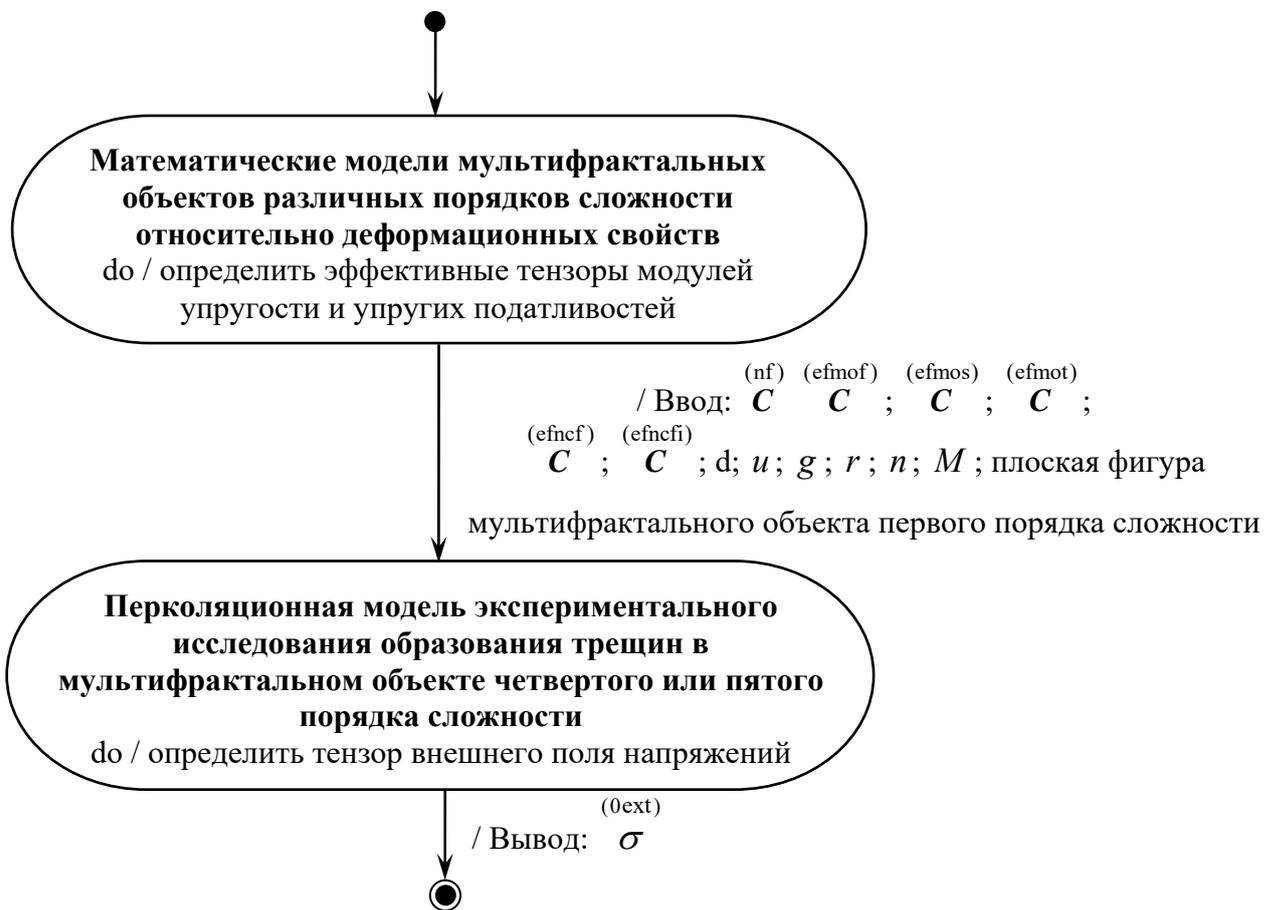


Рисунок 29 – Диаграмма состояний для алгоритма определения внешнего поля напряжений, действующего на мультифрактальный объект

Первое состояние на представленной диаграмме является составным и заключается в применении выше разработанных моделей относительно деформационных свойств (рисунки 20-24) для получения упругих свойств

исследуемого мультифрактального объекта и его текстурных составляющих.

Произведем детализацию второго состояния, позволяющего на основе полученных значений эффективных тензоров модулей упругости мультифрактальных объектов определить величину внешнего поля напряжений, действующего на исследуемый объект. В итоге получим следующий алгоритм.

Алгоритм  $A_{\text{def}}$  (Алгоритм определения внешнего поля напряжений, действующего на мультифрактальный объект четвертого или пятого порядков сложности)

Входные данные:

$C^{(nf)}$  – тензор модулей упругости фрактальной неоднородности мультифрактального объекта первого порядка сложности. *{Для определения  $C^{(nf)}$  необходимо использовать справочные данные и экспериментальные методы}*.

$C^{(efmof)}$  – эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта первого порядка сложности. Данный тензор имеет четкий вид и определяется на основе алгоритма  $A_{\text{etmp}}$ .

$C^{(efmos)}$  – эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта второго порядка сложности. Этот тензор представляется в четкой форме и определяется на основе диаграммы состояний, изображенной на рисунке 21.

$C^{(efmot)}$  – эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта третьего порядка сложности. Данный тензор имеет четкий вид и определяется на основе диаграммы состояний, изображенной на рисунке 22.

$r$  – концентрация мультифракталов третьего порядка сложности в объекте, для которого определяется величина внешнего поля.

$C^{(efncf)}$  – эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта четвертого порядка сложности. Этот тензор представляется в четкой форме и определяется на основе диаграммы состояний, изображенной на рисунке 23.

*{В случае решения задачи определения внешнего поля напряжений для*

мультифрактального объекта четвертого порядка сложности тензор  $C^{(efncfi)}$  и параметр  $n$  – не задаются}.

$C^{(efncfi)}$  – эффективный тензор модулей упругости мультифрактального объекта пятого порядка сложности. Этот тензор имеет четкий вид и определяется на основе диаграммы состояний, изображенной на рисунке 24.

$n$  – концентрация мультифракталов четвертого порядка сложности в объекте, для которого определяется величина внешнего поля.

Среди входных данных в рассматриваемый алгоритм должна входить плоская фигура, являющаяся графической моделью мультифрактала первого порядка сложности, входящего в состав исследуемого объекта. Построение данной фигуры осуществляется следующим образом.

Сначала посредством портативного оптического микроскопа необходимо получить микрофотографии мультифракталов первого порядка сложности, входящих в состав объекта, для которого требуется определить величину внешнего поля. Далее, среди полученных микрофотографий выбирается одна, в которой присутствует вертикально-ориентированная трещина. После этого, проанализировав данную микрофотографию и другие экспериментальные данные, с помощью методов фотограмметрии получают трехмерную фигуру – многогранник, соответствующий объекту первого порядка сложности. В заключение, необходимо спроецировать полученный многогранник на плоскость  $ZOY$ , и как результат – получают искомую плоскую фигуру, являющуюся графической моделью мультифрактала первого порядка сложности, входящего в состав исследуемого объекта.

$u$  – количество плоских фигур, требуемых для исследования процесса перколяции. Определяется длиной многогранника вдоль оси  $Ox$ .

$d_1$  – линейный размер вертикально-ориентированной трещины на микрофотографии, использованной при построении трехмерной фигуры мультифрактала первого порядка сложности.

$d_2$  – линейный размер горизонтально-ориентированной трещины на

микрофотографии, использованной при построении трехмерной фигуры мультифрактала первого порядка сложности.

$g$  – среднее значение площади фрактальной неоднородности мультифрактала первого порядка сложности, входящего в состав исследуемого объекта.

$M$  – булева переменная, принимающая значение 1, если требуется определить внешнее поле напряжений для мультифрактального объекта пятого порядка сложности, 0 – для мультифрактального объекта четвертого порядка сложности.

### Выходные данные:

<sup>(0ext)</sup>

$\sigma$  – двухвалентный тензор напряжений, характеризующий внешнее поле напряжений, действующее на исследуемый объект.

$A_{\text{def1}}$ . [Построить двухмерную перколяционную решетку, соответствующую мультифракталу первого порядка сложности, входящего в состав объекта, для которого требуется определить величину внешнего поля]. Разбить плоскую фигуру (являющуюся графической моделью мультифрактала первого порядка сложности) на одинаковые квадраты, площадь каждого из которых равна средней площади  $g$  фрактальной неоднородности рассматриваемого объекта.

$A_{\text{def2}}$ . [Определить  $a$ ]. Определить максимальную длину перколяционной решетки в направлении оси  $Oy$ .

$A_{\text{def3}}$ . [Определить  $b$ ]. Определить максимальную длину перколяционной решетки в направлении оси  $Oz$ .

$A_{\text{def4}}$ . [Получить матрицу  $L = [l_{ij}]$ ]. Для плоской фигуры, являющейся графической моделью мультифрактального объекта первого порядка сложности, построить матрицу  $L = [l_{ij}]$ . При этом  $l_{ij} = 0$ , если точка  $x$  с координатами

$\left( i \cdot \frac{b}{g}; j \cdot \frac{a}{g} \right)$  находится внутри плоской фигуры мультифрактального объекта

первого порядка сложности,  $l_{ij} = -1$  – в противном случае.

$A_{\text{def5}}$ . [Определить  $\sigma_p$ ]. Для фрактальных неоднородностей мультифрактального

объекта первого порядка сложности определить предел прочности  $\sigma_p$  на растяжение.

A<sub>def6</sub>. [Определить  $\overset{(ncf)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ]. Определить часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанную с попаданием точек в разные мультифрактальные объекты четвертого порядка в среде, соответствующей мультифракталу пятого порядка.

A<sub>def7</sub>. [Определить  $\overset{(ncfi)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ]. Определить часть среднего по ансамблю полей неоднородностей, связанную с попаданием точек в разные мультифрактальные объекты третьего порядка в среде, соответствующей мультифрактальному объекту четвертого порядка.

A<sub>def8</sub>. [Определить  $\overset{(nf)}{\mathbf{B}}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\overset{(efmos)}{\mathbf{C}}$  определить тензор  $\overset{(nf)}{\mathbf{B}}$ .

A<sub>def9</sub>. [Определить  $\overset{(lnf)}{\mathbf{C}}$ ]. Определить тензор  $\overset{(lnf)}{\mathbf{C}} \leftarrow \overset{(nf)}{\mathbf{C}} - \overset{(efmos)}{\mathbf{C}}$ .

A<sub>def10</sub>. [Определить  $\overset{(ncf)}{\mathbf{H}}$ ]. Используя модель, изображенную на рисунке 23, определить тензор  $\overset{(ncf)}{\mathbf{H}}$ .

A<sub>def11</sub>. [Определить  $\overset{(ncfi)}{\mathbf{H}}$ ]. Используя модель, изображенную на рисунке 24, определить тензор  $\overset{(ncfi)}{\mathbf{H}}$ .

A<sub>def12</sub>. [Определить  $\overset{(nfmi)}{\mathbf{B}}$ ]. Для сплошной среды с упругими свойствами  $\overset{(nf)}{\mathbf{C}}$  определить тензор  $\overset{(nfmi)}{\mathbf{B}}$ .

A<sub>def13</sub>. [ $z \leftarrow 0$ ]. Булевой переменной  $z$ , указывающей на окончание процесса итерационного подбора величины внешнего поля напряжений, присвоить значение 0.

A<sub>def14</sub>. [ $\overset{(ext)}{\sigma_3} \leftarrow \sigma_p$ ]. Главному значению  $\overset{(ext)}{\sigma_3}$  тензора внешнего поля напряжений

$\sigma^{(0\text{tpm})}$  задать начальное приближение  $\sigma_p$ , т.е.  $\sigma_3^{(\text{ext})} \leftarrow \sigma_p$ .

A<sub>def15</sub>. [ $\sigma^{(0\text{ext})} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^{(\text{ext})} \end{pmatrix}$ ]. Присвоить начальному значению тензора внешнего

поля напряжений значение выражения  $\sigma^{(0\text{ext})} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^{(\text{ext})} \end{pmatrix}$ .

A<sub>def16</sub>. [Цикл Пока  $z = 0$ ]. Пока  $z = 0$  выполнить нижеследующие шаги.

*{Шаги 17-34 определяют текущее значение вероятности разрушения в исследуемой перколяционной решетке.}*

A<sub>def17</sub>. [ $P_{RD} \leftarrow 0$ ]. Текущему значению вероятности разрушения  $P_{RD}$  присвоить значение, равное 0.

A<sub>def18</sub>. [ $q_A \leftarrow 0$ ]. Присвоить количеству состояний  $q_A$ , при которых происходит разрушение зерна с порой посредством поля напряжений, значение равное 0.

A<sub>def19</sub>. [ $q_B \leftarrow 0$ ]. Присвоить количеству состояний  $q_B$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля давлений, значение равное 0.

A<sub>def20</sub>. [Цикл  $\varphi \leftarrow 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$ ]. Для угла  $\varphi$ , принимающего значения от 0 до  $23\pi/12$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def21</sub>. [Цикл  $\theta \leftarrow 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$ ]. Для угла  $\theta$ , принимающего значения от 0 до  $23\pi/12$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def22</sub>. [Цикл  $\psi \leftarrow 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$ ]. Для угла  $\psi$ , принимающего значения от 0 до  $23\pi/12$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def23</sub>. [ $M = 1?$ ]. Если пользователь выбрал определение внешнего поля

напряжений для мультифрактального объекта пятого порядка сложности, то перейти к шагу 24, иначе к шагу 25.

A<sub>def24</sub>. [Определить  $\overset{(nf)}{\sigma}(\varphi, \theta, \psi)$ ]. Определить значение тензора напряжений во фрактальной неоднородности на основе следующего выражения:

$$\begin{aligned} \overset{(nf)}{\sigma}(\varphi, \theta, \psi) &\leftarrow \overset{(nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \times \\ &\times \left\langle \overset{(nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left\langle \overset{(nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left( \mathbf{I} + \overset{(ncf)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1ncf)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \overset{(ncf)}{\mathbf{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \overset{(ncf)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \times \\ &\times \left( \mathbf{I} + \overset{(ncfi)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1ncfi)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{w} \int \overset{(ncfi)}{\mathbf{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \overset{(ncfi)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \cdot \left( \overset{(efncfi)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \overset{(0ext)}{\sigma}. \end{aligned}$$

Перейти к шагу 26.

A<sub>def25</sub>. [Определить  $\overset{(nf)}{\sigma}(\varphi, \theta, \psi)$ ]. Определить значение тензора напряжений во фрактальной неоднородности на основе следующего выражения:

$$\begin{aligned} \overset{(nf)}{\sigma}(\varphi, \theta, \psi) &\leftarrow \overset{(nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \times \\ &\times \left\langle \overset{(nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left\langle \overset{(nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle \cdot \left\langle \left( \mathbf{I} + \overset{(nf)}{\mathbf{B}} \cdot \overset{(1nf)}{\mathbf{C}}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left( \mathbf{I} + \overset{(ncf)}{\mathbf{H}} \cdot \overset{(1ncf)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int \overset{(ncf)}{\mathbf{K}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \overset{(ncf)}{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \cdot \left( \overset{(efncf)}{\mathbf{C}} \right)^{-1} \overset{(0ext)}{\sigma}. \end{aligned}$$

A<sub>def26</sub>. [ $\overset{(nf)}{\sigma}_{11}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p$  или  $\overset{(nf)}{\sigma}_{22}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p$ ?]. Если компонента  $\overset{(nf)}{\sigma}_{11}(\varphi, \theta, \psi)$  или

$\overset{(nf)}{\sigma}_{22}(\varphi, \theta, \psi)$  превышает или равна пределу прочности зерна  $\sigma_p$  на растяжение, то

перейти к шагу 27, иначе к шагу 28.

A<sub>def27</sub>. [ $q_A \leftarrow q_A + 1$ ]. Увеличить число состояний  $q_A$  на 1.

A<sub>def28</sub>. [Определить поле давлений  $p\delta^{ij}$  во фрактальной неоднородности с ориентацией  $(\varphi, \theta, \psi)$ ]. Определить поле  $p\delta^{ij}$  в неоднородности с ориентацией  $(\varphi, \theta, \psi)$  воспользовавшись следующим выражением:

$$p\delta^{ij}(\varphi, \theta, \psi) \leftarrow p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + B^{(nfmi)klpq} \cdot \left( p_0 I^{pqmn} - C^{(nf)pqmn}(\varphi, \theta, \psi) \right) \right)^{-1} \times \\ \times \left( C^{(nf)mnsd}(\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \sigma_{sd}^{(nf)}(\varphi, \theta, \psi).$$

A<sub>def29</sub>. [ $p > \frac{1}{5} \sigma_p$  ?]. Если давление  $p$  в микровключении, расположенном во фрактальной неоднородности с ориентацией  $(\varphi, \theta, \psi)$  больше  $\frac{1}{5}$  от предела прочности на растяжение  $\sigma_p$ , то перейти к шагу 30, иначе к шагу 31.

A<sub>def30</sub>. [ $q_B \leftarrow q_B + 1$ ]. Увеличить число состояний  $q_B$  на 1.

A<sub>def31</sub>. [Цикл  $\psi \leftarrow 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$ ]. Увеличить угол  $\psi$  на величину  $\pi/12$ . Перейти к шагу 22.

A<sub>def32</sub>. [Конец Цикла  $\theta \leftarrow 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$ ]. Увеличить угол  $\theta$  на величину  $\pi/12$ . Перейти к шагу 21.

A<sub>def33</sub>. [Конец Цикла  $\varphi \leftarrow 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$ ]. Увеличить угол  $\varphi$  на величину  $\pi/12$ . Перейти к шагу 20.

A<sub>def34</sub>. [ $P_{RD} \leftarrow \frac{q_A + q_B}{w}$ ]. Текущему значению вероятности разрушения  $P_{RD}$ ,

присвоить значение  $\frac{q_A + q_B}{w}$  (число возможных состояний  $w$  отдельной неоднородности с микровключением в рамках рассматриваемого алгоритма равно 13824).

{Шаги 35-50 предназначены для осуществления компьютерного эксперимента в

каждой двумерной перколяционной решетке}

A<sub>def35</sub>. [Цикл  $s \leftarrow 1$  до  $u$ ]. Для переменной  $s$ , принимающей значения от 1 до  $u$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def36</sub>. [Цикл  $i \leftarrow 1$  до  $\text{round}(b/g)$ ]. Для переменной  $i$ , принимающей значения от 1 до  $\text{round}(b/g)$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def37</sub>. [Цикл  $j \leftarrow 1$  до  $\text{round}(a/g)$ ]. Для переменной  $j$ , принимающей значения от 1 до  $\text{round}(a/g)$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def38</sub>. [ $l_{ij} \neq -1?$ ]. Если  $l_{ij} \neq -1$ , то перейти к шагу 39, иначе к шагу 42.

A<sub>def39</sub>. [Сгенерировать случайное число  $P$ ]. С помощью генератора равномерно распределенных чисел сгенерировать случайное число  $P \in [0;1]$ .

A<sub>def40</sub>. [ $P > P_{RD}?$ ]. Если  $P > P_{RD}$ , то перейти к шагу 41, иначе к шагу 42.

A<sub>def41</sub>. [ $l_{ij} \leftarrow 1$ ]. Элементу матрицы  $l_{ij}$  присвоить значение 1.

A<sub>def42</sub>. [Конец Цикла  $j \leftarrow 1$  до  $\text{round}(a/g)$ ]. Перейти к шагу 37.

A<sub>def43</sub>. [Конец Цикла  $i \leftarrow 1$  до  $\text{round}(b/g)$ ]. Перейти к шагу 36.

A<sub>def44</sub>. [Получить массив смежных элементов  $K = [ ]$ ]. Посредством анализа элементов матрицы  $L$  получить динамический массив смежных элементов  $K = [ ]$ .

A<sub>def45</sub>. [ $x \leftarrow 0$ ]. Булевой переменной  $x$ , указывающей на окончание моделирования процесса перколяции, присвоить значение 0.

A<sub>def46</sub>. [Цикл  $w = 1$  до  $\text{num}(K[ ])$ ]. Для переменной  $w$ , принимающей значения от 1 до  $\text{num}(K[ ])$  – количества элементов в динамическом массиве  $K[ ]$ , делать нижеследующую последовательность действий.

A<sub>def47</sub>. [ $K[w] < d_1 \cdot g?$ ]. Если длина кластера в перколяционной решетке меньше длины трещины, то перейти к шагу 48, иначе к шагу 49.

A<sub>def48</sub>. [ $x \leftarrow 1$ ]. Булевой переменной  $x$  присвоить значение 1. Перейти к шагу 50.

A<sub>def49</sub>. [Конец Цикла  $w = 1$  до  $\text{num}(K[ ])$ ]. Увеличить  $w$  на 1. Перейти к шагу 46.

A<sub>def50</sub>. [Конец Цикла  $s \leftarrow 1$  до  $u$ ]. Увеличить счетчик  $s$  на 1. Перейти к шагу 35.

A<sub>def51</sub>. [ $x = 1?$ ]. Если  $x = 1$ , то перейти к шагу 52, иначе к шагу 53.

A<sub>def52</sub>. [ $\overset{(ext)}{\sigma_3} \leftarrow \overset{(ext)}{\sigma_3} + 10^3 \text{ Па}$ ]. Увеличить компоненту  $\overset{(ext)}{\sigma_3}$  тензора внешнего поля напряжений  $\overset{(0ext)}{\sigma}$  на величину  $10^3 \text{ Па}$ . Перейти к шагу 54.

A<sub>def53</sub>. [ $z \leftarrow 1$ ]. Булевой переменной  $z$ , указывающей на окончание процесса итерационного подбора величины внешнего поля напряжений, присвоить значение 1.

A<sub>def54</sub>. [Конец Цикла Пока  $z = 0$ ]. Перейти к шагу 16.

A<sub>def55</sub>. [ $\overset{(ext)}{\sigma_2} \leftarrow \overset{(ext)}{\sigma_p}$ ]. Главному значению  $\overset{(ext)}{\sigma_2}$  тензора внешнего поля напряжений  $\overset{(0tpm)}{\sigma}$  задать начальное приближение  $\overset{(ext)}{\sigma_p}$ , т.е.  $\overset{(ext)}{\sigma_2} \leftarrow \overset{(ext)}{\sigma_p}$ .

A<sub>def56</sub>. [ $\overset{(0ext)}{\sigma} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{(ext)}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ]. Присвоить начальному значению тензора внешнего

поля напряжений значение выражения  $\overset{(0ext)}{\sigma} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{(ext)}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

A<sub>def57</sub>. [Повторить шаги 16-54]. Повторить шаги 16-54, только вместо  $d_1$  использовать  $d_2$  и  $\overset{(ext)}{\sigma_2}$  – вместо  $\overset{(ext)}{\sigma_3}$ .

A<sub>def58</sub>. [ $\overset{(ext)}{\sigma_2} \leftarrow \overset{(ext)}{\sigma_1}$ ]. Присвоить горизонтальным составляющим внешнего поля напряжений равные значения.

A<sub>def59</sub>. [ $\overset{(0ext)}{\sigma} \leftarrow \begin{pmatrix} \overset{(ext)}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{(ext)}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{(ext)}{\sigma_3} \end{pmatrix}$ ], где  $\overset{(ext)}{\sigma_2} = \overset{(ext)}{\sigma_1}$ .

A<sub>def60</sub>. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

### 3.2. Каркас информационного обеспечения АСНИ и АСУ ТП

Следующий этап проектирования состоит в разработке каркаса информационного обеспечения АСНИ и АСУ ТП. Анализируя разработанные выше алгоритмы и функциональные задачи административного характера, получим три базы данных, составляющих основу рассматриваемого каркаса. При этом для реализации каждой из них воспользуемся свободной реляционной системой управления базами данных MySQL.

Первая из них – "БД\_Пользователи" содержит данные для авторизации пользователя в АСНИ и АСУ ТП, т.е. необходима для контроля доступа к сервисам, предоставляемым программным фреймворком. ER-диаграмма такой базы данных состоит из двух сущностей "Пользователь" и "Функциональная\_задача" (рисунок 30). Первая из них характеризуется свойствами "Логин", "Пароль" и "ИдентНомер" (Идентификационный номер сотрудника), а вторая – атрибутами "Наименование" и "Уровень\_доступа"

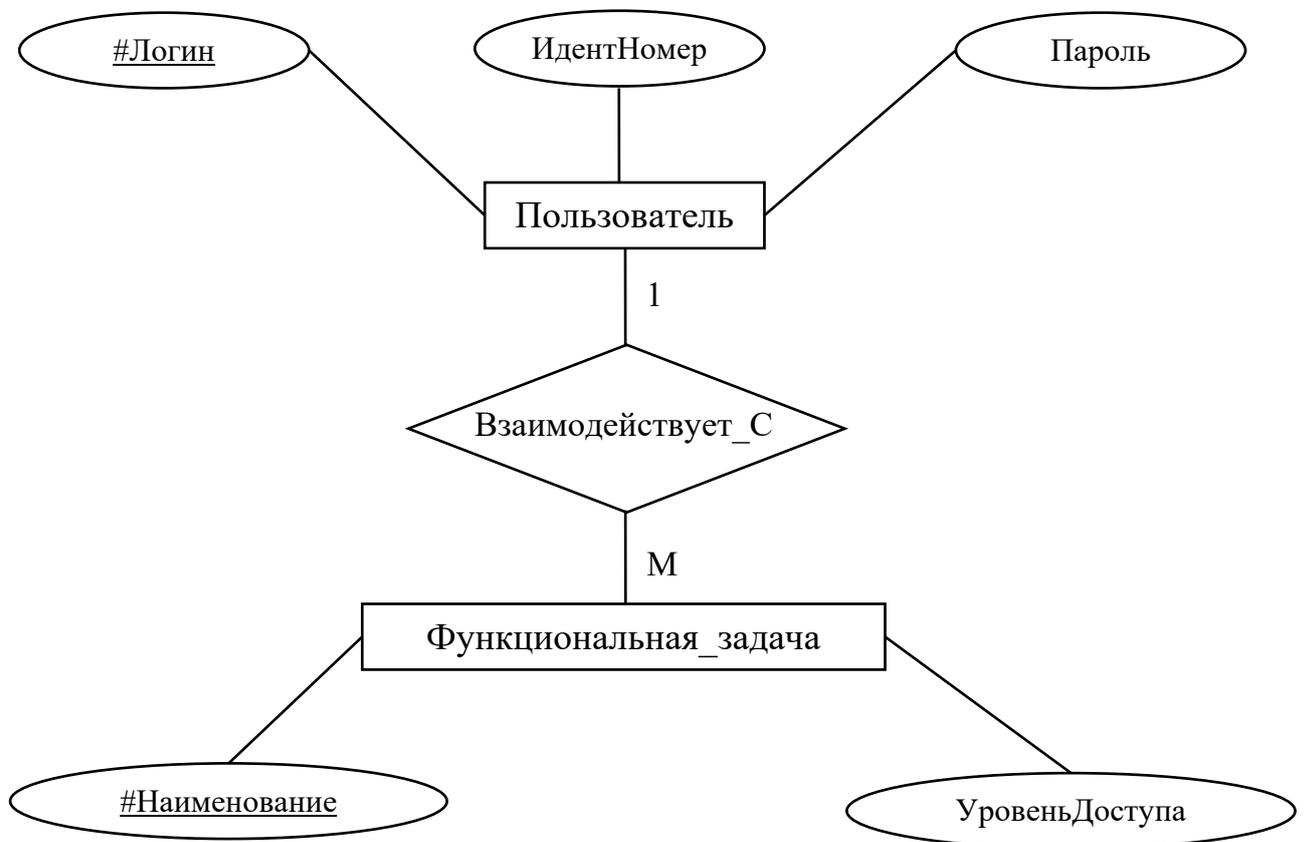


Рисунок 30 – ER-диаграмма базы данных "БД\_Пользователи"

Вторая база данных – "БД\_Административное\_Управление", содержит структурированную информацию, необходимую для административного управления научным исследованием или технологическим процессом. Проанализировав административные функциональные задачи (учет образцов, материалов и ресурсов; анализ данных; создание отчетов и др.), возникающие в ходе научных исследований и реализации технологических процессов, были установлены следующие положения, лежащие в основе рассматриваемой базы данных.

Осуществление любого научного исследования (или технологического процесса) связано с выполнением теми или иными сотрудниками определенных видов деятельности, характеризующихся описанием, наименованием, используемым оборудованием, временем исполнения и результатом. Таким образом, первой сущностью рассматриваемой базы данных является "Деятельность".

В свою очередь, каждая деятельность, сопровождается расходом материальных ресурсов (различного рода заготовок, микро- и макрообразцов, реагентов, топлива, электроэнергии и т.д.). Следует отметить, что при управлении научными исследованиями или технологическими процессами контроль расхода ресурсов, их нормирование, занимает особое место, поскольку именно от качества данной деятельности зависит себестоимость осуществляемой деятельности.

К особой категории ресурсов относятся микро- и макрообразцы исследуемых мультифрактальных объектов различных порядков сложности. Действительно, в ходе выполнения научного исследования и технологического процесса различными группами пользователей (учеными, инженерами и др.) приходится производить неоднократные экспериментальные воздействия на образцы мультифракталов. При этом наряду с информацией об их перемещении, складировании и технологии производства требуется наличие структурированных данных о первичных результатах экспериментальных исследований данных образцов (микрофотографии структуры, рентгенограммы и др.) и самое главное – о значениях установленных физических величин. С одной стороны это позволит разным группам пользователей не повторять одни и те же экспериментальные

исследования над используемыми образцами, а с другой – исключить возможность появления нерелевантных результатов опытов, получаемых в результате неконтролируемого воздействия на рассматриваемые экземпляры мультифрактальных объектов. Таким образом, к следующим сущностям, лежащим в основе рассматриваемой базы данных, следует отнести "Материальный ресурс", "Образец\_мультифрактала", "Результат\_исследований" и "Физическая\_величина".

И наконец, заключительная сущность связана с пользователями системы, и именуется "Сотрудники". Данная сущность характеризуется идентификационным номером, фамилией, именем, отчеством, должностью, адресом электронной почты и телефоном.

В итоге, анализируя приведенные положения, получим следующую ER-диаграмму для базы данных "БД\_Административное\_Управление" (рисунок 31). Заключительная база данных – "БД\_Свойства\_Мультифракталов" – содержит всю необходимую информацию для решения основных функциональных задач: определения деформационных, тепло- и электропроводных свойств мультифрактальных объектов, а также установления величины внешнего поля напряжений, действующего на исследуемый мультифрактал четвертого или пятого порядка сложности. Согласно разработанному каркасу математического обеспечения в качестве такой информации выступают: 1) исходные данные о фрактальной неоднородности, к которым относятся: тензор модулей упругости, тензорный коэффициент теплопроводности, тензор удельной электропроводности, предел прочности, а также литературные и другие источники, из которых взяты значения данных величин; 2) данные об отношениях между мультифрактальными объектами первого и четвертого порядков сложности в условиях отсутствия микро- и макровключений.

В итоге, воспользовавшись методиками моделирования получим ER-диаграмму базы данных "БД\_Свойства\_Мультифракталов" (рисунок 32).

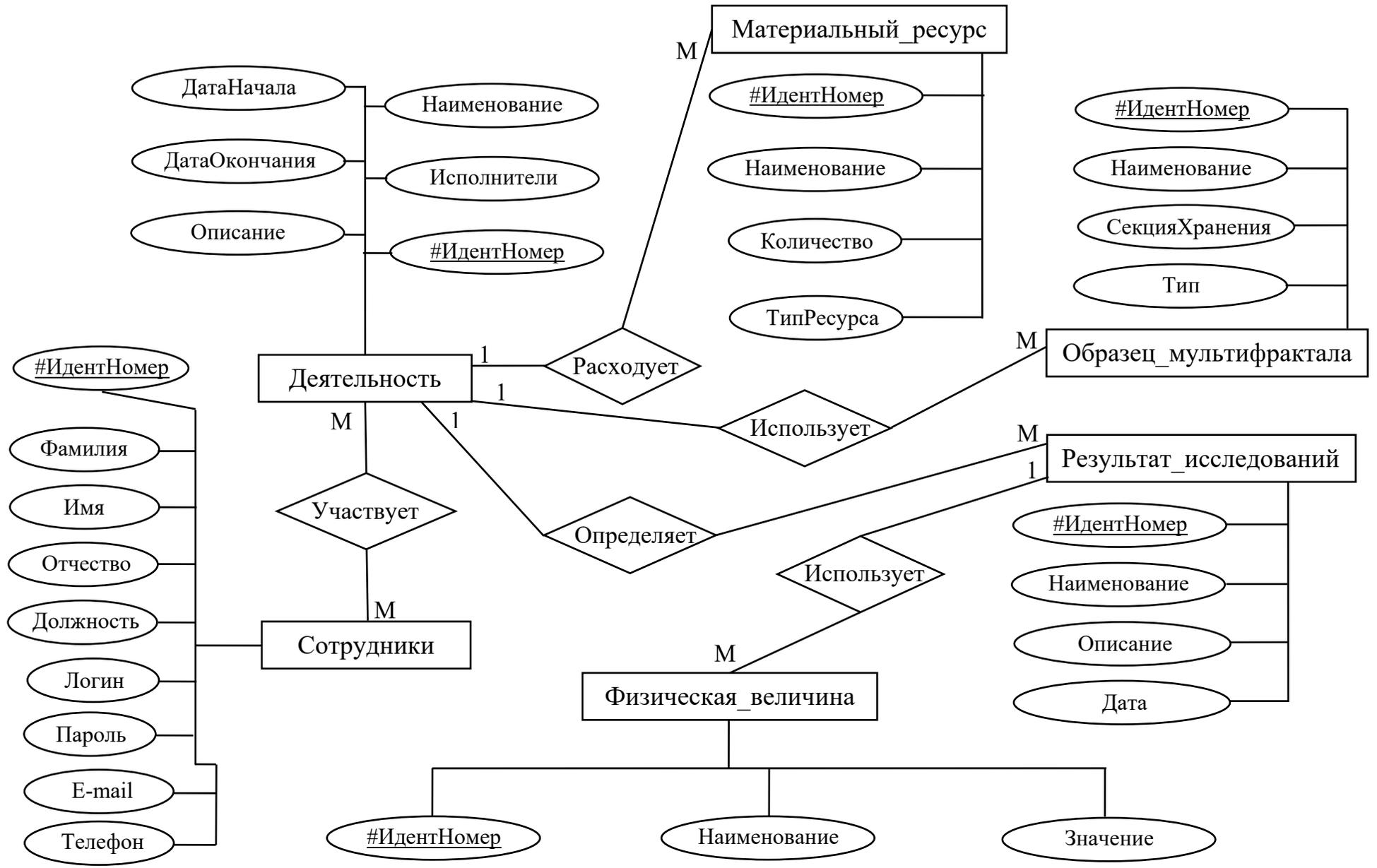


Рисунок 31 – ER-диаграмма для базы данных "БД\_Административное\_Управление"

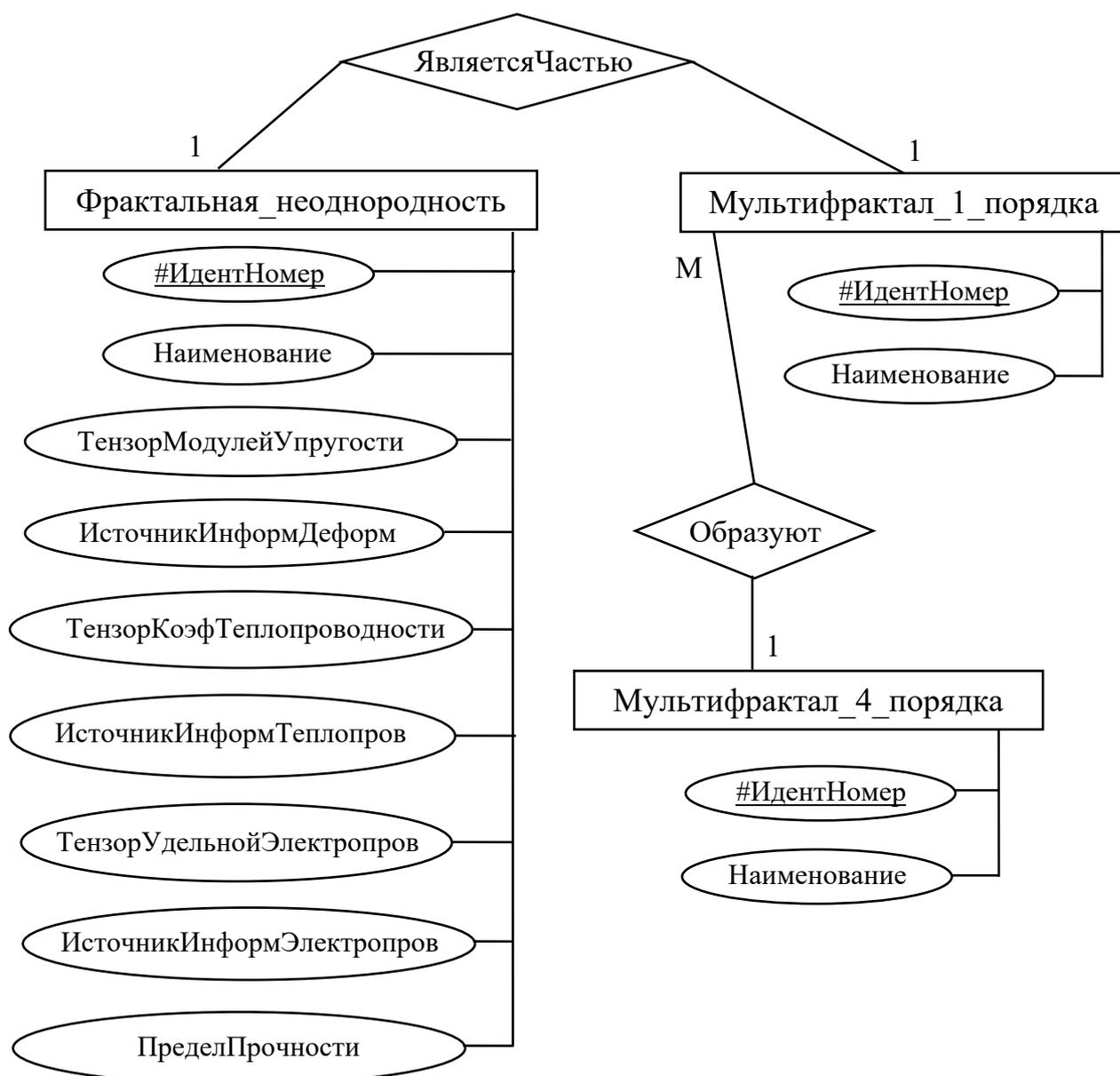


Рисунок 32 – ER-диаграмма базы данных "БД\_Свойства\_Мультифракталов"

### 3.3. Высокоуровневый каркас программного обеспечения АСНИ и АСУ ТП

Полученные результаты позволяют перейти к следующим этапам – разработке архитектуры высокоуровневого каркаса ПО (программного фреймворка) АСНИ и АСУ ТП и ее последующей реализации и тестировании. Проводя анализ разработанных каркасов математического и информационного видов обеспечения АСНИ и АСУ ТП, получим на верхнем уровне следующую архитектуру высокоуровневого каркаса программного обеспечения (рисунок 33),

реализованную с помощью среды разработки Embarcadero C++ Builder 10.3.

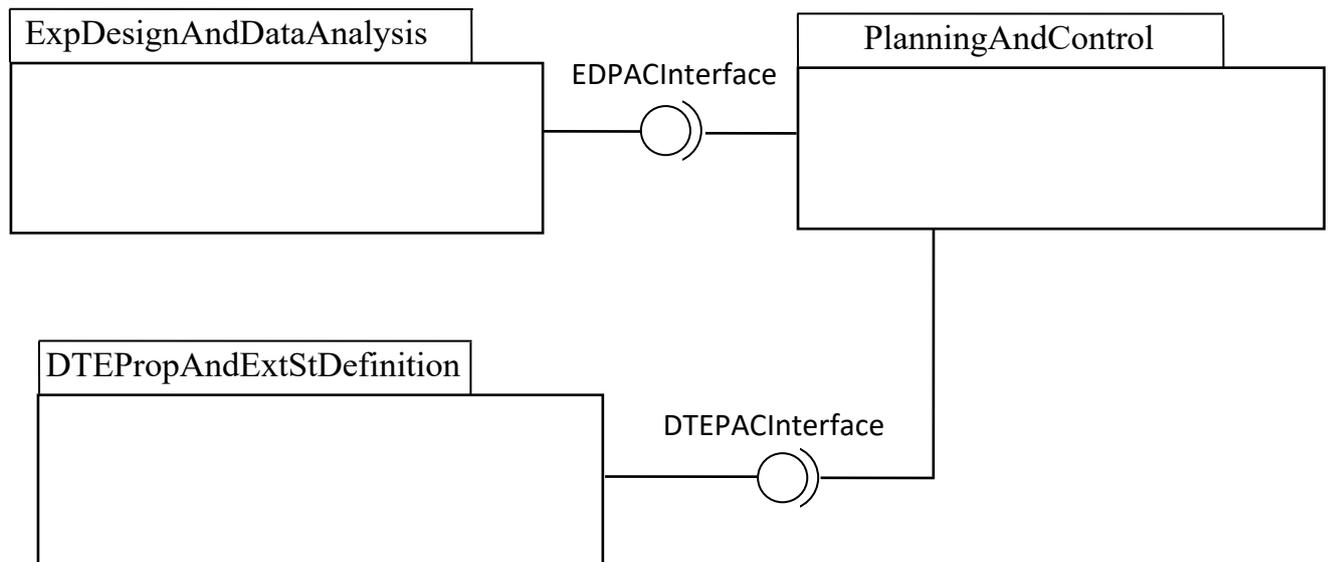


Рисунок 33 – Архитектура высокоуровневого каркаса ПО АСНИ и АСУ ТП

В представленную архитектуру входит три пакета классов – "ExpDesignAndDataAnalysis", "PlanningAndControl", "DTEPropAndExtStDefinition", предназначенных для автоматизации функциональных задач АСНИ и АСУ ТП. Взаимодействие данных пакетов между собой осуществляется посредством смешанных интерфейсов "EDPACInterface", "DTEPACInterface".

Рассмотрим первый пакет предлагаемого высокоуровневого каркаса программного обеспечения – "ExpDesignAndDataAnalysis". Он содержит классы, коллективное взаимодействие которых позволяет осуществлять функциональную задачу анализа данных. Детализированная архитектура данного пакета представлена на рисунке 34. Данная архитектура состоит из семи классов: "PhysicalValue" (Физическая величина), "ExperimentalActivity" (Экспериментальная деятельность), "MultifractalFirst" (Мультифрактал первого порядка), "Fractal" (Фрактальная неоднородность), "MultifractalSecond" (Мультифрактал второго порядка), "MultifractalThird" (Мультифрактал третьего порядка) и "ControlED". Здесь и далее, не теряя общности, методы чтения и модификации значений свойств классов, как и параметры в заголовках методов на приводимых моделях классов пакетов и подсистем, приводиться не будут.

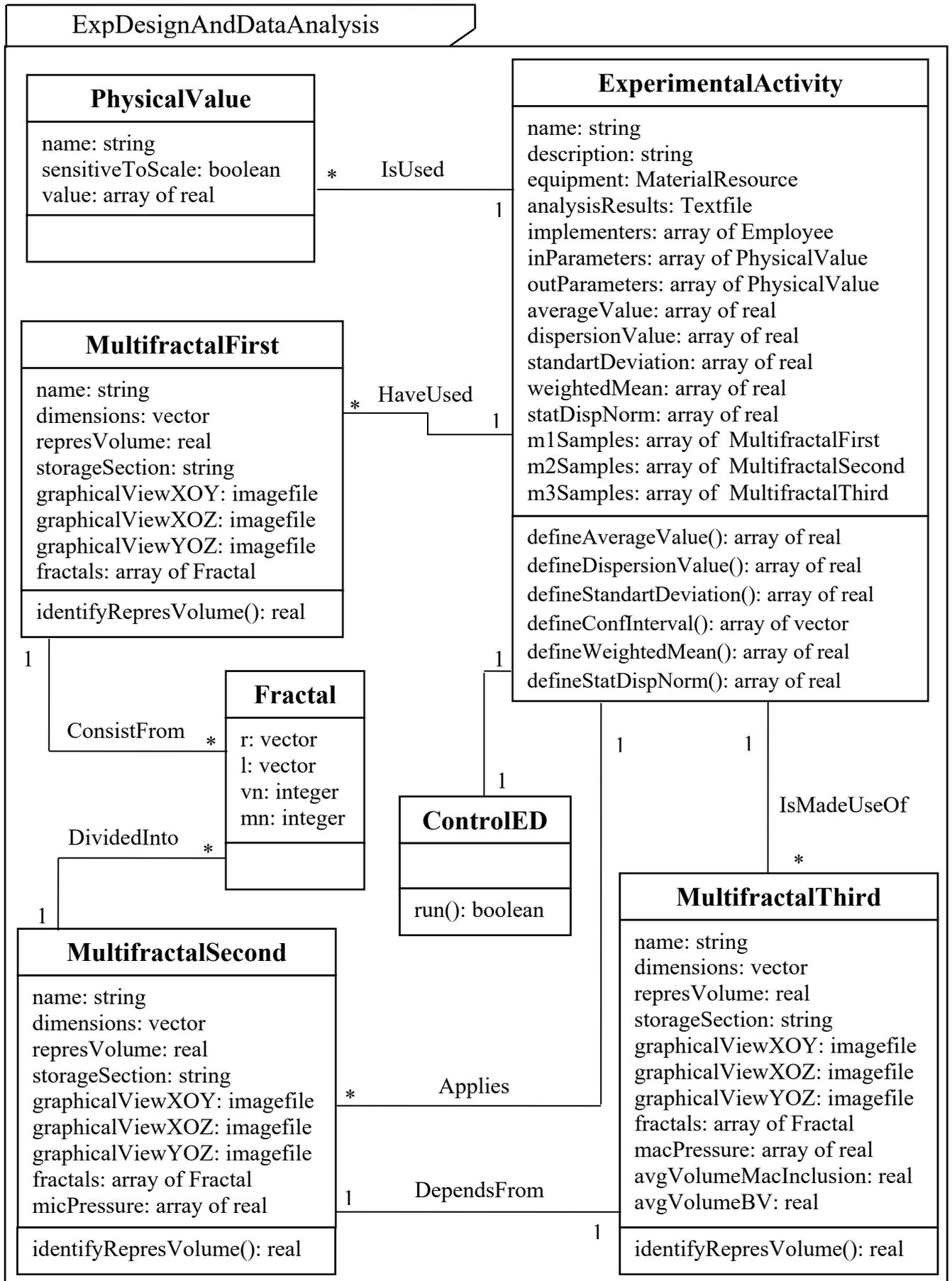


Рисунок 34 – Архитектура пакета классов "ExpDesignAndDataAnalysis"

Ассоциации "ConsistFrom" (Состоит из) и " DividedInto" (Делится На) между классами "MultifractalFirst", "Fractal", "MultifractalSecond" указывает на то, что мультифракталы первого и второго порядков сложности образуются за счет фрактальных неоднородностей, отличающихся радиусом-вектором (свойство "r"), характеристическим вектором (свойство "l"), номерами строк и столбцов в структурной матрице (свойства "vn" и "mn").

Конструкторы классов "MultifractalFirst", "MultifractalSecond" и "MultifractalThird" инициализируют свойства создаваемых ими объектов значениями из базы данных "БД\_Административное\_Управление" (сущность "ОбразецМультифрактала"). К инициализируемым таким способом свойствам следует отнести: "name" (название), "dimensions" (размеры), "storageSection" (секция хранилища), "micPressure" (давления в микровключениях), "macPressure" (давления в макровключениях), а также атрибуты – "graphicalViewXOY", "graphicalViewXOZ" и "graphicalViewYOZ" – изображения графического вида мультифрактала в плоскостях XOY, XOZ и YOZ.

В свою очередь значения свойств "represVolume" (представительный объем), "avgVolumeMacInclusion" (средний объем микровключения) и "avgVolumeBV" (средний объем блока Вороного) рассчитываются в рамках метода "identifyRepresVolume()", реализуемого на основе алгоритма (представленного в четвертой главе) и позволяющего для каждого экземпляра соответствующих классов установить величину представительного объема. Впоследствии значения данных свойств записываются в базу данных "БД\_Административное\_Управление".

Одним из главных классов в представленной архитектуре является "ExperimentalActivity", он характеризуется свойствами, отвечающими за: наименование и описание деятельности экспериментального характера ("name" и "description"), применяемое оборудование ("equipment"), получаемые результаты ("analysisResults"), задействованных исполнителей ("implementers"), используемые входные и выходные величины ("inParameters" и "outParameters"). Кроме того, для каждого полученного в результате экспериментальной деятельности выходного

параметра определяются среднее значение ("averageValue"), дисперсия ("dispersionValue"), стандартное отклонение ("standartDeviation"), величина взвешенного среднего ("weightedMean"), используемая при определении наилучшей оценки физической величины, полученной с помощью различного оборудования, а также значение  $\chi^2$ -критерия ("statDispNorm").

Управляющим классом в рассматриваемой архитектуре является "ControlED". По этой причине рассмотрим алгоритм метода "ControlED.run()". Алгоритм данного метода в рамках концепций UML можно представить в виде следующей диаграммы деятельности (рисунки 35-37).

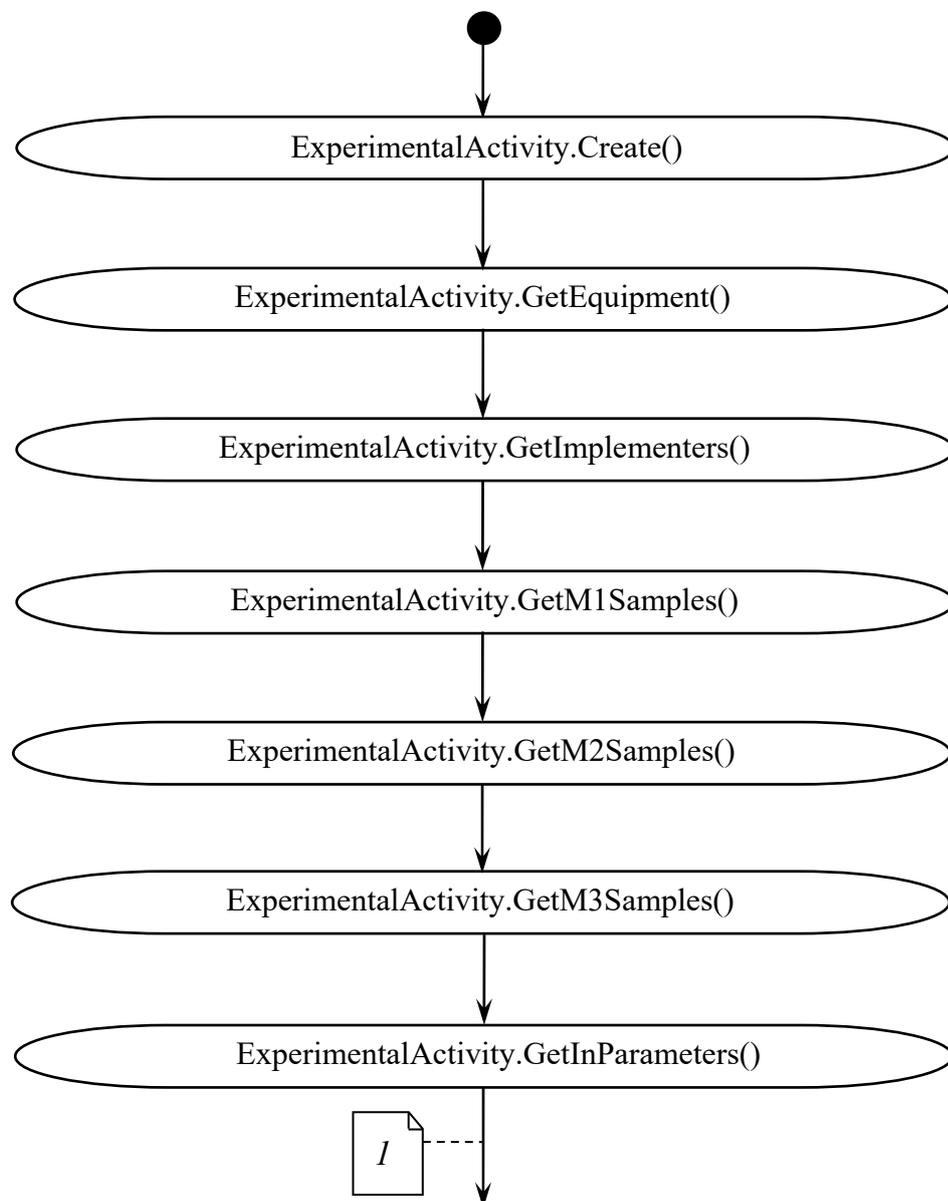


Рисунок 35 – Диаграмма деятельности метода "ControlED.run()" (начало)

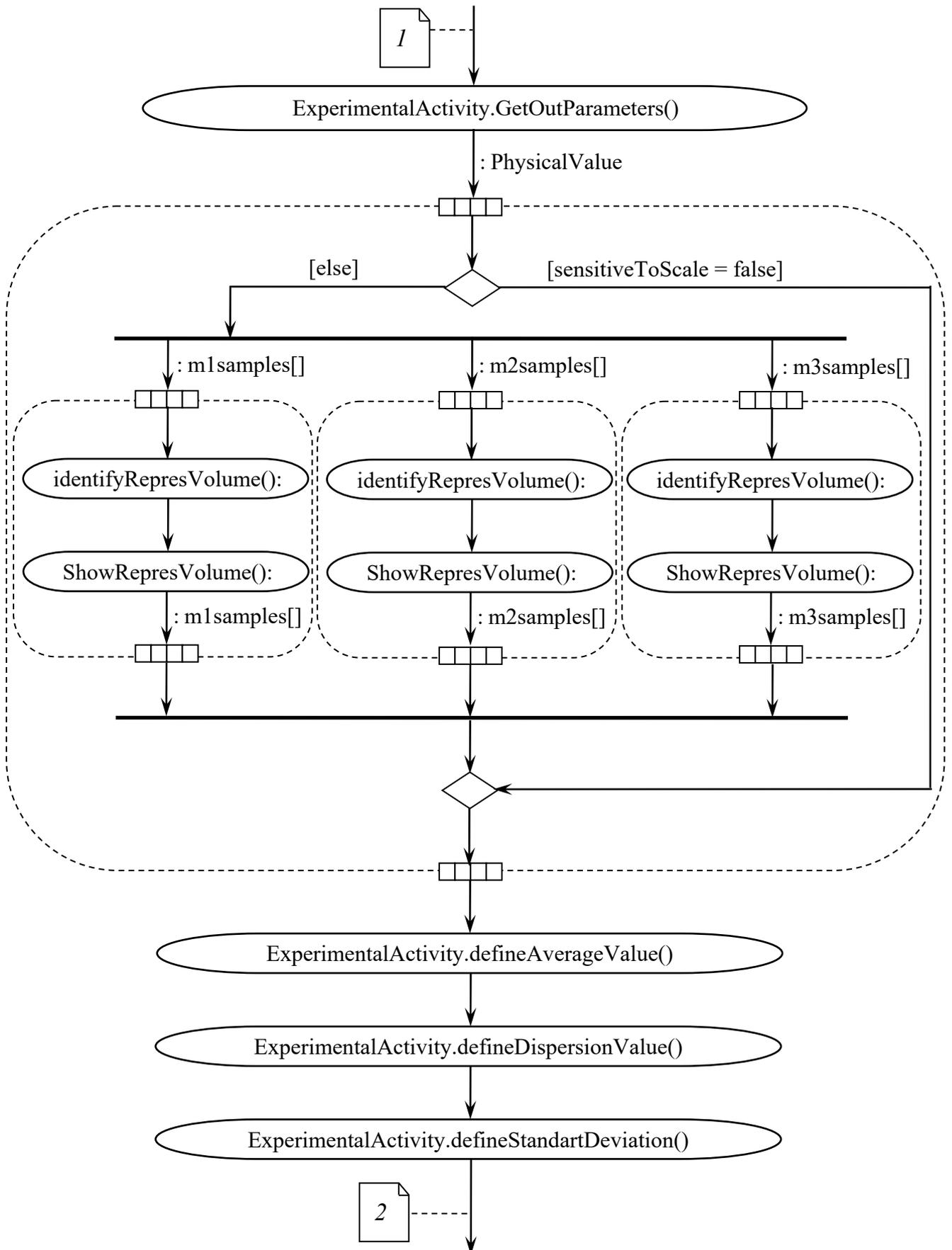


Рисунок 36 – Диаграмма деятельности метода "ControlED.run()" (продолжение)

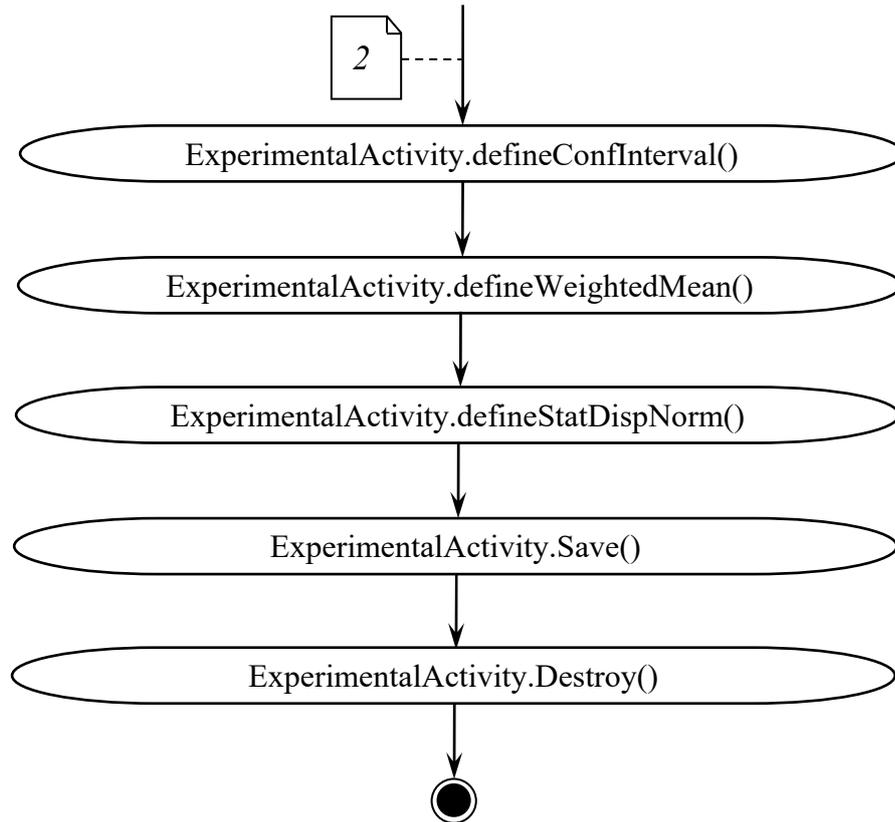


Рисунок 37 – Диаграмма деятельности метода "ControlED.run()" (окончание)

Приведем пояснения к данной диаграмме. Выполнение метода начинается с создания экземпляра класса "ExperimentalActivity", включающего инициализацию всех начальных значений атрибутов из "БД\_Административное\_Управление". Далее посредством методов, использующих интерфейс "EDPACInterface", инициализируются свойства "equipment", "implementers", "m1Samples", "m2Samples" и "m3Samples" созданного объекта класса "ExperimentalActivity". После этого с помощью методов "GetInParameters()" и "GetOutParameters()" для рассматриваемого объекта устанавливается массив используемых входных и выходных величин – объектов "PhysicalValue". Далее для каждой физической величины, в зависимости от того на основе какого образца она установлена, определяется ее чувствительность к масштабному эффекту (свойство "sensitiveToScale"). Если такая зависимость наблюдается, то для всех исследуемых образцов определяется величина представительного объема. После этого оставшиеся методы "defineAverageValue()", "defineDispersionValue()", "defineStandartDeviation()", `defineConfInterval()`, `defineWeightedMean()` и

"defineStatDispNorm()" определяют такие стохастические характеристики случайных результатов опыта как среднее значение, дисперсия, стандартное отклонение, значения доверительного интервала при небольшом количестве измерений, взвешенного среднего как наилучшей оценки физической величины в различных опытах, а также величину  $\chi^2$ -критерия. Алгоритмы реализации данных методов подробно описаны в [61, 227].

И в завершение выполнения рассматриваемого алгоритма, полученные результаты сохраняются в "БД\_Административное\_Управление" (за это отвечает метод "Save()"), а созданный экземпляр класса "ExperimentalActivity" деинициализируется деструктором "Destroy()".

Перейдем к следующему пакету классов – "PlanningAndControl". Он является сервисным, обеспечивает взаимодействие всех представленных в архитектуре пакетов и служит для выполнения функций аутентификации пользователей, планирования задач и событий, резервного копирования и восстановления данных, формирования отчетов, осуществления учета материалов и ресурсов (учет образцов, расходных материалов и др.). Данный пакет состоит из следующих классов: "Employee" (Сотрудники), "AdministrativeActivity" (Административная деятельность), "PhysicalValueM" (Физическая величина), "MaterialResource" (Материальный ресурс), "SampleMultifractal" (Образец мультифрактала) и "ControlPAC".

Детализированную архитектуру, объединяющую данные классы в единый пакет, можно представить в следующем виде (рисунок 38).

Рассмотрим данную архитектуру более подробно. Каждый из классов в составе анализируемого пакета обеспечивает доступ к полям соответствующих таблиц из базы данных "БД\_Административное\_Управление". Также необходимо отметить, что в состав большинства представленных классов входят свойство "labelsReport". Оно отвечает за формирование различного рода отчетов, представляемых в различных форматах.

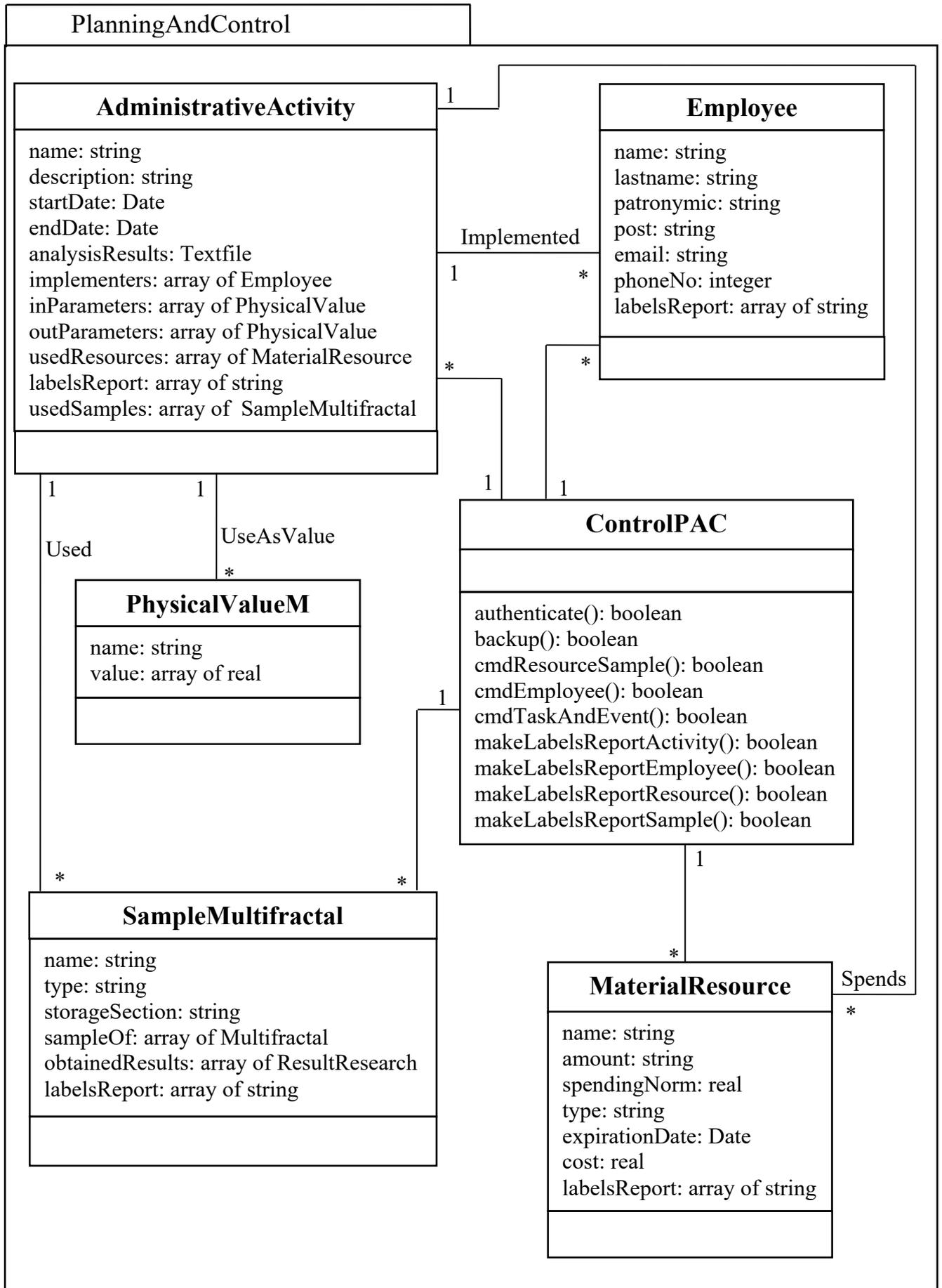


Рисунок 38 – Архитектура пакета классов "PlanningAndControl"

Управляющим классом в рассматриваемой программной архитектуре является "ControlPAC". Метод `authenticate()` отвечает за аутентификацию пользователей, `backup()` – за резервное копирование и восстановление данных. В свою очередь методы `cmdTaskAndEvent()`, `cmdResourceSample()`, `cmdEmployee()` полностью решают вопросы добавления, модификации и удаления информации из базы данных "БД\_Административное\_Управление", тем самым давая возможность выполнить такие административные функциональные задачи как планирование задач и событий, учет образцов и расходных материалов. Оставшиеся методы служат для формирования различного рода отчетов по таблицам из используемой базы данных.

Таким образом, можно сделать вывод, что архитектура рассматриваемого пакета является репозиторной, т.е. построенной вокруг данных [180], и служит для предоставления унифицированного интерфейса для доступа к базе данных "БД\_Административное\_Управление". Поведение управляющего класса "ControlPAC" не изменяет структуру этой базы данных, а лишь обеспечивает контроль функций добавления, удаления, обновления и форматирования соответствующей структурированной информации. Поскольку алгоритмы методов подобного рода классов не обладают большой степенью сложности и являются стандартными для многих приложений, мы не будем подробно на них останавливаться.

Перейдем к следующему пакету классов – "DTEPropAndExtStDefinition". Классы данного пакета отвечают за такие специализированные функциональные задачи АС как определение деформационных, тепло- и электропроводных свойств мультифрактальных объектов различного порядка сложности, а также установление величины внешнего поля напряжений, действующего на исследуемые объекты. Детализированная архитектура данного пакета представлена на рисунках 39 и 40. Представленная детализированная архитектура состоит из девяти классов. Первый из них – "Fractal", описывает фрактальные неоднородности.

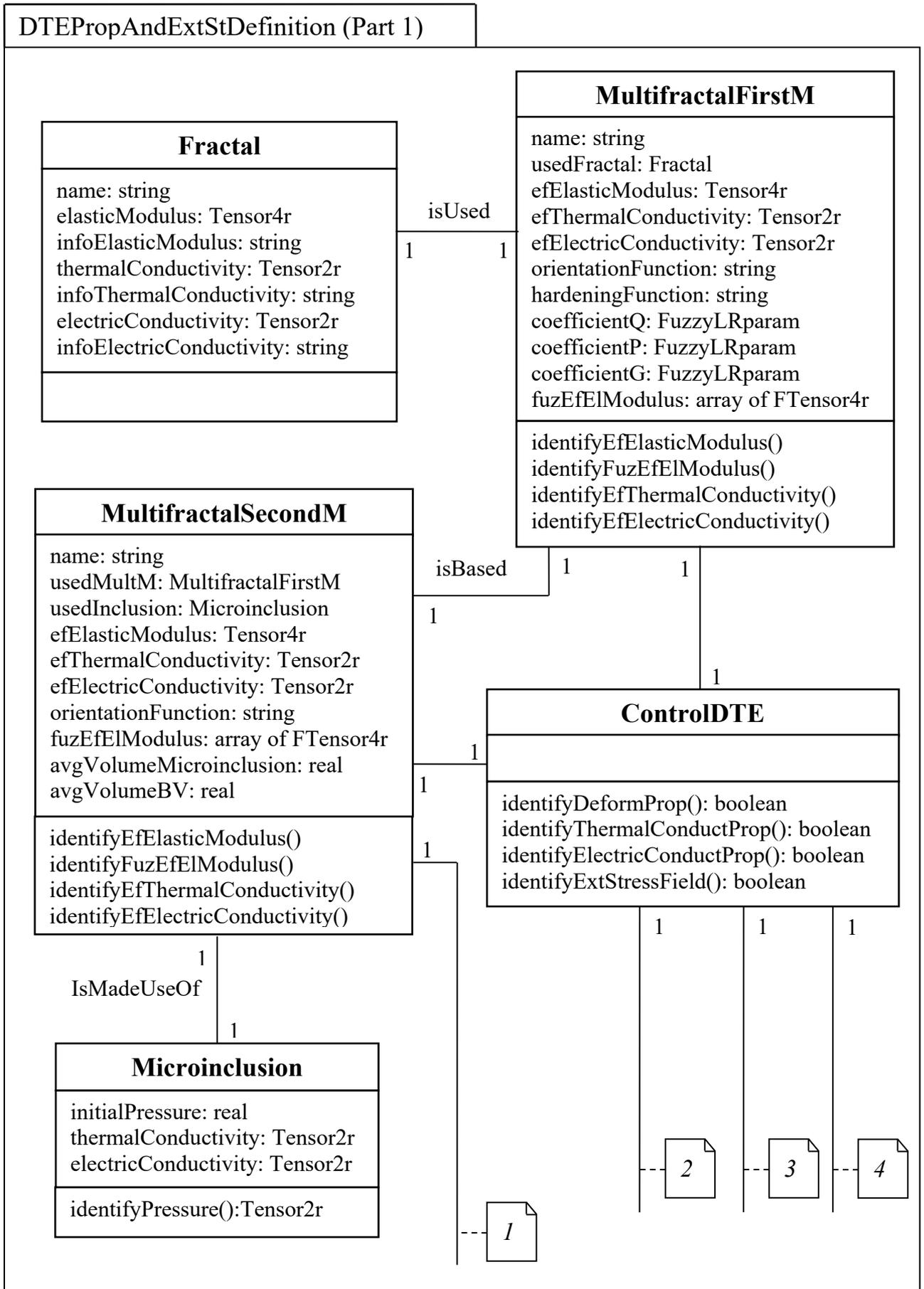


Рисунок 39 – Архитектура пакета классов "DTEPropAndExtStDefinition" (Часть 1)

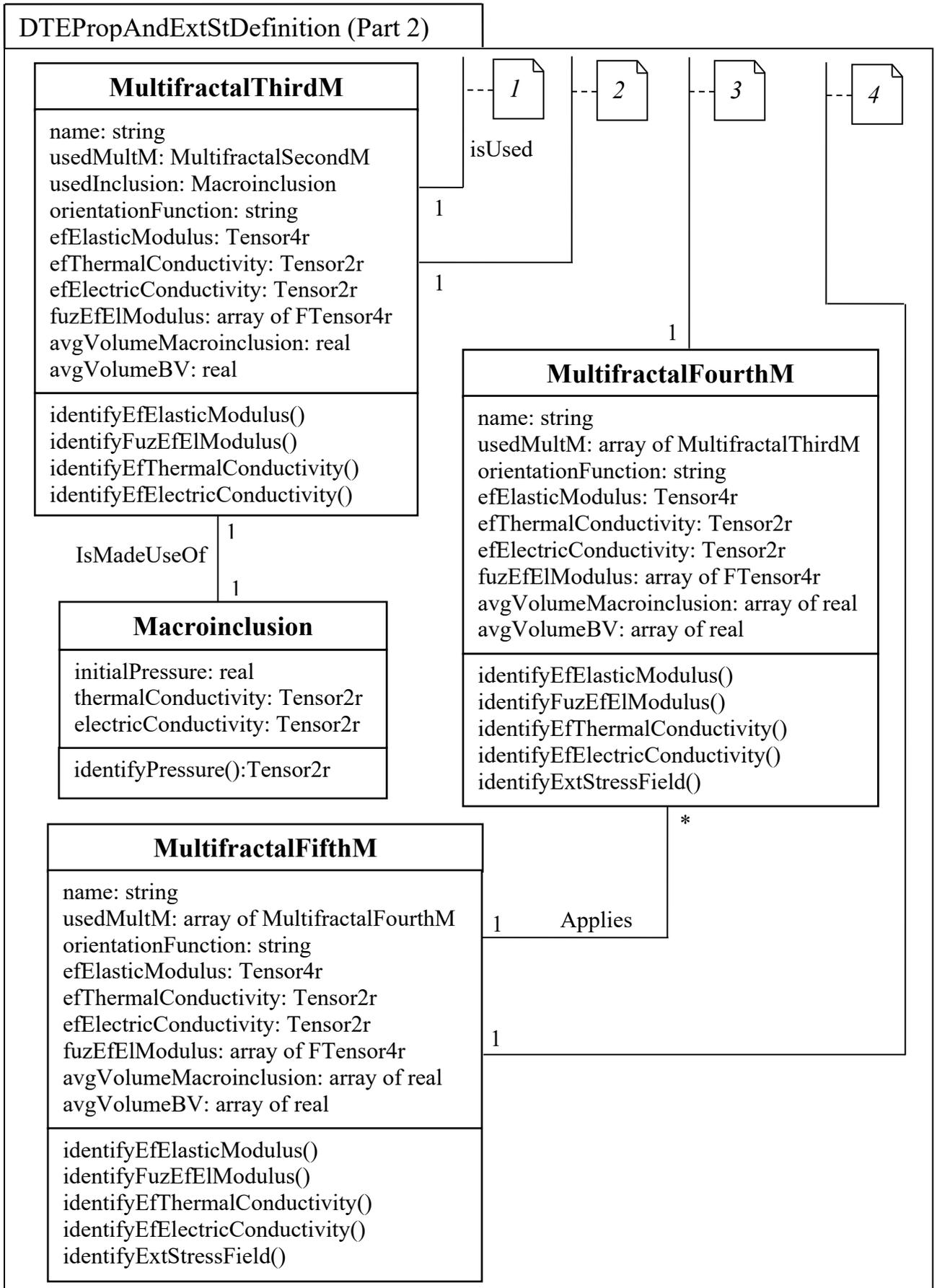


Рисунок 40 – Архитектура пакета классов "DTEPropAndExtStDefinition" (Часть 2)

Экземпляры классов "Microinclusion" и "Macroinclusion" отражают свойства микро- и макровключений, входящих в состав мультифрактальных объектов. "ControlDTE" – управляющий класс, отвечающий за функционирование всего рассматриваемого пакета.

Оставшиеся классы "MultifractalFirstM", "MultifractalSecondM", "MultifractalThirdM", "MultifractalFourthM" и "MultifractalFifthM" отвечают за представление мультифрактальных объектов первого, второго,..., пятого порядков сложности. В состав каждого из данных классов обязательно входят методы "identifyEfElasticModulus()", "identifyFuzEfElModulus()", "identifyEfThermalConductivity()", "identifyEfElectricConductivity()", отвечающие соответственно за определение эффективного тензора модулей упругости (в четком и нечетком видах), тензорных коэффициентов тепло- и электропроводности. В свою очередь определение внешнего поля напряжений для мультифрактальных объектов четвертого и пятого порядков сложности производится в рамках методов "identifyExtStressField()".

Порядок вызова всех вышеперечисленных методов классов рассматриваемого пакета, а также способ обработки получаемых с их помощью результатов регулируется экземпляром управляющего класса "ControlDTE". Алгоритмы функций-членов этого класса полностью были описаны ранее в данной главе при разработке каркаса математического обеспечения АСНИ и АСУ ТП.

Итак, в результате реализации стадий предложенного каркасного метода разработки получен программный фреймворк, детализация которого позволяет спроектировать и реализовать программное обеспечение АСНИ, АСУ ТП и других систем, функциональные задачи которых связаны с определением напряженно-деформированного состояния, коэффициентов тепло- и электропроводности, моделированием разрушения различного рода объектов мультифрактальной структуры, аутентификации, резервного копирования данных и других административных подзадач.

## **4. РАЗРАБОТКА АСНИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА И АСУ ТП ЗАБИВКИ СВАЙ В ОПОЛЗНЕОПАСНЫХ УЧАСТКАХ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ**

Разработанный высокоуровневый программный фреймворк позволяет проектировать и реализовывать различные АС в горной промышленности. В рамках сформулированных задач исследований перейдем к построению АСНИ физических процессов горного производства. В соответствии с предложенным каркасным методом разработка рассматриваемой АСНИ осуществляется в рамках стадий, представленных в правой части потока управления (рисунок 1). На первой из них производится формулирование концепции АС, т.е. определяются цели разрабатываемой системы, приводится ее описание, включающее информацию о каркасном взаимодействии и характеристиках ТО АС.

### **4.1. Формулирование концепции АСНИ физических процессов горного производства**

АСНИ физических процессов горного производства предназначена для получения новых знаний о геоматериалах путем планирования, реализации, анализа и управления экспериментальными и теоретическими исследованиями. К основным функциональным задачам разрабатываемой АСНИ относятся: определение деформационных, тепло- и электропроводных свойств геоматериалов с учетом масштабного эффекта; установление значений внешнего поля напряжений, действующего на породный массив с учетом масштабного эффекта; разработка математических моделей разрушения геоматериалов. Все основные функциональные задачи, кроме последней, полностью покрываются сервисами разработанного ранее высокоуровневого каркаса программного обеспечения. В свою очередь, к административным функциональным задачам разрабатываемой АСНИ можно отнести: анализ данных; учет материалов и ресурсов; планирование задач и событий; создание отчетов; аутентификация пользователей; резервное

копирование и восстановление данных; управление научными проектами и задачами; ведение электронного лабораторного журнала. Из данных функциональных задач, только последние две требуют определения, остальные – полностью покрываются сервисами разработанного высокоуровневого программного фреймворка.

Применение предлагаемой АСНИ должно позволить повысить эффективность и качество инновационных решений в области совершенствования технологических процессов в горной промышленности. В виду преимущественного использования в отечественных научных исследованиях физических процессов горной промышленности операционных систем на платформе Windows, в качестве графического интерфейса пользователя необходимо воспользоваться программным стеком WAMP. В качестве точек расширения планируется использовать программные объекты, разработанные на языках программирования C++, PHP, Javascript и обеспечивающие обработку событий графического интерфейса пользователя.

В рамках разрабатываемого проекта планируется использовать стандартное серийное техническое оборудования, в качестве которого планируется использовать ПЭВМ и цифровой оптический микроскоп, для анализа структуры и текстуры геоматериалов. Взаимодействие ПЭВМ и цифрового оптического микроскопа должно осуществляться в рамках сетей типа LAN. Все условия использования ПЭВМ должны соответствовать санитарно-эпидемиологическим правилам и нормативам РФ.

#### **4.2. Формулирование требований к функциональным задачам АСНИ физических процессов горного производства**

Перейдем к следующей стадии разработки – формулированию требований к рассматриваемой АСНИ. В соответствии с предложенным каркасным методом разработки на данной стадии производится построение и описание диаграммы вариантов использования. При этом описание вариантов использования

осуществляется в контексте взаимодействия сущностей системы с разработанным ранее высокоуровневым каркасом ПО.

Воспользовавшись языком UML получим следующую диаграмму вариантов использования (рисунок 41).

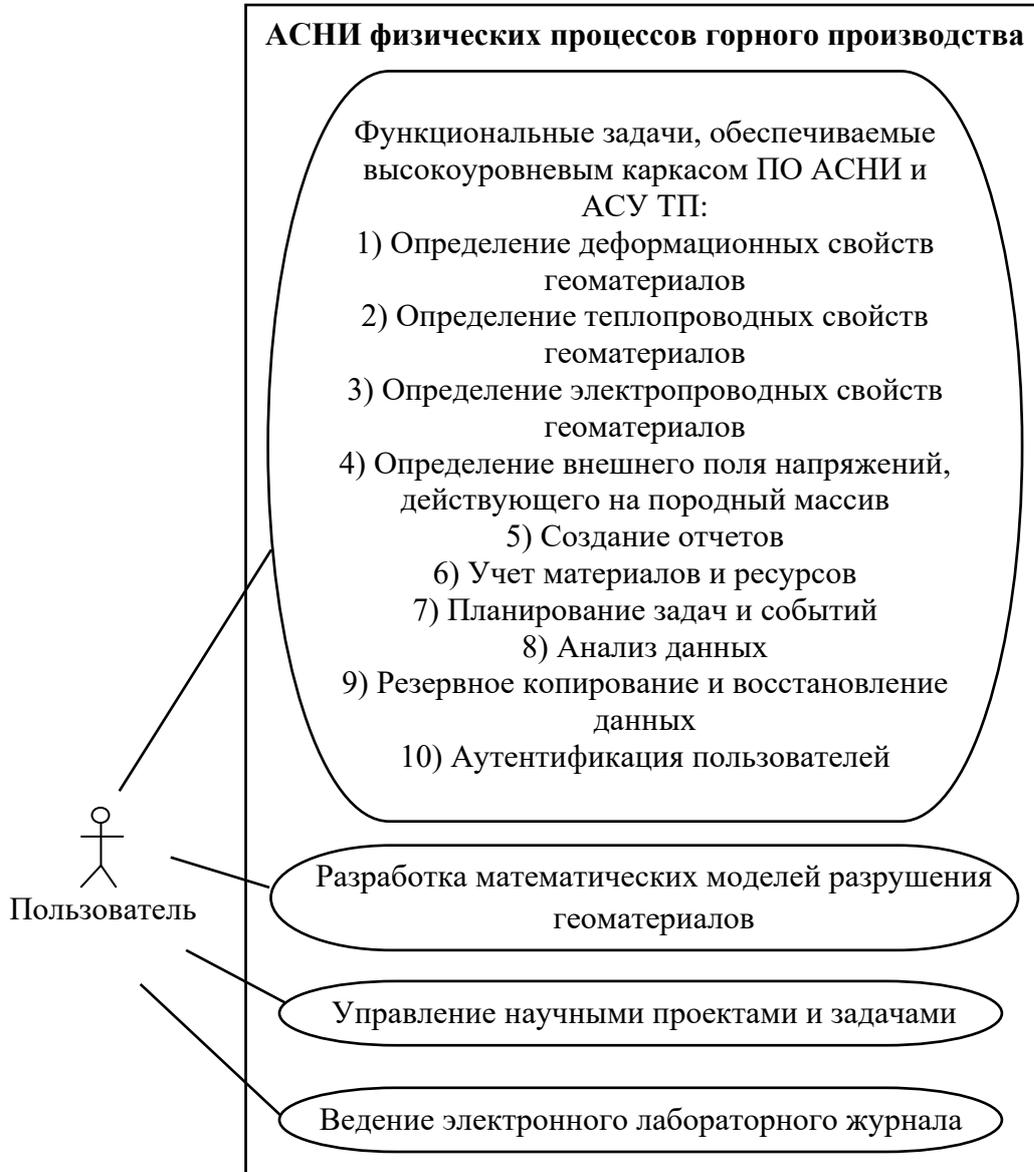


Рисунок 41 – Диаграмма вариантов использования АСНИ физических процессов горного производства

Как следует из представленной диаграммы каждому варианту использования сопоставляется функциональная задача. При этом в качестве действующего лица в данной диаграмме используется пользователь системы, в качестве которого выступает любой сотрудник научной организации или

подразделения, участвующий в процессе научных исследованиях.

Так как большинство функциональных задач рассматриваемой АСНИ совпадают с задачами полученного программного фреймворка (отличие состоит только в использовании геоматериалов в качестве мультифрактальных объектов), разработаем сценарии для вариантов использования «Разработка математических моделей разрушения геоматериалов», «Управление научными проектами и задачами» и «Ведение электронного лабораторного журнала».

*Вариант использования «Разработка математических моделей разрушения геоматериалов».*

Действующее лицо: Пользователь.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет выбрать теорию, использование которой позволит для решаемой прикладной задачи горного производства разработать математическую модель разрушения геоматериалов, обладающую наивысшей степенью количественной адекватности.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда пользователю потребовалось разработать математическую модель разрушения геоматериалов.

1. Пока теория моделирования не установлена

1.1. Экспертная система, входящая в состав ПО АСНИ, запрашивает у пользователя данные о строении геоматериала и (или) задает различные уточняющие вопросы, определяющие область применимости разрабатываемой математической модели.

1.2. Экспертная система, входящая в состав ПО АСНИ, с помощью соответствующего механизма логического вывода определяет теорию моделирования.

1.3. Пользователю выводится информация с теорией моделирования, рекомендованной экспертной системой.

*Альтернативные потоки.*

Отсутствуют.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Вариант использования «Управление научными проектами и задачами».*

Действующее лицо: Пользователь.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет управлять научными проектами и задачами.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда пользователю потребовалось добавить, редактировать, удалить или просмотреть данные о научных проектах и задачах.

1. Пользователю показывается графическое окно с возможностью выбора необходимых действий – добавление, редактирование, удаление или просмотр данных о научных проектах и задачах.
2. Если пользователь выбрал добавление научного проекта или задачи
  - 2.1. Пользователь вводит необходимые данные: наименование, цель, бюджет, руководитель, ответственный исполнитель, или исполнитель (в случае выбора – задачи).
  - 2.2. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и добавляет необходимую запись.
3. Если пользователь выбрал редактирование научного проекта или задачи
  - 3.1. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и загружает необходимую запись в графическое окно пользователя.
  - 3.2. Пользователь исправляет соответствующие данные.
  - 3.3. ПО АСНИ обновляет запись в соответствующей базе данных.

4. Если пользователь выбрал удаление научного проекта или задачи

4.1. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и загружает все записи в графическое окно пользователя.

4.2. Пользователь выбирает удаляемую запись.

4.3. ПО АСНИ удаляет запись в соответствующей базе данных.

5. Если пользователь выбрал просмотр научного проекта или задачи

5.1. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и загружает все записи в графическое окно пользователя.

*Альтернативные потоки.*

А.2.1 и А.3.2. Вводимые данные некорректны.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что при вводе некорректных данных в поля редактирования, характеризующих научный проект или задачу, то ПО АСНИ выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

А.2.2, А.3.1., А.4.1. и А.5.1. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что ПО АСНИ не может подключиться к базе данных, содержащей необходимую информацию, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей» для пользователя, наделенного соответствующими полномочиями в части доступа к рассматриваемому варианту использования.

*Постусловия.*

Отсутствуют.

*Вариант использования «Ведение электронного лабораторного журнала».*

Действующее лицо: Пользователь.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет работать с электронным лабораторным журналом.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда пользователю потребовалось добавить, редактировать, удалить или просмотреть записи электронного лабораторного журнала.

1. Пользователю показывается графическое окно с возможностью выбора необходимых действий – добавление, редактирование, удаление или просмотр записей электронного лабораторного журнала.

2. Если пользователь выбрал добавление записи в журнал

2.1. Пользователь вводит необходимые данные: наименования научного проекта и задачи; наименование, описание и вид деятельности (экспериментальная или теоретическая), используемые входные данные, файлы анализа полученных результатов и моделирующей программы.

2.2. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и добавляет необходимую запись.

3. Если пользователь выбрал редактирование записи в электронном лабораторном журнале.

3.1. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и загружает необходимую запись в графическое окно пользователя.

3.2. Пользователь исправляет соответствующие данные.

3.3. ПО АСНИ обновляет запись в соответствующей базе данных.

4. Если пользователь выбрал удаление записи в электронном лабораторном журнале.

4.1. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и загружает все записи в графическое окно пользователя.

4.2. Пользователь выбирает удаляемую запись.

4.3. ПО АСНИ удаляет запись в соответствующей базе данных.

5. Если пользователь выбрал просмотр электронного лабораторного журнала.

5.1. ПО АСНИ подключается к соответствующей базе данных и загружает все

записи в графическое окно пользователя.

*Альтернативные потоки.*

А.2.1 и А.3.2. Вводимые данные некорректны.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что при вводе некорректных данных в поля редактирования, характеризующих научный проект или задачу, то ПО АСНИ выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

А.2.2, А.3.1., А.4.1. и А.5.1. База данных недоступна.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что ПО АСНИ не может подключиться к базе данных, содержащей необходимую информацию, то осуществляется вывод сообщения об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей» (категория пользователя – неважна).

*Постусловия.*

Отсутствуют.

Перейдем к этапу проектирования АСНИ физических процессов горного производства. Так как для решения единственной не покрываемой программным фреймворком функциональной задачи (разработке математических моделей разрушения) требуется разработка соответствующей экспертной системы, то стадия «Математическое моделирование и алгоритмизация дополнительных основных функциональных задач» в рамках рассматриваемого проекта не будет реализована.

Осуществим переход к следующей стадии разработки АСНИ, заключающейся в проектировании и реализации IT-решений в сфере искусственного интеллекта, предназначенных для решения функциональных задач, не поддающихся полной алгоритмической формализации. В рамках

рассматриваемой работы имеется только одна такая функциональная задача – разработка математических моделей разрушения геоматериалов. Действительно, как указывалось ранее для решения этой задачи наряду с использованием одной из систем компьютерного моделирования универсального назначения (MATLAB, Scilab, Octave и др.) требуется разработка экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов. Именно данная система посредством опроса исследователя должна решить проблему определения теории моделирования, т.е. такой теории, использование которой позволит для решаемой прикладной задачи горного производства разработать математическую модель разрушения геоматериалов, обладающую наибольшей степенью количественной адекватности.

Итак, посредством разработки экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов реализуем стадию «Разработка AI-решений дополнительных основных функциональных задач» предложенного каркасного метода.

#### **4.3. Экспертная система принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов**

На данный момент существует большое количество методологий искусственного интеллекта, в рамках которых производится разработка экспертных систем [87]. Вне зависимости от используемой методологии, в составе любой экспертной системы можно выделить два компонента, которые обязательно присутствуют в ее программной архитектуре. Первый из них – база знаний экспертной системы, предназначена для хранения, добавления, обновления, удаления и упорядочивания фактов (правил, фреймов, семантических сетей и других форм представления знаний), используемых в качестве основы для принятия решений. Второй компонент является механизмом логического вывода; именно он определяет схему управления процессом решения прикладных задач, т.е. порядок применения фактов, приводящих к получению экспертного знания

(мнения) в той или иной предметной области.

С учетом изложенного, используя объектно-ориентированный подход к проектированию и язык UML, получим следующую программную архитектуру предлагаемой экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов (рисунок 42).

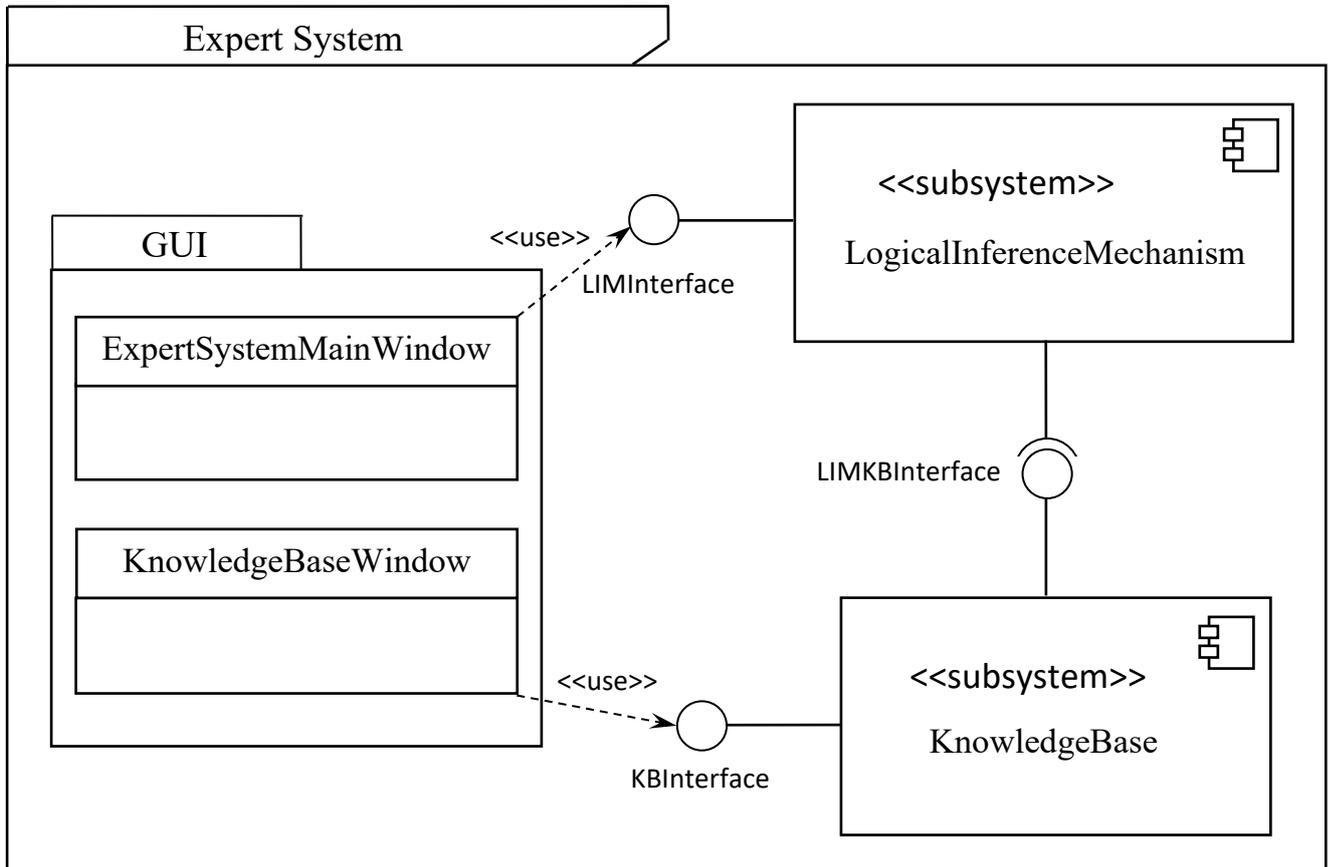


Рисунок 42 – Архитектура экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов

В представленной архитектуре присутствует две подсистемы и один пакет. Подсистемы "KnowledgeBase" и "LogicalInferenceMechanism" представляют собой соответственно базу знаний и механизм логического вывода. При этом подсистема "KnowledgeBase" играет роль сервера по отношению к "LogicalInferenceMechanism". Графические окна "ExpertSystemMainWindow" и "KnowledgeBaseWindow" составляют пакет "GUI" – графического интерфейса пользователя и посредством интерфейсов "LIMInterface" и "KBInterface" обеспечивают взаимодействие подсистем с пользователем экспертной системы.

Состав и структура данных подсистем существенно зависит от того, какая форма представления фактов (правила, фреймы, семантические сети и др.) используется при разработке экспертной системы. Однако какая бы форма представления ни была бы выбрана, во всех применяемых на данный момент методологиях разработки экспертных систем в качестве фактов используются эвристики, т.е. эмпирические знания, упрощающие или ограничивающие поиск решения задач в соответствующей предметной области. И это неудивительно, поскольку именно эвристики являются той единственной основой, позволяющей экспертным системам реализовать свое предназначение, заключающимся в решении прикладных задач, не поддающихся строгому математическому анализу и алгоритмизации.

Разрабатываемая экспертная система принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов в этом плане не является исключением. Для решения своей основной задачи – определения теории моделирования, в рамках которой для рассматриваемой прикладной задачи горного производства следует моделировать процесс разрушения исследуемого геоматериала – предлагаемая экспертная система должна использовать эвристики, получаемые путем неформализованного анализа большого количества научных работ.

В тоже время определение теории моделирования существенно зависит от анализа структурных особенностей разрушаемых геоматериалов (их анизотропности, неоднородности и др.). При этом данный анализ не является предметом эвристического подхода и может быть выполнен на основе соответствующих программных реализаций алгоритмов, разрабатываемых в рамках методологии математического моделирования.

Следовательно, решение задачи определения теории моделирования, поддается частичной алгоритмизации, но в общем и целом требует применения эвристик. К сожалению ни одна из существующих методологий разработки экспертных систем не учитывает возможность частичной алгоритмизации процесса решения прикладных задач и полностью опирается на применение

эвристик и механизма логического вывода. Вследствие чего, решение рассматриваемой трудноформализуемой задачи выбора теории моделирования с применением экспертной системы, разрабатываемой в рамках существующих методологий, приведет к получению результата, обладающего малой степенью достоверности. Поэтому предложим новый гибридный метод разработки экспертных систем, при котором в качестве фактов используются правила и программные реализации алгоритмов, направляющие процесс решения прикладных задач. При этом в виду необходимости получения наиболее достоверных результатов решаемых трудноформализуемых задач, разработка алгоритмов и их программных реализаций должна производиться на основе методологии математического моделирования, позволяющей экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью, провести качественный и количественный анализ исследуемых объектов.

Итак, с помощью предложенного гибридного метода приступим к детальному проектированию подсистем "KnowledgeBase" и "LogicalInferenceMechanism", представляющих собой соответственно базу знаний и механизм логического вывода разрабатываемой экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов.

Согласно [172, 173 и 209], детальный проект любой подсистемы при объектно-ориентированной разработке следует представлять с помощью модели классов, содержащей сущности (объекты, компоненты и др.) как предметной области, так и чисто программной реализации (управляющие классы, базы данных и др.). С учетом предложенного гибридного метода архитектуру подсистемы "KnowledgeBase" можно представить в следующем виде (рисунок 43).

Из представленной архитектуры следует, что факты (экземпляры класса "Fact") в разрабатываемой базе знаний могут быть реализованы посредством двух взаимоисключающих форм представления – правил (объектов класса "Rule") и программных реализаций алгоритмов (объектов класса "SIOfAlgorithm"). При этом если факт представлен в виде программной реализации алгоритма, то

свойство "statement" (формулировка), унаследованное от класса "Rule" не определено, т.е. имеет значение «NULL». В противном случае – неопределенным остается атрибут "sourceOfCode", отвечающий за путь к файлу программы, реализованной на основе алгоритма.

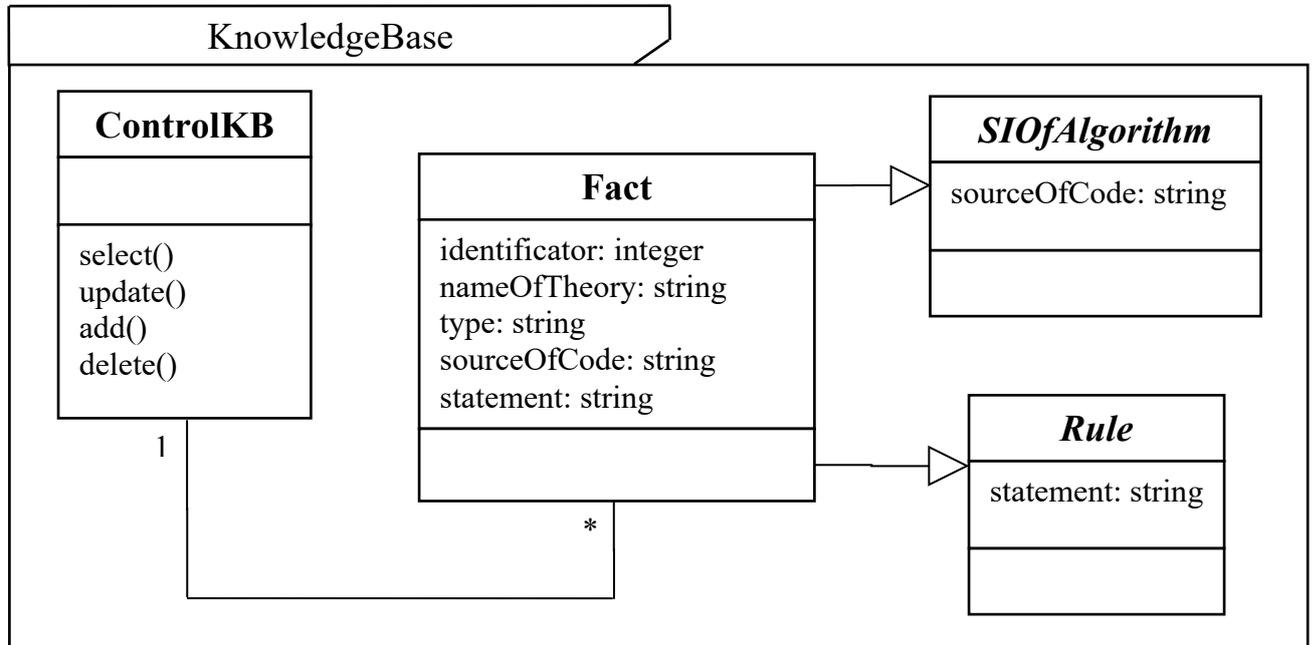


Рисунок 43 – Архитектура подсистемы "KnowledgeBase"

Анализ представленной архитектуры свидетельствует, что классы "Rule" и "SIOfAlgorithm" являются абстрактными и в рамках реализации рассматриваемой подсистемы не имеют своих экземпляров. В свою очередь, класс "ControlKB" является управляющим, поскольку именно его экземпляры посредством методов "select()", "update()", "add()" и "delete()" отвечают за функциональность проектируемой подсистемы – выборку, обновление, добавление и удаление фактов.

Для реализации классов "ControlKB" и "Fact" разработаем правила и алгоритмы, формирующие базу знаний разрабатываемой экспертной системы. Именно данные правила и алгоритмы должны позволить пользователю экспертной системы определить теорию моделирования, в рамках которой для рассматриваемой прикладной задачи горного производства следует моделировать процесс разрушения исследуемого геоматериала.

Первая структурная особенность, определяющая процесс выбора теории

моделирования, связана со свойством мультифрактальности разрушаемых геоматериалов. Действительно, относительно данного свойства, существующие геоматериалы можно разделить на два вида. Геоматериалы первого вида обладают природно-мультифрактальной структурой, т.е. являются фракталами, характеризуемыми спектром целых размерностей, и представляющие собой несколько вложенных друг в друга фрактальных объектов. Установлено, что процессы разрушения данных геоматериалов, вследствие их масштабной инвариантности на всех иерархических уровнях, с большой степенью количественной адекватности могут быть описаны посредством сплошной среды, в том числе и в рамках предложенного ранее мультифрактального подхода. Именно по этой причине применение разработанных в предыдущей главе математических моделей к исследованию геоматериалов мультифрактальной структуры позволяет получить наиболее точные значения их деформационных свойств – погрешность результатов составляет не более 5%.

В тоже время на практике довольно часто встречаются геоматериалы второго вида, не являющиеся фракталами, но состоящие из нескольких агрегируемых друг в друга природных фракталов. Такие геоматериалы в дальнейшем будем называть геоматериалами незавершенно-мультифрактальной структуры, подчеркивая тем самым их тесную связь с природными мультифракталами. Из-за наличия в структуре данных геоматериалов объектов, не обладающих свойством масштабной инвариантности, использование модели сплошной среды для исследования процесса их разрушения является неправомерным, и как следствие – требуется применение других подходов. Кроме того, как указывалось ранее, степень количественной адекватности разработанных в предыдущей главе математических моделей определения деформационных свойств существенно снижается, в случае их использования для исследования геоматериалов незавершенно-мультифрактальной структуры.

Таким образом, при определении теории моделирования необходимо учитывать каким видом структуры – природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной, обладает разрушаемый геоматериал. При этом

следует принимать во внимание и тип разрушаемого геоматериала, т.е. является ли рассматриваемый объект – минералом, минералом с наполненными флюидом порами, минералом с флюидными включениями, горной породой или породным массивом. В дальнейшем с целью обобщения получаемых результатов для обозначения конкретных типов геоматериалов, наряду со стандартной терминологией (породный массив, горная порода и т.д.), будем пользоваться совокупностью терминов, основанных на теории сложности (геоматериал пятого порядка сложности, геоматериал четвертого порядка сложности и т.д.).

К сожалению, на данный момент не существует теоретических методов, позволяющих, исследовав некоторый геоматериал определенного порядка сложности, установить, каким из приведенных типов структур он обладает.

В связи с этим, применяя методологию математического моделирования, разработаем алгоритмы анализа геоматериалов различных порядков сложности, применение которых на практике позволит исследовать любой объект на предмет его принадлежности к геоматериалам природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры; и тем самым установим первый факт, входящий в базу знаний реализуемой экспертной системы.

Однако прежде чем перейти к разработке алгоритмов, рассмотрим такой наименьший структурный элемент как кристалл и установим, в каких случаях его можно рассматривать как природный фрактал (объект фрактальной структуры), а при каких нет. И на основе этого определим требования, которым должны соответствовать минералы, минералы с наполненными флюидом порами, минералы с флюидными включениями, горные породы и породные массивы, чтобы их можно было считать геоматериалами природно-мультифрактальной структуры.

#### **4.3.1. О представительном объеме геоматериалов различных порядков сложности**

Как известно, кристалл состоит из атомов, расположенных строго

закономерно в узлах трехмерной кристаллической решетки [65]. В строении кристалла присутствует одна ключевая особенность: его структура обладает высокой степенью симметрии. Это свойство проявляется в том, что в структуре кристалла, существует определенная конфигурация атомов, называемая элементарной ячейкой, смещение которой в трех измерениях в направлении векторов трансляции позволяет получить кристаллическую решетку [59]. При этом у кристалла существует много элементарных ячеек, отличающихся между собой по величине объема. Элементарную ячейку наименьшего объема, т.е. параллелепипед, построенный на векторах трансляции  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , называют примитивной (рисунок 44).

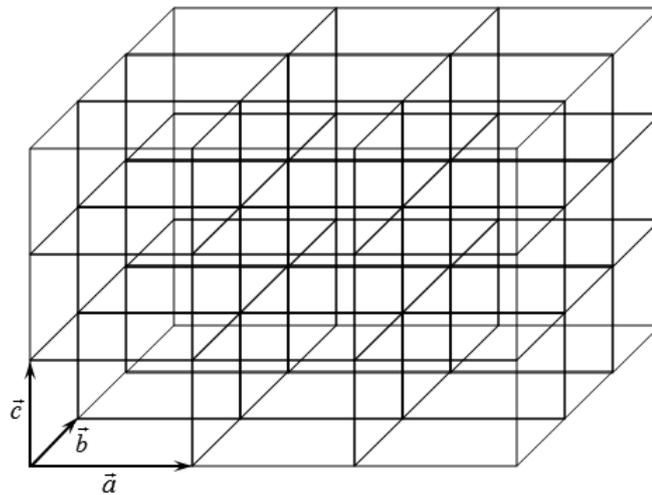


Рисунок 44 – Пространственная решетка, характеризуемая векторами трансляции

Итак, элементарная ячейка инвариантна относительно сдвига (или трансляции). Данная инвариантность означает, что взяв некоторую подструктуру кристалла (так называемую элементарную ячейку) и совершив преобразование типа – сдвиг вдоль некоторого вектора трансляции, будет наблюдаться точное совпадение полученной структуры с исходной [59].

В то же время, согласно [50], если некоторый объект можно разделить на  $N$  непересекающихся объектов, каждый из которых получается масштабированием исходного объекта с некоторым коэффициентом  $r$ , и при этом параметры  $N$  и  $r$  связаны между собой соотношением:

$$Nr^d = 1, \quad (4.1)$$

то такой объект является фракталом. Константу  $d$  в (4.1) принято называть фрактальной размерностью или размерностью подобия. Если данная величина целая, то такой фрактал принято называть фракталом целой размерности, в противном случае – дробной [50].

Отсюда можно заключить, что кристалл является фракталом целой размерности. При этом его следует считать не математическим, а природным фракталом. В данном случае свойство природности проявляется в том, что существует некоторое минимальное значение коэффициента масштаба  $r_{\min}$ , такое, что при значениях  $r < r_{\min}$  свойство самоподобия пропадает, т.е. соотношение (4.1) нарушается [23]. Для кристалла коэффициент масштаба  $r_{\min}$  можно определить посредством следующего выражения:

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V_{PCC}}{V_{HC}}}, \quad (4.2)$$

где  $V_{HC}$  – объем исследуемого кристалла;  $V_{PCC}$  – объем примитивной ячейки кристалла. Поскольку объем  $V_{HC}$  – величина известная, то приходим к выводу – объем примитивной ячейки  $V_{PCC}$  определяет границы самоподобия (фрактальности) такого объекта как кристалл.

Кроме того, объем примитивной ячейки играет и другую важную роль. Для дальнейших исследований введем следующее определение – минимальный объем объекта, начиная с которого его можно рассматривать как природный фрактал, будем называть представительным.

Найдем представительный объем кристалла. Итак, выше мы определили – для того, чтобы кристалл считать природным фракталом, необходимо, чтобы в его структуре присутствовала элементарная ячейка, транслировав которую можно получить весь кристалл в целом. В таком случае очевидно, что взяв некоторую примитивную ячейку и совершив над ней однократную трансляцию вдоль некоторого вектора, получим наименьший объем кристалла, начиная с которого его можно рассматривать как природный фрактал. Таким образом, представительный объем кристалла  $V_{RC}$  равен  $2V_{PCC}$ . Из приведенных выше

рассуждений следует, если объем кристалла превышает объем соответствующей примитивной ячейки как минимум в два раза, т.е. когда  $V_{HC} \geq 2V_{PCC}$ , то такой кристалл можно рассматривать как природный фрактал. В противном случае исследуемый кристалл – фракталом не является.

До сих пор мы рассматривали понятие «представительный объем» как характеристику фрактальности объекта, однако у этого понятия имеется и другое прикладное значение. Как известно, физические свойства кристалла достаточно хорошо моделируются посредством сплошной среды. Возникает естественный вопрос, как соотносится между собой реальная фрактальная структура кристалла и его модель сплошной среды. Ответ на этот вопрос прост – каждой точке модели сплошной среды некоторого объекта ставится в соответствие представительный объем этого объекта. Резюмируя выше изложенное исследование, приходим к главному выводу: для того, чтобы кристалл считать фракталом и одновременно с этим описывать его свойства с помощью сплошной среды, необходимо существование представительного объема для этого кристалла.

Обобщим полученные результаты на случай геоматериалов различных порядков сложности. В общем случае, чтобы установить инвариантность некоторой подструктуры (в нашем случае – элементарной ячейки) относительно какого-либо преобразования (в нашем случае – трансляции), необходимо совершить это преобразование и затем сравнить полученную подструктуру с исходной [164]. В случае точного совпадения, что наблюдается в кристаллах, констатируем инвариантность относительно данного преобразования (трансляции). Однако геоматериалы вне зависимости от их порядка сложности являются стохастическими структурами. И поэтому для них понятие инвариантности подструктуры в том смысле, в котором она была определена выше, – отсутствует.

Вследствие этого необходимо обобщить понятие инвариантности на случай таких стохастических структур как геоматериалы. Для них под инвариантностью подструктуры следует понимать не точную, а приближенную инвариантность, оцениваемую с помощью того или иного критерия согласия. При этом

подструктуру геоматериала, для которого устанавливается инвариантность, по аналогии с кристаллом, будем называть элементарной ячейкой. Очевидно, что для геоматериала таких ячеек может быть много (а может и не быть вовсе). Поэтому введем еще одно определение – элементарную ячейку наименьшего объема (как и в случае с кристаллами) будем называть примитивной.

Аналогичными рассуждениями, что применялись и для кристаллов, приходим к выводу, что минимальный объем, начиная с которого геоматериал можно считать природным фракталом и моделировать его посредством сплошной среды, равен двум объемам его примитивной ячейки. Таким образом, представительный объем  $V_{RNO}$  геоматериала равен двум объемам  $V_{PCNO}$  примитивной ячейки этого объекта, т.е.  $V_{RNO} = 2V_{PCNO}$ .

Полученные результаты позволяют сделать следующий вывод. Если объем геоматериала  $V_{HNO}$  превышает объем  $V_{PCNO}$  соответствующей примитивной ячейки как минимум в два раза, т.е. когда  $V_{HNO} \geq 2V_{PCNO}$ , то такой объект можно рассматривать как природный фрактал. В противном случае исследуемый геоматериал – фракталом не является.

Таким образом, приходим к главному выводу: чтобы некоторый геоматериал считать фрактальным и описывать его сплошной средой, необходимо существование представительного объема для этого геоматериала. Однако возникает естественный вопрос, в каких случаях геоматериал имеет природно-мультифрактальную структуру? Ответ прост – геоматериал можно отнести к объектам природно-мультифрактальной структуры, если этот геоматериал в целом и все его структурные составляющие можно рассматривать как природные фракталы.

Если теперь учесть, что каждый геоматериал имеет свое уникальное строение, приходим к следующему выводу. Геоматериал  $n$ -го порядка сложности следует считать геоматериалом природно-мультифрактальной структуры, если будет установлено, что представительный объем существует: 1) для каждого геоматериала первого, второго, ... и  $n-1$ -го порядка, входящего в состав

исследуемого объекта; 2) для геоматериала  $n$ -го порядка как целого. В противном случае, если хотя бы одно из данных условий (назовем их условиями мультифрактальности) не выполняется, то исследуемый объект является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры.

Полученные результаты позволяют перейти к разработке первого алгоритма.

#### **4.3.2. Алгоритм анализа минерала на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры**

Минерал является геоматериалом первого порядка сложности и представляет собой объект, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу зерен, имеющих идентичный химический состав и внутреннее строение. Трехмерная структура такого геоматериала представлена на рисунке 45.

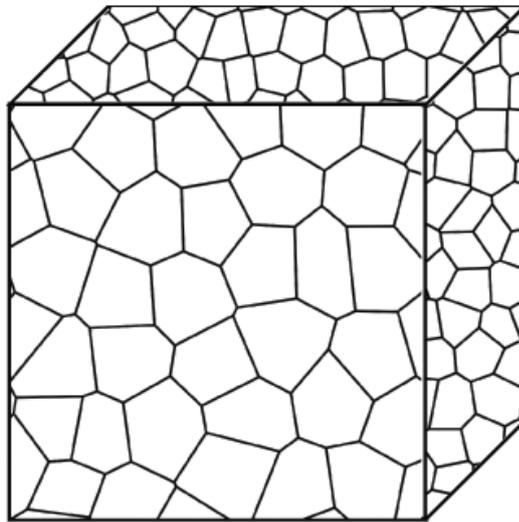


Рисунок 45 – Трехмерная структура минерала

Как показали исследования, минералы, в которых одно и более зерен не являются фракталами, в основном наблюдаемы в искусственных, лабораторных условиях. Поэтому здесь и далее в данной работе будем рассматривать только те минералы, которые состоят из вплотную прилегающих друг к другу зерен, каждое

из которых представляет собой природный фрактал.

С учетом этого, можно сделать вывод – минерал является геоматериалом природно-мультифрактальной структуры первого порядка сложности, если существует представительный объем для этого минерала как целого. В противном случае исследуемый минерал – геоматериал незавершенно-мультифрактальной структуры первого порядка сложности. Таким образом, разрабатываемый алгоритм посредством исследования трехмерной структуры минерала (рисунок 45) на предмет существования представительного объема должен определять, к какому типу следует отнести этот минерал – к геоматериалу природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры.

С учетом приведенных рассуждений, используя диаграммы деятельности UML, алгоритм анализа минерала на предмет принадлежности к объектам природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры можно представить в следующем виде (рисунок 46).



Рисунок 46 – Алгоритм анализа минерала

Из всех действий в данной модели детализации требует только «Определить представительный объем минерала». С этой целью разработаем математическую модель анализа структуры минерала.

Не теряя общности, построение математической модели будем производить на примере некоторого минерала, представляющего собой совокупность случайно-ориентированных фрактальных неоднородностей в пространстве.

Разделим трехмерную структуру рассматриваемого минерала на плоскости  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ . Определим в каждой плоскости величину линейного размера примитивной ячейки или установим ее отсутствие. Если в какой-то из них рассматриваемая ячейка отсутствует, то представительного объема для исследуемого минерала не существует. В противном случае, найдем удвоенное произведение полученных величин линейных размеров примитивной ячейки в трех плоскостях. В результате получим представительный объем для рассматриваемого минерала. Таким образом, приходим к необходимости построения и исследования трех моделей структуры геоматериала первого порядка сложности в плоскостях  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ .

Разработаем математическую модель анализа структуры минерала в плоскости  $XOY$ . При этом исходными данными является графический вид структуры исследуемого минерала в этой плоскости (рисунок 47).

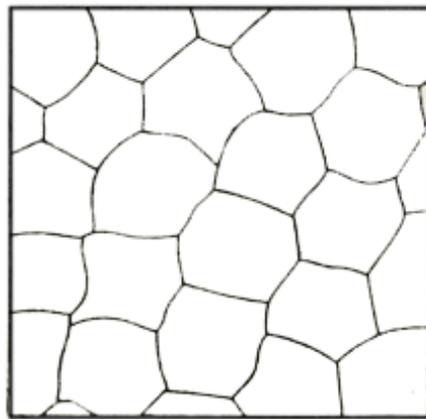


Рисунок 47 – Графический вид структуры минерала в плоскости  $XOY$

Введем декартовую систему координат в графическом виде рассматриваемого геоматериала. Для каждого зерна определим параметр

$g_n = (x_n, y_n, r_n, l_n, \varphi_n)$ , где  $x_n$  и  $y_n$  – координаты центра кристаллизации зерна в декартовой системе координат;  $r_n$  – радиус-вектор центра кристаллизации  $n$ -го зерна, т.е. вектор, исходящий из начала координат до центра кристаллизации зерна;  $l_n$  – характеристический вектор  $n$ -го зерна, определяемый как вектор с наибольшей длиной, исходящий из центра кристаллизации  $n$ -го зерна до точки на ее границе;  $\varphi_n$  – угол между векторами  $r_n$  и  $l_n$ .

Пример определения параметра  $g_n$  для одного из зерен исследуемого минерала представлен на рисунке 48.

Тогда любой минерал в плоскости можно описать множеством  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_{N_Z}\}$ , где  $N_Z$  – количество зерен в рассматриваемой структуре геоматериала.

Сопоставим графическому виду изучаемого минерала в плоскости  $XOY$  структурную матрицу  $H$ .

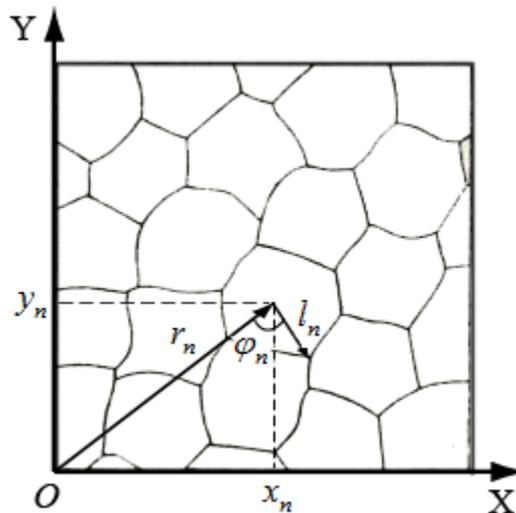


Рисунок 48 – Пример определения параметра  $g_n$  для одного из зерен минерала

Определим параметр  $g_e = \min_{x_i} \max_{y_i} \{g_1, g_2, \dots, g_{N_Z}\}$ , характеризующий крайнее левое верхнее зерно рассматриваемого минерала. Будем считать данное зерно выбранным. Тогда первый элемент  $h_{11}$  данной матрицы будет равен значению функции от параметра  $f(g_e) = f((x_e, y_e, r_e, l_e, \varphi_e)) = (|l_e|, \varphi_e)$ .

Для того чтобы определить элемент  $h_{12}$ , необходимо сделать следующее.

Удалим из  $G$  элемент  $g_e$ . В графическом виде рассматриваемого минерала соединим векторами центр выбранного зерна с центрами соседних. Из данных векторов выберем тот, который образует наименьший угол с осью  $OX$ . Именно этот выбранный вектор укажет на параметр  $g_k$ , на основе которого необходимо определить значение функции  $f(g_k)$  и присвоить его элементу  $h_{12}$  (рисунок 49).

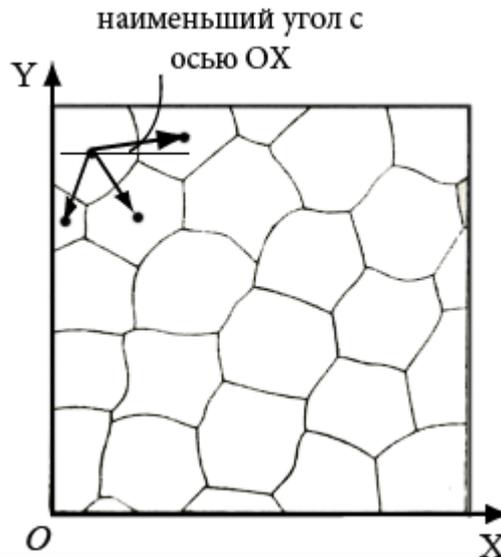


Рисунок 49 – Вектор с наименьшим углом с осью  $OX$ , указывающий на  $h_{12}$

Далее повторяем последнюю процедуру, только выбранным следует считать зерно, описываемое параметром  $g_k$ . И так до тех пор, пока в качестве выбранного не окажется правое верхнее зерно, т.е. пока  $g_e$  не станет равным  $\max_{x_i} \max_{y_i} \{g_1, g_2, \dots, g_{N_Z}\}$ .

Аналогичным способом получают и последующие строки матрицы  $H$ . Итак, для минерала получим структурную матрицу  $H$ :

$$H = [h_{ij}]. \quad (4.3)$$

Полученная матрица  $H$  является математической моделью структуры геоматериала первого порядка сложности в плоскости  $XOY$ . Соответствие между графическим видом исследуемого геоматериала (рисунок 47) и структурной матрицей  $H$  схематически можно представить следующим образом (рисунок 50).

Исследуем полученную структурную матрицу на предмет существования примитивной ячейки. Если она существует, то определим количество зерен,

содержащихся в такой ячейке, и тем самым определим ее линейный размер. Для нахождения примитивной ячейки воспользуемся итерационной процедурой, заключающейся в следующем.



Рисунок 50 – Схематическое соответствие между графическим видом исследуемого геоматериала и структурной матрицей  $H$

Предположим, что количество зерен в примитивной ячейке  $N_{PHV}^{on}$  равно 2. Разделим элементы матрицы  $H$  на подмножества  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  ( $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ ), каждое из которых состоит из  $N_{PHV}^{on}$  элементов. Каждое такое подмножество получается путем включения в него элементов матрицы  $H$  в горизонтальном направлении. В результате этой операции минерал в плоскости  $XOY$  делится в направлении горизонтального вектора трансляции на подструктуры, состоящие из  $N_{PHV}^{on}$  неоднородностей. Разделение элементов матрицы  $H$  на подмножества  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  для рассматриваемого геоматериала можно представить в следующем виде (рисунок 51).

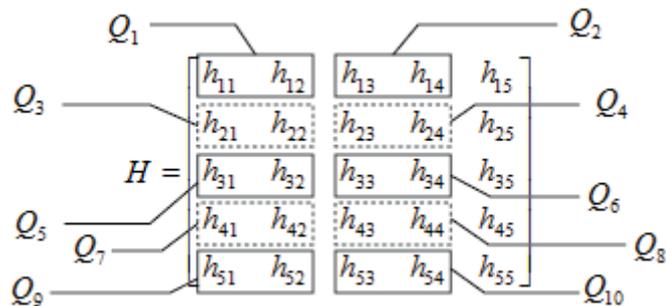


Рисунок 51 – Разделение элементов матрицы  $H$  на подмножества  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$

В виду того, что неоднородности в минерале случайно-ориентированы, то подмножества  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$  описывают стохастические подструктуры этого геоматериала. Тогда получив плотности распределения  $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$ , и сравнив каждую из них с плотностью  $F(\Omega)$ ,  $\Omega \in h_{11}, h_{12}, \dots, h_{tk}$  ( $t, k$  – количество строк и столбцов в матрице  $H$ ) при помощи критерия согласия  $\chi^2$ , получим совокупность приведенных значений  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$ . Далее определим среди значений  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$  максимальное  $\chi^2_{\max}$  и сравним его с нормативным значением  $(\chi^2)_n$  (для одной степени свободы и уровня значимости  $\alpha = 0,05$  нормативное значение  $(\chi^2)_n = 3,841$  [190]). Если выполнится условие:

$$\chi^2_{\max} < (\chi^2)_n, \quad (4.4)$$

то подструктуры минерала, описываемые подмножествами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ , инвариантны между собой по  $\chi^2$ -критерию. Следовательно, для геоматериала первого порядка сложности в плоскости  $XOY$  относительно горизонтального направления трансляции можно констатировать существование примитивной ячейки, состоящей из  $N_{PHV}^{on}$  зерен. Данным действием итерационная процедура завершается.

Если же условие (4.4) не выполняется, то необходимо повторить итерационную процедуру еще раз, только при этом увеличить предполагаемое количество зерен  $N_{PHV}^{on}$  в примитивной ячейке на 1. И так повторять до тех пор, пока либо не будет обнаружена инвариантность подструктур, описываемых подмножествами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ , либо величина  $N_{PHV}^{on}$  не станет большей, чем количество столбцов матрицы  $H$ . В последнем случае можно утверждать, что исследуемый минерал в плоскости  $XOY$  не обладает примитивной ячейкой. Тогда рассматриваемый минерал (в виду отсутствия для него представительного объема) является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры первого порядка сложности.

Однако наличие примитивной ячейки у минерала в плоскости  $XOY$  при

горизонтальном направлении не гарантирует ее существование в вертикальном направлении. Для того чтобы проверить наличие такой ячейки относительно вертикального направления трансляции в плоскости  $XOY$ , необходимо транспонировать матрицу  $H$  и повторить все вышеописанные действия, начиная с итерационной процедуры, полагая количество зерен в примитивной ячейке равным 2.

В результате исследования матрицы  $H$  на предмет существования примитивной ячейки в горизонтальном и вертикальном направлениях получим один из трех вариантов.

Первый – примитивная ячейка в горизонтальном направлении существует, а в вертикальном – нет. В этом случае можно утверждать, что для исследуемого минерала не существует представительного объема. Исследуемый минерал в этом случае является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры первого порядка сложности. Второй вариант возникает, когда установлено, что количество зерен  $N_2^{on}$  в примитивной ячейке относительно горизонтального направления трансляции больше или меньше количества зерен  $N_6^{on}$  в ячейке согласно вертикальному направлению. В таком случае количеством зерен в примитивной ячейке рассматриваемого минерала в плоскости  $XOY$  следует считать наибольшее из двух значений:  $N_2^{on}$  и  $N_6^{on}$ . При этом линейным размером примитивной ячейки – наибольший линейный размер подструктуры из описываемых множествами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  при горизонтальном и вертикальном направлениях трансляции. Третий вариант – тривиальный, количество зерен  $N_2^{on}$  равно  $N_6^{on}$ . Тогда примитивная ячейка рассматриваемого геоматериала в плоскости  $XOY$  состоит из  $N_2^{on} = N_6^{on}$  зерен, а линейный размер рассматриваемой ячейки равен максимальному из линейных размеров подструктур, описываемых множествами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ . При втором и третьем вариантах исследуемый минерал, согласно плоскости  $XOY$ , можно рассматривать как геоматериал мультифрактальной структуры первого порядка сложности.

Математические модели геоматериала первого порядка сложности, а также способ их исследования для плоскостей  $ZOY$  и  $XOZ$  эквивалентен приведенной выше модели структуры в плоскости  $XOY$ .

Если в результате исследования моделей для плоскостей  $ZOY$  и  $XOZ$  выяснится, что минерал хотя бы в одной из них не имеет примитивной ячейки, то рассматриваемый геоматериал в целом тоже его не имеет. В противном случае – удвоенное произведение линейных размеров примитивных ячеек, полученных из моделей структуры минерала в плоскостях  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ , будет соответствовать представительному объему исследуемого геоматериала.

### **4.3.3. Алгоритм анализа минерала с наполненными флюидом порами на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры**

Минерал с наполненными флюидом порами представляет собой геоматериал второго порядка сложности, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу зерен, каждое из которых содержит наполненную газом (или жидкостью) пору. При этом все зерна, входящие в исследуемый геоматериал, имеют идентичный химический состав и внутреннее строение.

Итак, минерал с наполненными флюидом порами агрегирует один геоматериал первого порядка сложности. Тогда, согласно сформулированным ранее условиям мультифрактальности, исследуемый минерал с наполненными флюидом порами является геоматериалом мультифрактальной структуры второго порядка сложности лишь в том случае, если существуют представительные объемы для минерала (входящего в состав исследуемого объекта) и рассматриваемого геоматериала как целого. В противном случае, если хотя бы для одного из них такого объема не существует, то исследуемый минерал с наполненными флюидом порами является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры второго порядка сложности.

С учетом изложенного следует: чтобы определить, относится ли

исследуемый объект к геоматериалам мультифрактальной или незавершено-мультифрактальной структуры второго порядка сложности, необходимо исследовать две структуры на предмет существования представительного объема. Первая из них – трехмерная структура минерала с наполненными флюидом порами, имеющая вид, подобный рисунку 52.

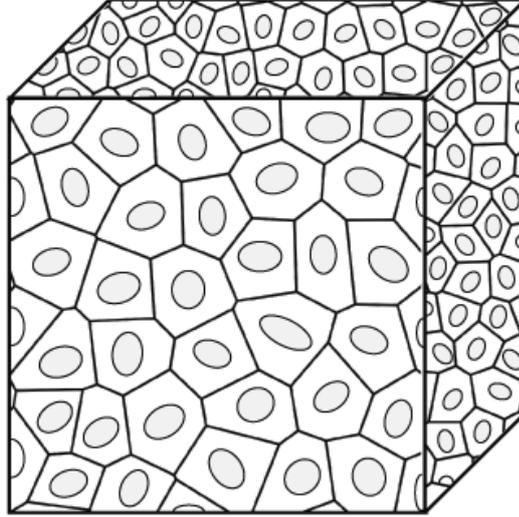


Рисунок 52 –Трехмерная структура минерала с наполненными флюидом порами  
(эллипсами обозначены поры)

Вторая структура описывает минерал, входящий в состав исследуемого геоматериала. Данная структура может быть получена из первой (рисунок 52) путем игнорирования присутствия пор в составе всех зерен (рисунок 53).

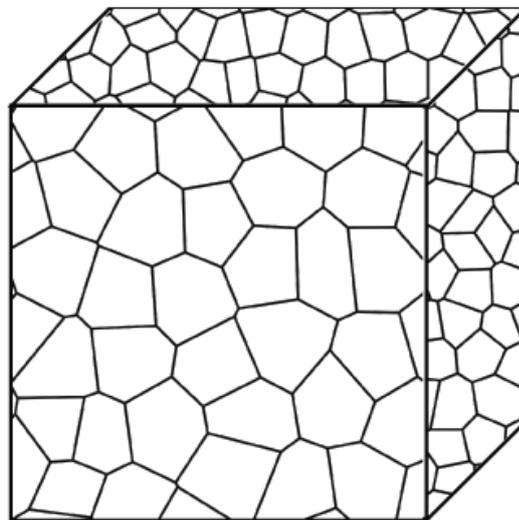


Рисунок 53 – Трехмерная структура минерала, получаемая из структуры минерала с наполненными флюидом порами

С учетом вышеизложенного, а также воспользовавшись языком UML, рассматриваемый алгоритм анализа минерала с наполненными флюидом порами на предмет принадлежности к объектам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры можно представить в следующем виде (рисунок 54).



Рисунок 54 – Алгоритм анализа минерала с наполненными флюидом порами

Действие «Определить представительный объем минерала» было рассмотрено выше. В свою очередь действие «Определить представительный объем минерала с наполненными флюидом порами», может быть описано моделью, полученной в рамках метода аналогии с математической моделью анализа структуры минерала. При этом единственным отличием полученной таким образом модели от ранее полученной является то, что вместо множества параметров структуры  $G$  используется множество  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{ZP}}\}$ , где  $\lambda_i = (x_i, y_i, r_i, l_i, \varphi_i, \gamma_i)$ ;  $x_i$  и  $y_i$  – декартовы координаты центра поры  $i$ -го зерна;  $r_i$  – радиус-вектор центра поры  $i$ -го зерна, т.е. вектор, исходящий из начала координат до центра поры в зерне;  $l_i$  – характеристический вектор  $i$ -го зерна с порой, определяемый как вектор с наибольшей длиной, исходящий из центра поры до точки на границе этого зерна;  $\varphi_i$  – угол между векторами  $r_i$  и  $l_i$ ;  $\gamma_i$  – площадь эллипса, соответствующего поре  $i$ -го зерна;  $N_{ZP}$  – количество зерен с порами в структуре геоматериала.

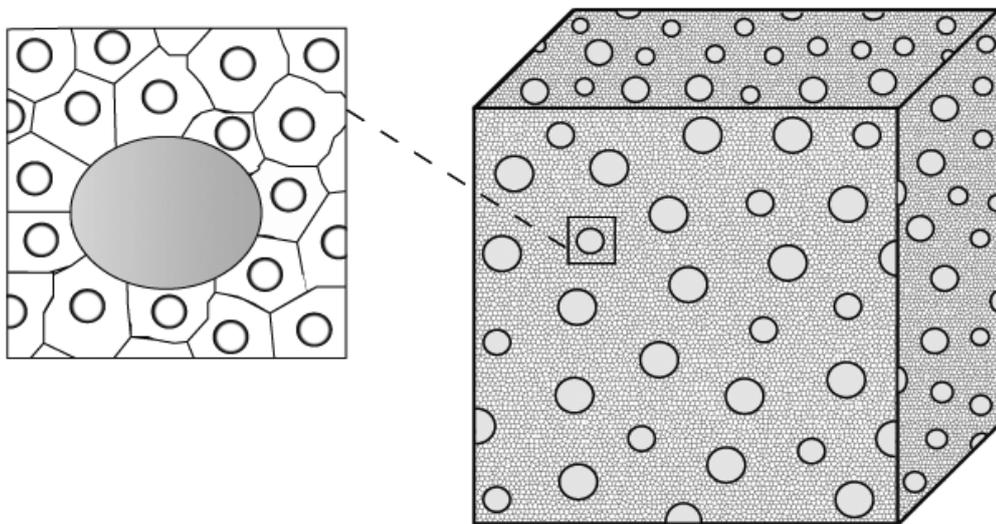
#### **4.3.4. Алгоритм анализа минерала с флюидными включениями на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры**

Минерал с флюидными включениями является геоматериалом третьего порядка сложности. Исследуемый объект представляет собой минерал, который наряду с наполненными флюидом порами в зернах содержит полости, в которых находится газ (или жидкость) под давлением. При этом каждая полость, называемая флюидным включением, занимает некоторый объем, величина которого больше объема зерна исследуемого минерала.

Итак, минерал с флюидными включениями агрегирует два геоматериала, один из которых имеет первый порядок, другой – второй порядок сложности. Тогда, согласно условиям мультифрактальности, исследуемый минерал с флюидными включениями является геоматериалом природно-мультифрактальной

структуры третьего порядка сложности, если существуют представительные объемы: 1) минерала и минерала с наполненными флюидом порами, входящими в состав исследуемого объекта; 2) минерала с флюидными включениями как целого. В противном случае, если хотя бы для одного из перечисленных объектов представительный объем равен нулю, то исследуемый объект является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры третьего порядка.

С учетом вышеизложенного следует – для определения того, к какому типу принадлежит исследуемый геоматериал (природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры), необходимо исследовать три структуры на предмет существования представительного объема. Первая из них – трехмерная структура минерала с флюидными включениями имеет вид, подобный рисунку 55. Вторая – трехмерная структура минерала с наполненными флюидом порами, входящего в состав исследуемого геоматериала. Данная структура может быть получена из первой структуры путем удаления включений. И наконец, третья структура описывает в трехмерном виде минерал, входящий в состав исследуемого минерала с флюидными включениями. Такая структура может быть получена из второй структуры путем игнорирования пор. Примеры второй и третьей структур для исследуемого геоматериала представлены на рисунках 56 и 57.



Рисунки 55 – Трехмерная структура минерала с флюидными включениями  
(большими эллипсами обозначены включения)

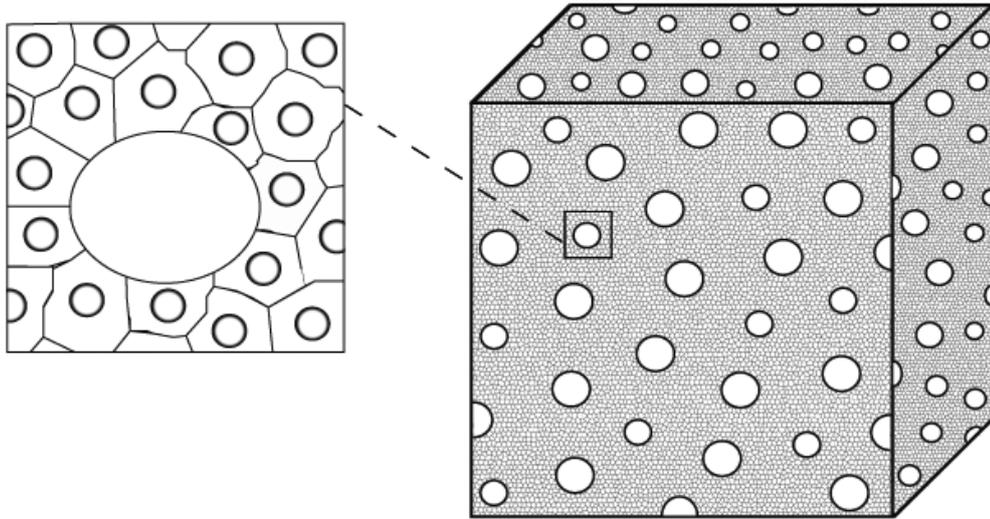


Рисунок 56 – Трехмерная структура минерала с наполненными флюидом порами, получаемая из рисунка 55

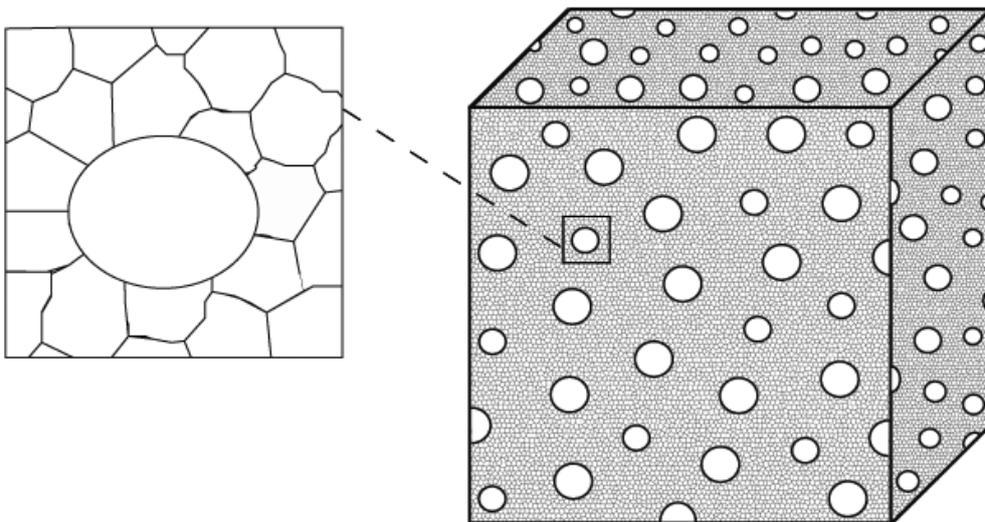


Рисунок 57 – Трехмерная структура минерала, получаемая из рисунка 55

На основании вышеизложенного алгоритм анализа минерала с флюидными включениями на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры можно представить в следующем виде (рисунки 58 и 59).

Поскольку действия «Определить представительный объем минерала» и «Определить представительный объем минерала с наполненными флюидом порами» были определены ранее, то остается одно действие, которое необходимо детализировать – «Определить представительный объем минерала с флюидными

включениями». С этой целью разработаем математическую модель анализа структуры минерала с флюидными включениями.



Рисунок 58 – Алгоритм анализа минерала с флюидными включениями (начало)

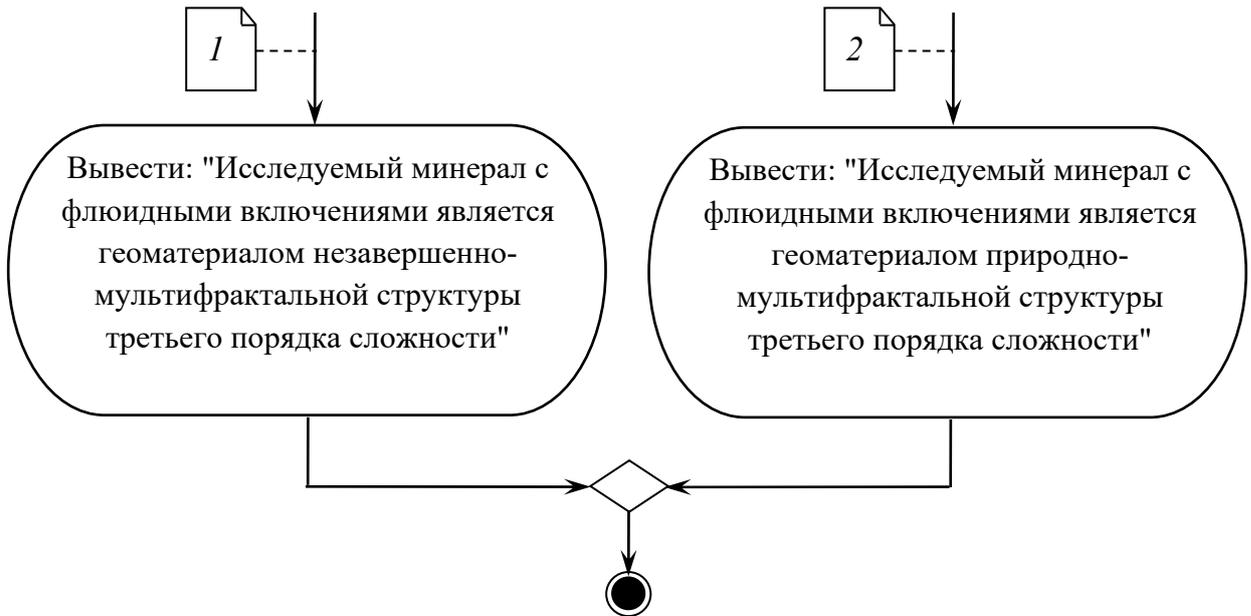


Рисунок 59 – Алгоритм анализа минерала с флюидными включениями  
(окончание)

Построение математической модели, не теряя общности, будем производить на примере некоторого минерала с флюидными включениями. Разделим трехмерную структуру рассматриваемого геоматериала на плоскости  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ . Определим в каждой плоскости величину линейного размера примитивной ячейки или установим ее отсутствие. Если хотя бы в одной из них такая ячейка отсутствует, то представительного объема для исследуемого геоматериала не существует. В противном случае, найдем удвоенное произведение полученных величин линейных размеров примитивной ячейки в трех плоскостях. В итоге получим представительный объем для исследуемого минерала с флюидными включениями.

Таким образом, приходим к необходимости построения и исследования трех моделей структуры исследуемого геоматериала в плоскостях  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ .

Разработаем математическую модель структуры геоматериала третьего порядка сложности в плоскости  $XOY$ . Исходными данными в разрабатываемой модели является графический вид такой структуры в этой плоскости. Допустим, что графический вид структуры исследуемого геоматериала в плоскости  $XOY$  имеет вид, изображенный на рисунке 60.

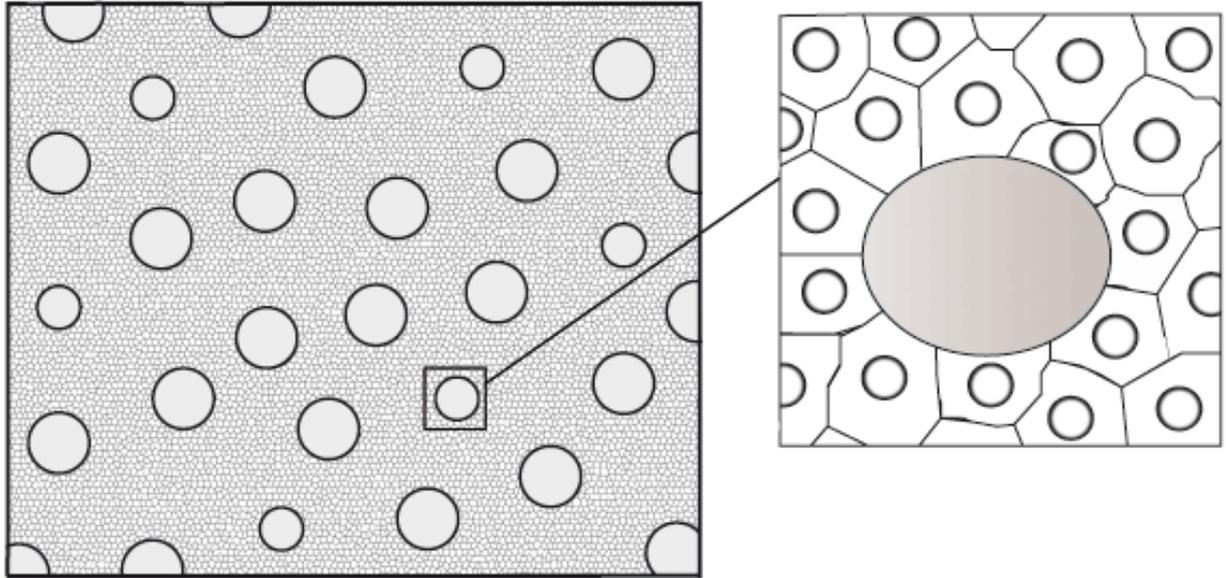


Рисунок 60 – Графический вид структуры минерала с флюидными включениями в плоскости  $XOY$

При дальнейшей разработке необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Согласно алгоритму, представленному на рисунках 58 и 59, детализируемое действие «Определить представительный объем минерала с флюидными включениями» выполняется только в том случае, если существует представительный объем для геоматериалов первого и второго порядков сложности, входящих в состав исследуемого объекта. Вследствие этого, геоматериалы первого и второго порядков сложности, входящие в структуру исследуемого минерала с флюидными включениями, при разработке рассматриваемой математической модели можно моделировать посредством сплошной среды.

Данное обстоятельство дает нам полное право все зерна с порами в рассматриваемой структуре (рисунок 60) заменить одной единой сплошной средой, соответствующей минералу с наполненными флюидом порами, входящему в состав исследуемого геоматериала.

Осуществив такую замену, в результате получим следующую эквивалентную структуру минерала с флюидными включениями в плоскости

$XOY$  (рисунок 61), где эллипсам соответствуют включения, а белой области – сплошная среда.

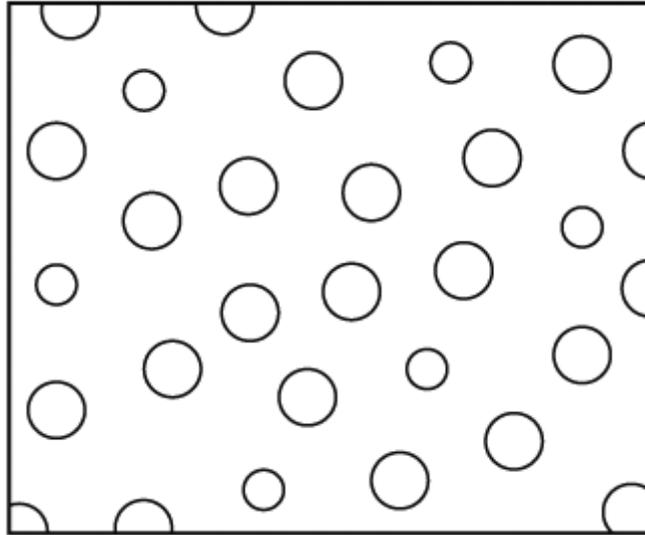


Рисунок 61 – Эквивалентная структура минерала с флюидными включениями в плоскости  $XOY$

Разобьем данную структуру на блоки Вороного, которые получаются следующим образом. Для каждого включения в эквивалентной структуре надо провести векторы, соединяющие центр этого включения с центрами соседних, и через середины полученных векторов перпендикулярно к ним восстановить плоскости. В результате мы получим эквивалентную структуру геоматериала третьего порядка сложности с позиций блоков Вороного (рисунок 62).

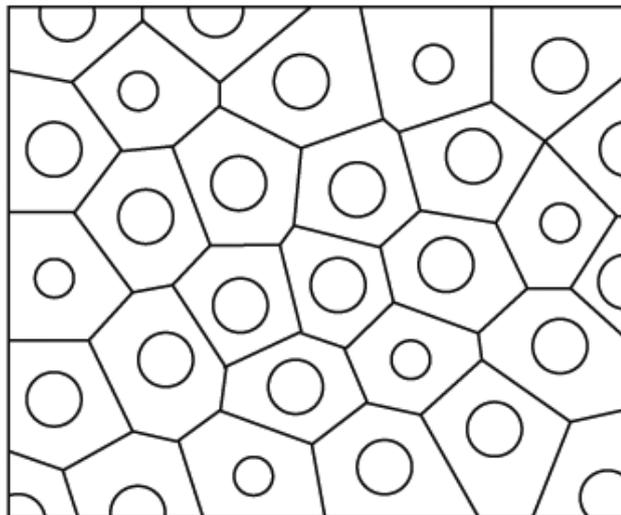


Рисунок 62 – Эквивалентная структура геоматериала третьего порядка сложности с позиций блоков Вороного

Именно с этой структурой мы будем работать в дальнейшем. Поэтому далее в разрабатываемой модели всякий раз, когда будем говорить о структуре минерала с флюидными включениями, мы будем подразумевать структуру, изображенную на рисунке 62.

Введем декартовую систему координат на графическом виде исследуемой структуры. Для каждого блока Вороного определим параметр  $w_n = (x_n, y_n, s_n)$ , где  $x_n$  и  $y_n$  – координаты центра  $n$ -го включения;  $s_n$  – отношение площади  $n$ -го включения к площади всего блока.

Тогда любой минерал с флюидными включениями в плоскости можно описать множеством  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{N_{BV}}\}$ , где  $N_{BV}$  – общее количество блоков Вороного в плоской структуре.

Сопоставим графическому виду рассматриваемого геоматериала третьего порядка сложности в плоскости  $XOY$  структурную матрицу  $E$ . Определим параметр  $w_c = \min_{x_i} \max_{y_i} \{w_1, w_2, \dots, w_{N_{BV}}\}$ , характеризующий крайний левый верхний блок Вороного в исследуемой структуре. Будем считать данный блок выбранным. Тогда первый элемент матрицы  $e_{11}$  будет равен значению функции  $f(w_c) = f((x_c, y_c, s_c)) = s_c$ .

Для того чтобы определить элемент  $e_{12}$ , необходимо сделать следующее. Удалим из  $W$  элемент  $w_c$ . В графическом виде исследуемого минерала с флюидными включениями соединим векторами центр включения выбранного блока Вороного с центрами соседних блоков. Из данных векторов выберем тот, который образует наименьший угол с осью  $OX$ . Именно этот выбранный вектор укажет на параметр  $w_k$ , на основе которого необходимо определить значение функции  $f(w_k)$  и присвоить его элементу  $e_{12}$ .

Описанную процедуру определения вектора с наименьшим углом с осью  $OX$ , указывающим на элемент матрицы  $e_{12}$ , удобно изобразить в следующем виде (рисунок 63).



Рисунок 63 – Вектор с наименьшим углом с осью  $OX$ , указывающий на  $e_{12}$

Далее повторяем последнюю процедуру, только выбранным следует считать блок Вороного, описываемый параметром  $w_k$ , т.е.  $w_c \leftarrow w_k$ . И так до тех пор, пока в качестве выбранного блока Вороного не окажется правый верхний блок, т.е. пока  $w_c$  не станет равным  $\max_{x_i} \max_{y_i} \{w_1, w_2, \dots, w_{N_{BV}}\}$ . Аналогичным способом получают и последующие строки матрицы  $E$ .

Соответствие между графическим видом исследуемого минерала с флюидными включениями (рисунок 62) и структурной матрицей  $E$  схематически можно представить следующим образом (рисунок 64).

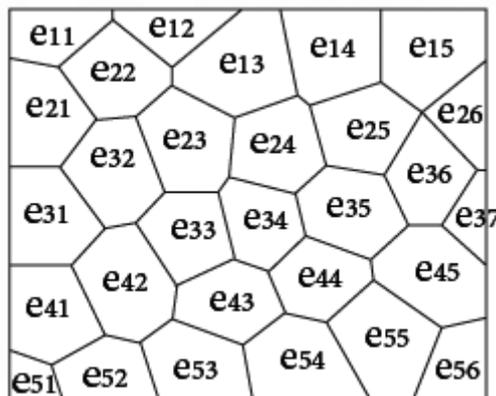


Рисунок 64 – Схематическое соответствие между графическим видом геоматериала и элементами матрицы  $E$

В итоге любую структуру минерала с флюидными включениями в плоскости

можно описать структурной матрицей:

$$E = [e_{ij}], \quad (4.5)$$

где для рассматриваемого геоматериала  $i = 1, 2, \dots, 5$  и  $j = 1, 2, \dots, 5$  (столбцы, в которых присутствуют нулевые элементы – удаляются).

Полученная матрица  $E$  является математической моделью структуры геоматериала третьего порядка сложности в плоскости  $XOY$ .

Порядок построения такой матрицы и способ ее исследования на предмет существования примитивной ячейки, идентичен, что и для вышерассмотренной матрицы  $H$ , являющейся математической моделью структуры минерала в плоскости.

#### **4.3.5. Алгоритм анализа горной породы на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершено-) мультифрактальной структуры**

Горная порода представляет собой геоматериал четвертого порядка сложности, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу минералов с флюидными включениями, каждый из которых принадлежит к одному определенному виду. При этом минералы с флюидными включениями, относящиеся к одному виду, имеют идентичное строение и концентрацию включений.

Итак, горная порода агрегирует некоторое множество минералов с флюидными включениями, каждый из которых содержит геоматериалы первого и второго порядков сложности. Тогда, согласно условиям мультифрактальности, горная порода является геоматериалом природно-мультифрактальной структуры четвертого порядка сложности, если существуют представительные объемы: 1) для всех геоматериалов первого, второго и третьего порядков сложности, входящих в состав исследуемого объекта; 2) геоматериала четвертого порядка сложности как целого. В противном случае, если хотя бы для одного из

перечисленных геоматериалов представительный объем равен нулю, то исследуемая горная порода является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры четвертого порядка сложности.

С учетом вышеизложенного следует – для определения того, к какому типу принадлежит рассматриваемая горная порода (геоматериалу природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры четвертого порядка сложности), необходимо на предмет существования представительного объема исследовать  $N_A$  трехмерных структур, где

$$N_A = n_{OT} + n_{OS} + n_{OF} + 1; \quad (4.6)$$

$n_{OT}$ ,  $n_{OS}$ ,  $n_{OF}$  – соответственно количество геоматериалов третьего, второго и первого порядков сложности, входящих в состав исследуемого объекта;  $n_{OT} = n_{OS} = n_{OF}$ . Единица в выражении (4.6) указывает на трехмерную структуру горной породы. Графический вид такой структуры для горной породы, формируемой двумя видами минералов с флюидными включениями, представлен на рисунке 65.

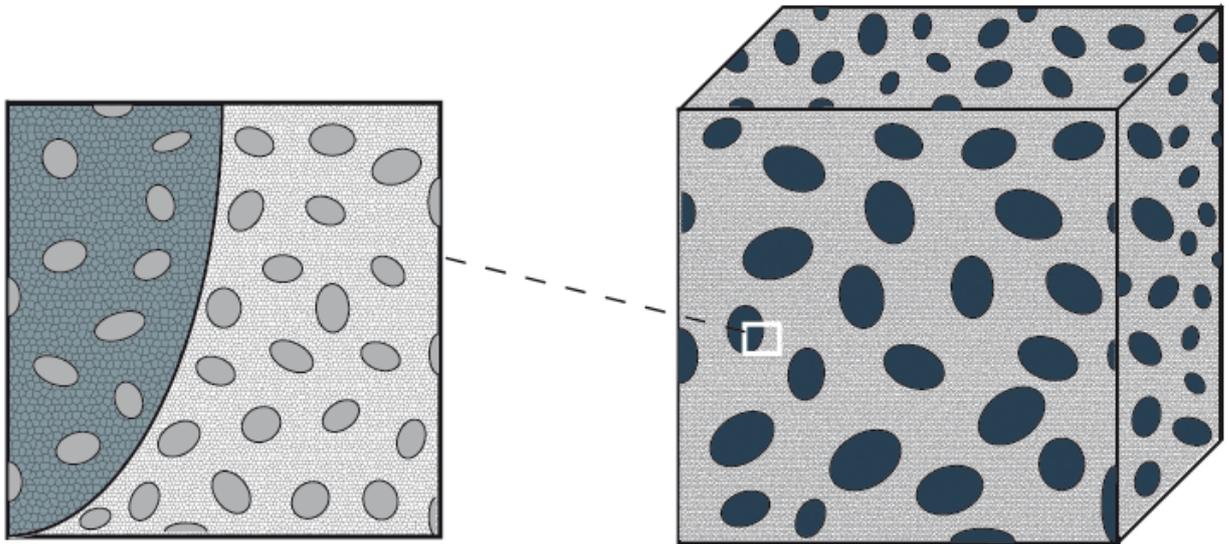


Рисунок 65 – Трехмерная структура горной породы (эллипсами справа обозначены минералы с флюидными включениями, эллипсами слева – включения)

Итак, в отличие от ранее рассмотренных алгоритмов анализа, в разрабатываемом алгоритме имеем дело с исследованием совокупностей

трехмерных структур геоматериалов третьего, второго и первого порядков сложности. Графические виды таких структур были рассмотрены нами выше. Так для геоматериала третьего порядка сложности графический вид трехмерной структуры был представлен на рисунке 55. Для геоматериала второго порядка – на рисунке 56. И наконец, трехмерная структура для геоматериала первого порядка сложности была изображена на рисунке 57.

Полученные результаты позволяют перейти к построению алгоритма анализа горной породы на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры. Попытка совместить исследование всех структур рассматриваемого геоматериала в рамках одной блок-схемы сделает ее трудной для восприятия. Поэтому воспользуемся блок-схемами с несколькими уровнями детализации. С учетом этого алгоритм анализа горной породы на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры на верхнем уровне можно представить в следующем виде (рисунок 66).

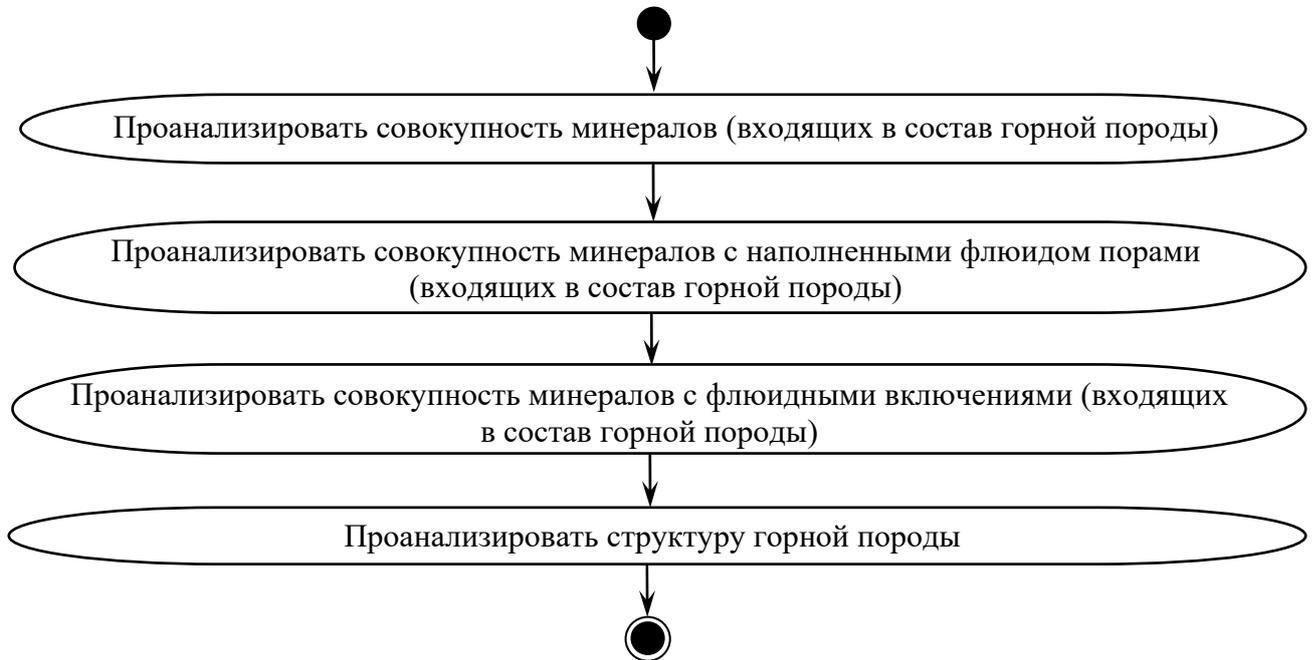


Рисунок 66 – Алгоритм анализа горной породы

Проведем детализацию представленных действий. Детализированная блок-схема первого действия «Проанализировать совокупность минералов (входящих в состав горной породы)» рассматриваемого алгоритма анализа горной породы на

предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры представлена на рисунке 67.

Данная модель деятельности проверяет, существует ли представительный объем для анализируемых образцов минералов, входящих в состав исследуемой горной породы.



Рисунок 67 – Диаграмма действия «Проанализировать совокупность минералов (входящих в состав горной породы)»

Если существует, то управление передается второму действию «Проанализировать совокупность минералов с наполненными флюидом порами (входящих в состав горной породы)» (рисунок 66). В противном случае выдается сообщение о том, что исследуемая горная порода является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры четвертого порядка сложности.

Детализация следующего действия «Проанализировать совокупность минералов с наполненными флюидом порами (входящих в состав горной породы)» проведена на рисунке 68.

Представленная модель деятельности осуществляет проверку исследуемых образцов геоматериалов второго порядка, входящих в состав рассматриваемого объекта, на предмет существования представительного объема.



Рисунок 68 – Диаграмма действия «Проанализировать совокупность минералов с наполненными флюидом порами (входящих в состав породы)»

Если хотя бы для одного из образцов минералов с наполненными флюидом порами такой объем отсутствует, то исследуемая горная порода является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры четвертого порядка

сложности. В противном случае управление передается третьему действию – «Проанализировать совокупность минералов с флюидными включениями (входящих в состав горной породы)», детализация которого представлена на рисунке 69. Как видно из данного рисунка, представленная модель анализирует совокупность соответствующих геоматериалов третьего порядка сложности, входящих в состав исследуемой горной породы на предмет существования представительного объема.



Рисунок 69 – Диаграмма действия «Проанализировать совокупность минералов с флюидными включениями (входящих в состав горной породы)»

В случае отсутствия такого объема хотя бы для одного из проанализированных минералов с флюидными включениями, имеем –

геоматериал незавершенно-мультифрактальной структуры четвертого порядка сложности. Если же для всех образцов геоматериалов третьего порядка сложности из проанализированной совокупности представительный объем существует, то осуществляется переход к заключительному действию «Проанализировать структуру горной породы».

Анализ любой горной породы как целого на предмет установления его типа (геоматериала природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры) полностью зависит от количества видов составляющих ее минералов с флюидными включениями. Допустим таких видов два. Тогда заменим каждый геоматериал третьего порядка сложности в исследуемой породе соответствующими сплошными средами. В результате получим эквивалентную структуру горной породы (рисунок 70).

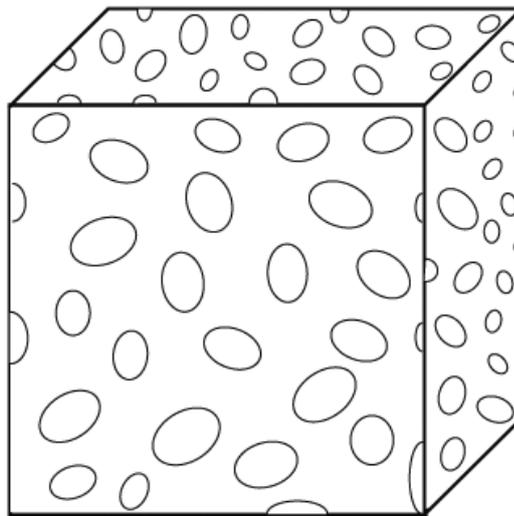


Рисунок 70 – Графический вид эквивалентной структуры горной породы

Графический вид такой структуры и способ ее исследования идентичны, что и для эквивалентной структуры минерала с флюидными включениями, плоский случай которой изображен на рисунке 61. Единственное отличие между ними состоит в используемом типе включения. Так в эквивалентной структуре геоматериала третьего порядка сложности в роли включений выступают полости, наполненные газом (или жидкостью). В свою очередь в рассматриваемой эквивалентной структуре – горные породы, совокупная концентрация которых в

исследуемом объекте меньше совокупной концентрации геоматериалов, принадлежащих другому виду.

Таким образом, если исследуемую горную породу формируют два вида геоматериалов третьего порядка сложности, то рассматриваемое действие будет идентично рассмотренному ранее алгоритму анализа минерала с флюидными включениями, отличаясь только типом включения.

В случае, когда исследуемая горная порода состоит из трех и более видов геоматериалов третьего порядка, то метод анализа горной породы будет несколько иной. Рассмотрим, каким будет процесс анализа горной породы на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры в случае, когда она состоит из трех видов минералов с флюидными включениями. Обозначим данные виды «А», «В» и «С».

В первую очередь необходимо с помощью метода определения представительного объема минерала с флюидными включениями провести исследование структуры горной породы (на предмет существования для нее представительного объема), в которой включениями являются объекты вида «А». При этом объекты вида «В» и «С» рассматриваются как единая сплошная среда. Потом выполнить такое же исследование, только при этом включения – объекты вида «В», а единая среда – геоматериалы вида «А» и «С». И в заключение – с включением вида «С» и сплошной средой, моделирующей геоматериалы вида «А» и «В» как единое целое.

Таким образом, разрабатываемый алгоритм анализа горной породы, состоящей из трех видов минералов с флюидными включениями, ставит в соответствие рассматриваемому геоматериалу три эквивалентных структуры. При этом каждую из данных структур необходимо исследовать на предмет существования представительного объема. Если в результате такого исследования будет установлено, что хотя бы для одной из трех эквивалентных структур представительный объем отсутствует, то для исследуемой горной породы как целого такого объема тоже не существует. В противном случае – наибольшая величина из трех объемов данных структур будет соответствовать

представительному объему рассматриваемой горной породы как целого.

Аналогичным способом функционирует алгоритм анализа горной породы, состоящей из четырех и более видов минералов с флюидными включениями.

Обобщая подходы к исследованию структуры горной породы, состоящей из нескольких видов минералов с флюидными включениями, детализированную блок-схему последнего действия «Проанализировать структуру горной породы» можно представить в следующем виде (рисунки 71 и 72).

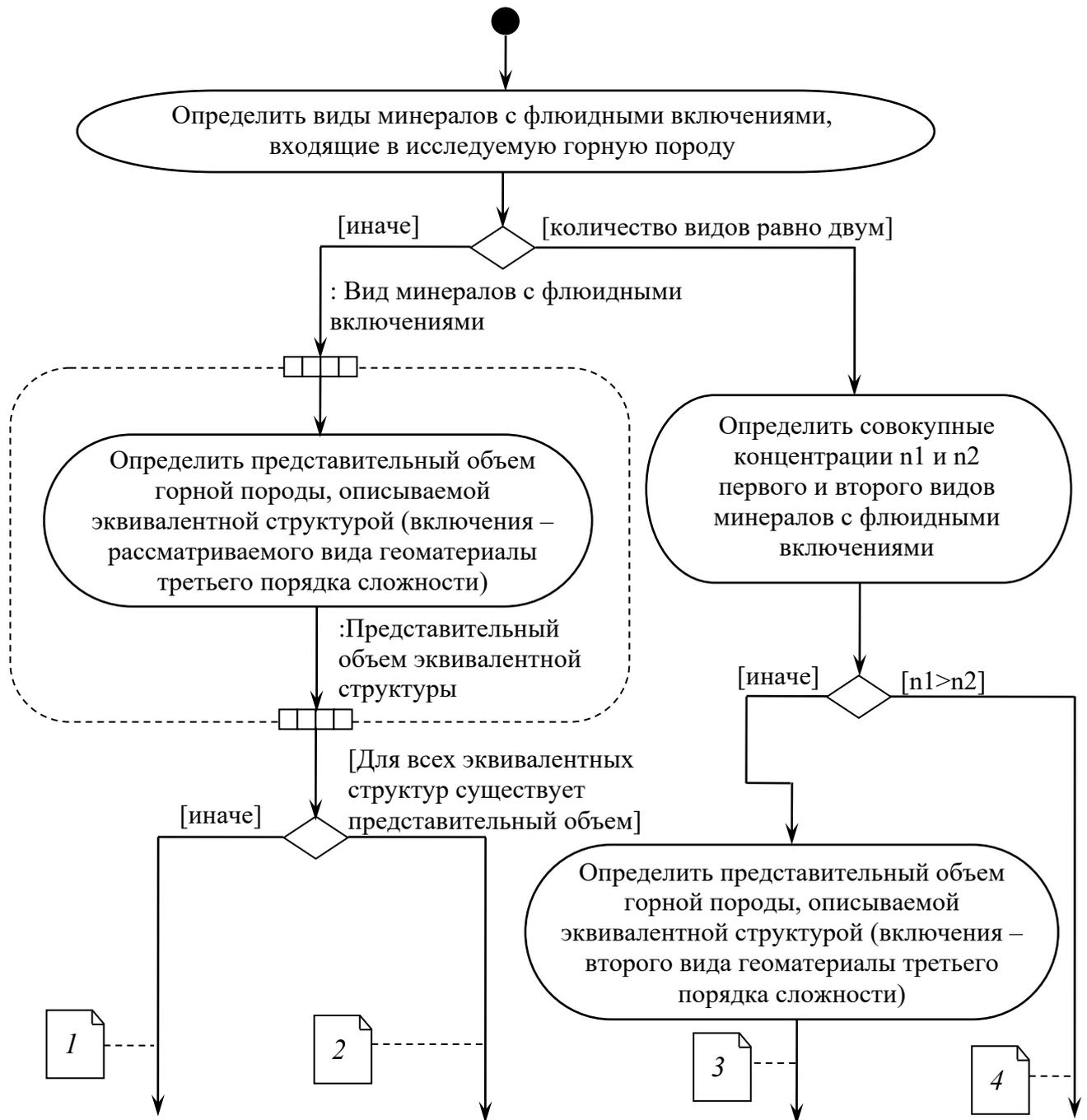


Рисунок 71 – Диаграмма действия «Проанализировать структуру горной породы» (начало)



Рисунок 72 – Диаграмма действия «Проанализировать структуру горной породы»  
(окончание)

#### 4.3.6. Алгоритм анализа породного массива на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры

Породный массив представляет собой геоматериал пятого порядка сложности, состоящий из вплотную прилегающих друг к другу горных пород, каждая из которых принадлежит к одному определенному виду. При этом горные породы, принадлежащие одному виду, имеют идентичное строение.

Итак, исследуемый породный массив агрегирует некоторое множество горных пород, каждая из которых содержит геоматериалы третьего, второго и первого порядков сложности. Тогда, согласно условиям мультифрактальности, рассматриваемый породный массив является геоматериалом природно-мультифрактальной структуры пятого порядка сложности, если существуют представительные объемы: 1) для всех геоматериалов первого, второго, третьего и четвертого порядков сложности, входящих в состав исследуемого объекта; 2) геоматериала пятого порядка сложности как целого. В противном случае, если хотя бы для одного из перечисленных геоматериалов представительный объем равен нулю, то рассматриваемый породный массив является геоматериалом незавершенно-мультифрактальной структуры пятого порядка сложности.

С учетом вышеизложенного следует – для определения того, к какому типу принадлежит исследуемый породный массив (геоматериалу природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры пятого порядка сложности), необходимо на предмет существования представительного объема исследовать  $N_B$  трехмерных структур, т.е.:

$$N_B = n_{OFO} + n_{OT} + n_{OS} + n_{OF} + 1, \quad (4.7)$$

где  $n_{OFO}$ ,  $n_{OT}$ ,  $n_{OS}$ ,  $n_{OF}$  – соответственно количество геоматериалов четвертого, третьего, второго и первого порядков сложности, входящих в состав исследуемого объекта;  $n_{OT} = n_{OS} = n_{OF}$ . Единица в выражении (4.7) указывает на трехмерную структуру породного массива.

Итак, в разрабатываемой модели имеем дело с исследованием совокупностей трехмерных структур геоматериалов четвертого, третьего, второго и первого порядков сложности. Графические виды таких структур были рассмотрены ранее.

Полученные результаты позволяют перейти к разработке алгоритма анализа породного массива на предмет принадлежности к геоматериалам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры. Как и в предыдущем разделе для описания разрабатываемого алгоритма воспользуемся блок-схемами с несколькими уровнями детализации. С учетом этого алгоритм анализа породного массива на верхнем уровне можно представить в следующем виде (рисунок 73).



Рисунок 73 – Алгоритм анализа породного массива

Детализированная схема первого, второго и третьего действий из данного алгоритма эквивалентны действиям «Проанализировать совокупность минералов (входящих в состав горной породы)», «Проанализировать совокупность минералов с наполненными флюидом порами (входящих в состав горной породы)», «Проанализировать совокупность минералов с флюидными включениями (входящих в состав горной породы)» модели действий, представленной на рисунке 66.

Детализация действия «Проанализировать совокупность горных пород (входящих в состав породного массива)» приведена на рисунке 74.



Рисунок 74 – Детализация действия «Проанализировать совокупность горных пород (входящих в состав породного массива)»

В свою очередь последнее действие – «Проанализировать структуру

породного массива» из рассматриваемой блок-схемы верхнего уровня эквивалентно действию «Проанализировать структуру горной породы», отличаясь только типом включения и видом реализационных структур. С учетом этого детализированная диаграмма деятельности последнего действия идентична вышеприведенной диаграмме, изображенной на рисунках 71 и 72, отличаясь только типом геоматериала.

#### **4.3.7. Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам природно- (или незавершенно-) мультифрактальной структуры**

Итак, алгоритмы анализа геоматериалов различных порядков сложности на предмет обладания природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структурой разработаны. Сравнение данных алгоритмов позволяет сделать вывод о большой степени их эквивалентности, отличаясь друг от друга только типом обрабатываемых входных данных – структурных элементов и их атрибутов. Так при анализе геоматериалов первого и второго порядков сложности в качестве входных данных используются параметры таких структурных элементов как зерна и зерна с порами, для остальных геоматериалов – параметры блоков Вороного.

Теперь если учесть, что для обработки параметров данных структурных элементов требуются свои процедуры и функции, используя объектно-ориентированный подход можно прийти к следующему единому алгоритму.

Алгоритм  $A_{msg}$  (Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам природно-мультифрактальной или незавершенно-мультифрактальной структуры)

$A_{msg1}$ . [Определить количество анализируемых структур  $Y$ ]. Проанализировав строение изучаемого геоматериала установить количество структур, которые необходимо исследовать на предмет существования примитивной ячейки.

{ Для минералов –  $Y = 1$ ; минералов с наполненными флюидом порами –  $Y = 2$ ; минералов с флюидными включениями  $Y = 3$ ; горных пород и породных массивов –

*величина  $Y$  зависит от количества видов структурных составляющих слагающих данные геоматериалы.*

$A_{\text{msg}2}$ . [Цикл  $z \leftarrow 1$  до  $Y$ ]. Для переменной  $z$ , принимающей значения от 1 до  $Y$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

$A_{\text{msg}3}$ . [Обработать входные данные графического вида исследуемой структуры]. Произвести обработку входных данных графического вида исследуемого геоматериала.

*{ Для геоматериалов первого и второго порядков сложности данный шаг заключается во введении декартовой системы координат на графическом виде структуры данных объектов.*

*Для всех остальных геоматериалов на данном шаге осуществляется построение  $z$ -й эквивалентной структуры анализируемого геоматериала, ввод декартовой системы координат в  $z$ -й эквивалентной структуре, а также выполняются процедуры по формированию блоков Вороного.*

$A_{\text{msg}4}$ . [Цикл  $d \leftarrow 1$  до 3]. Для счетчика количества плоскостей  $d$ , принимающего значения от 1 до 3, выполнить нижеследующую последовательность действий.

$A_{\text{msg}5}$ . [Определить множество вспомогательных параметров  $A_{c3}$ ]. Для каждого структурного элемента геоматериала определить вспомогательный параметр, состоящий из координаты маркера (центр фрактальной неоднородности или центр включения в блоке Вороного) и характеристического вектора (вектора с наибольшей длиной, исходящий из маркера до точки на границе структурного элемента). Полученные параметры объединить во множество  $A_{c3} = \{(x_1, y_1, l_1), (x_2, y_2, l_2), \dots, (x_N, y_N, l_N)\}$ , где  $N$  – количество элементов в соответствующей плоскости рассматриваемой структуры геоматериала.

*{ Для геоматериалов первого и второго порядков сложности структурными элементами являются соответственно зерно и зерно с порой. Для всех остальных геоматериалов структурным элементом является блок Вороного.*

$A_{\text{msg}6}$ . [Установить длину  $P_g$  геоматериала]. Определить длину  $P_g$  исследуемого геоматериала.

$A_{\text{msg}7}$ . [ $t \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик горизонтального уровня  $t$  равным 1.

$A_{\text{msg}8}$ . [ $k \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик вертикального уровня  $k$  равным 1.

$A_{\text{msg}9}$ . [ $n \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик общего количества структурных элементов  $n$  в геоматериале равным 1.

$A_{\text{msg}10}$ . [Цикл Пока  $n \leq \text{num}(A_{c3})$ ]. Пока  $n$  не превышает количества элементов во множестве  $A_{c3}$ , выполнить нижеследующие шаги.

$A_{\text{msg}11}$ . [Выбрать структурный элемент геоматериала на  $t$ -м горизонтальном и на  $k$ -м вертикальном уровнях]. Из множества  $A_{c3}$  найти  $a_E = (x_E, y_E, l_E) = \min_{x_i} \max_{y_i} \{(x_1, y_1, l_1), (x_2, y_2, l_2), \dots, (x_N, y_N, l_N)\}$ . Полученное значение будет соответствовать маркеру структурного элемента, находящегося на  $t$ -м горизонтальном и на  $k$ -м вертикальном уровнях.

$A_{\text{msg}12}$ . [Определить и добавить параметр  $\mu_n$  к множеству параметров структуры  $M$ ]. Для структурного элемента, находящегося на  $t$ -м горизонтальном и  $k$ -м вертикальном уровнях, определить параметр  $\mu_n$  и добавить его к множеству  $M$ .

*{ Для геоматериала первого порядка сложности –  $\mu_n = g_n$  и  $M = G$ ; для геоматериала второго порядка сложности –  $\mu_n = \lambda_n$  и  $M = \Lambda$ ; для остальных геоматериалов –  $\mu_n = w_n$  и  $M = W$ . }*

$A_{\text{msg}13}$ . [Выбранный структурный элемент последний в горизонтальном уровне?].

Если  $x_E + |l_E| \geq P_g$ , то перейти к шагу 14, иначе к шагу 17.

$A_{\text{msg}14}$ . [ $t \leftarrow t + 1$ ]. Увеличить счетчик горизонтального уровня  $t$  на 1.

$A_{\text{msg}15}$ . [ $k \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик вертикального уровня  $k$  равным 1. Перейти к шагу 19.

$A_{\text{msg}16}$ . [Определить структурные элементы геоматериала, с которыми выбранный элемент, описываемый параметром  $a_E$ , имеет общую границу].

Определить множество  $B = \{(x, y, l) : \sqrt{(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2} \leq |l + l_E|\}$ ,  $B \subset A_{c3}$ .

$A_{\text{msg}17}$ . [Выбрать следующий структурный элемент согласно горизонтальному

вектору трансляции]. Провести векторы, соединяющие маркер выбранного структурного элемента с маркерами структурных элементов из множества  $B$ . Один из полученных векторов, имеющий наименьший угол с осью –  $OX$  (при  $d = 1$  или  $d = 3$ ) или  $OY$  (при  $d = 2$ ), укажет на маркер следующего структурного элемента.

$A_{msg18}$ . [ $k \leftarrow k + 1$ ]. Увеличить счетчик вертикального уровня  $k$  на 1.

$A_{msg19}$ . [Удалить  $a_E$  из  $A_{cэ}$ ]. Удалить параметры описанного структурного элемента из  $A_{cэ}$ .

$A_{msg20}$ . [ $n \leftarrow n + 1$ ]. Увеличить счетчик общего количества структурных элементов в геоматериале на 1.

$A_{msg21}$ . [Конец цикла Пока  $n \leq num(A_{cэ})$ ]. Перейти к шагу 10.

$A_{msg22}$ . [Построить структурную матрицу  $H$ ]. Сформировать структурную матрицу  $H = [h_{ij}]$ , при этом  $h_{ij} = f(i, j, \xi)$ .

{ Для геоматериалов первого порядка сложности –  $f(i, j, \xi) = (l, \varphi)$ , где  $\xi = (r, l, \varphi, i, j)$ ,  $\xi \in G$ . Для геоматериалов второго порядка сложности –  $f(i, j, \xi) = (|l|, \varphi, \gamma)$ , где  $\xi = (r, l, \varphi, \gamma, i, j)$ ,  $\xi \in \Lambda$ . Для остальных геоматериалов:  $f(i, j, \xi) = s$ , где  $\xi = (s, i, j)$ ,  $\xi \in W$ . }

$A_{msg23}$ . [ $L_{PHV} \leftarrow 0$ ]. Линейному размеру примитивной ячейки  $L_{PHV}$  в плоскости с номером  $d$  рассматриваемой  $z$ -й структуры согласно горизонтальному вектору трансляции присвоить начальное значение равное 0.

$A_{msg24}$ . [ $N_{PHV} \leftarrow 2$ ]. Присвоить количеству структурных элементов  $N_{PHV}$  в примитивной ячейке в плоскости с номером  $d$  рассматриваемой  $z$ -й структуры геоматериала, согласно горизонтальному вектору трансляции, значение равное 2.

$A_{msg25}$ . [Цикл Пока ( $N_{PHV} \leq n_{CH}$ ) или ( $L_{PHV} = 0$ )]. Пока значение  $N_{PHV}$  меньше общего количества строк и столбцов  $n_{CH}$  матрицы  $H$  или значение  $L_{PHV}$  равно 0, выполнить нижеследующие шаги.

$A_{msg26}$ . [ $m \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик количества подмножеств совокупности

структурных элементов равным 1.

A<sub>msg27</sub>. [ $i \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик строк  $i$  матрицы  $H$  равным 1.

A<sub>msg28</sub>. [Цикл Пока  $i \leq n_{CH}$ ]. Пока значение счетчика  $i$  меньше общего количества строк и столбцов  $n_{CH}$  матрицы  $H$ , выполнить нижеследующие шаги.

A<sub>msg29</sub>. [ $j \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик столбцов  $j$  матрицы  $H$  равным 1.

A<sub>msg30</sub>. [Цикл Пока  $j \leq (n_{CH} \text{ div } N_{PHV}) \cdot N_{PHV} ?$ ]. Пока значение счетчика  $j$  не превышает максимума обрабатываемых элементов матрицы  $H$  в строке, выполнить нижеследующие шаги.

A<sub>msg31</sub>. [Добавить элемент  $h_{ij}$  в  $Q_m$ ]. Элемент матрицы  $H$ , получаемый пересечением строки с номером  $i$  и столбцом с номером  $j$ , добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером  $m$ .

A<sub>msg32</sub>. [Цикл  $b \leftarrow 1$  до  $N_{PHV}$ ]. Для переменной  $b$ , принимающей значения от 1 до  $N_{PHV}$  выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>msg33</sub>. [Добавить элемент  $h_{i(j+b)}$  в  $Q_m$ ]. Элемент матрицы  $H$ , получаемый пересечением строки с номером  $i$  и столбцом с номером  $j+b$ , добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером  $m$ .

A<sub>msg34</sub>. [Конец Цикла  $b \leftarrow 1$  до  $N_{PHV}^{on}$ ]. Увеличить счетчик  $b$  количества структурных элементов в примитивной ячейке на 1. Перейти к шагу 32.

A<sub>msg35</sub>. [ $m \leftarrow m + 1$ ]. Увеличить счетчик количества подмножеств совокупности структурных элементов  $m$  на 1.

A<sub>msg36</sub>. [ $j \leftarrow j + N_{PHV}$ ]. Перейти на номер столбца, с которого начнется нумерация первого элемента последующего подмножества  $Q_m$ .

A<sub>msg37</sub>. [Конец цикла Пока  $j \leq (n_{CH} \text{ div } N_{PHV}^{on}) \cdot N_{PHV}^{on}$ ]. Перейти к шагу 30.

A<sub>msg38</sub>. [ $i \leftarrow i + 1$ ]. Увеличить счетчик строк  $i$  на 1.

A<sub>msg39</sub>. [Конец цикла Пока  $i \leq n_{CH}$ ]. Перейти к шагу 28.

A<sub>msg40</sub>. [Построить плотности распределения  $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$ ]. Для

каждого  $N_{PHV}$ -элементного подмножества построить плотность распределения.

A<sub>msg</sub>41. [Получить  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$ ]. Сравнить плотности распределения  $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$  с плотностью  $F(\Omega)$ , где  $\Omega \in h_{11}, h_{12}, \dots, h_{\tau\nu}$  ( $\tau, \nu$  – количество строк и столбцов в матрице  $H$ ), при помощи критерия согласия  $\chi^2$ . В результате получим совокупность приведенных значений  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$ .

A<sub>msg</sub>42. [Определить  $\chi^2_{\max}$ ]. Среди приведенных значений  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$  найти максимальное значение.

A<sub>msg</sub>43. [ $\chi^2_{\max} < (\chi^2)_n$ ?]. Если  $\chi^2_{\max} < (\chi^2)_n$  (для одной степени свободы и уровня значимости  $\alpha = 0,05$  нормативное значение  $(\chi^2)_n = 3,841$ ), то перейти к шагу 44, иначе к шагу 46.

A<sub>msg</sub>44. [Определить линейные размеры  $L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m}$ ]. Вычислить линейные размеры  $L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m}$ , формируемые совокупностью структурных элементов, описываемых подмножествами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ .

A<sub>msg</sub>45. [ $L_{PHV} \leftarrow \max(L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m})$ ]. Линейному размеру примитивной ячейки  $L_{PHV}$  в плоскости с номером  $d$  рассматриваемой  $z$ -й структуры согласно горизонтальному вектору трансляции присвоить значение равное  $\max(L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m})$ . Перейти к шагу 47.

A<sub>msg</sub>46. [ $N_{PHV} \leftarrow N_{PHV} + 1$ ]. Увеличить количество структурных элементов  $N_{PHV}$  в примитивной ячейке на 1.

A<sub>msg</sub>47. [Конец Цикла Пока ( $N_{PHV} \leq n_{CH}$ ) или ( $L_{PHV} = 0$ )]. Перейти к шагу 25.

A<sub>msg</sub>48. [ $L_{PHV} = 0$ ?]. Если  $L_{PHV} = 0$ , то перейти к шагу 49, иначе к шагу 50.

A<sub>msg</sub>49. [ $V_{np}[z] \leftarrow 0$ ]. Представительному объему геоматериала, описываемой  $z$ -й структурой, присвоить значение равное 0. Перейти к шагу 85.

A<sub>msg</sub>50. [ $H \leftarrow H^T$ ]. Транспонировать структурную матрицу  $H$ .

A<sub>msg</sub>51. [ $L_{PVV} \leftarrow 0$ ]. Линейному размеру примитивной ячейки  $L_{PVV}$  в плоскости с

номером  $d$  рассматриваемой  $z$ -й структуры, согласно вертикальному вектору трансляции, присвоить начальное значение равное 0.

A<sub>msg52</sub>. [ $N_{PVV} \leftarrow 2$ ]. Присвоить количеству структурных элементов  $N_{PVV}$  в примитивной ячейке в плоскости с номером  $d$  рассматриваемой  $z$ -й структуры геоматериала, согласно горизонтальному вектору трансляции, значение равное 2.

A<sub>msg53</sub>. [Цикл Пока ( $N_{PVV} \leq n_{CH}$ ) или ( $L_{PVV} = 0$ )]. Пока значение  $N_{PVV}$  меньше общего количества строк и столбцов  $n_{CH}$  матрицы  $H$  или значение  $L_{PVV}$  равно 0, выполнить нижеследующие шаги.

A<sub>msg54</sub>. [ $m \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик количества подмножеств совокупности структурных элементов равным 1.

A<sub>msg55</sub>. [ $i \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик строк  $i$  матрицы  $H$  равным 1.

A<sub>msg56</sub>. [Цикл Пока  $i \leq n_{CH}$ ]. Пока значение счетчика  $i$  меньше общего количества строк и столбцов  $n_{CH}$  матрицы  $H$ , выполнить нижеследующие шаги.

A<sub>msg57</sub>. [ $j \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик столбцов  $j$  матрицы  $H$  равным 1.

A<sub>msg58</sub>. [Цикл Пока  $j \leq (n_{CH} \text{ div } N_{PVV}) \cdot N_{PVV}$  ?]. Пока значение счетчика  $j$  не превышает максимума обрабатываемых элементов матрицы  $H$  в строке, выполнить нижеследующие шаги.

A<sub>msg59</sub>. [Добавить элемент  $h_{ij}$  в  $Q_m$ ]. Элемент матрицы  $H$ , получаемый пересечением строки с номером  $i$  и столбцом с номером  $j$ , добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером  $m$ .

A<sub>msg60</sub>. [Цикл  $b \leftarrow 1$  до  $N_{PVV}$ ]. Для переменной  $b$ , принимающей значения от 1 до  $N_{PVV}$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>msg61</sub>. [Добавить элемент  $h_{i(j+b)}$  в  $Q_m$ ]. Элемент матрицы  $H$ , получаемый пересечением строки с номером  $i$  и столбцом с номером  $j+b$ , добавить в подмножество совокупности структурных элементов с номером  $m$ .

A<sub>msg62</sub>. [Конец Цикла  $b \leftarrow 1$  до  $N_{PVV}^{on}$ ]. Увеличить счетчик  $b$  количества

структурных элементов в примитивной ячейке на 1. Перейти к шагу 60.

A<sub>msg63</sub>. [ $m \leftarrow m + 1$ ]. Увеличить счетчик  $m$  количества подмножеств совокупности структурных элементов на 1.

A<sub>msg64</sub>. [ $j \leftarrow j + N_{PVV}$ ]. Перейти на номер столбца, с которого начнется нумерация первого элемента последующего подмножества  $Q_m$ .

A<sub>msg65</sub>. [Конец цикла Пока  $j \leq (n_{CH} \text{ div } N_{PVV}^{on}) \cdot N_{PVV}^{on}$ ]. Перейти к шагу 58.

A<sub>msg66</sub>. [ $i \leftarrow i + 1$ ]. Увеличить счетчик строк  $i$  на 1.

A<sub>msg67</sub>. [Конец цикла Пока  $i \leq n_{CH}$ ]. Перейти к шагу 56.

A<sub>msg68</sub>. [Построить плотности распределения  $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$ ]. Для каждого  $N_{PVV}$ -элементного подмножества построить плотность распределения.

A<sub>msg69</sub>. [Получить  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$ ]. Сравнить плотности распределения  $F(Q_1), F(Q_2), \dots, F(Q_m)$  с плотностью  $F(\Omega)$ , где  $\Omega \in h_{11}, h_{12}, \dots, h_{\tau\nu}$  ( $\tau, \nu$  – количество строк и столбцов в матрице  $H$ ), при помощи критерия согласия  $\chi^2$ . В результате получим совокупность приведенных значений  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$ .

A<sub>msg70</sub>. [Определить  $\chi^2_{\max}$ ]. Среди приведенных значений  $\chi^2_1, \chi^2_2, \dots, \chi^2_m$  найти максимальное значение.

A<sub>msg71</sub>. [ $\chi^2_{\max} \leq (\chi^2)_n$  ?]. Если  $\chi^2_{\max} \leq (\chi^2)_n$  (для одной степени свободы и уровня значимости  $\alpha = 0,05$  нормативное значение  $(\chi^2)_n = 3,841$ ), то перейти к шагу 72, иначе к шагу 74.

A<sub>msg72</sub>. [Определить линейные размеры  $L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m}$ ]. Вычислить линейные размеры  $L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m}$ , формируемые совокупностью структурных элементов, описываемых подмножествами  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ .

A<sub>msg73</sub>. [ $L_{PVV} \leftarrow \max(L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m})$ ]. Линейному размеру примитивной ячейки  $L_{PVV}$  в плоскости с номером  $d$  рассматриваемой  $z$ -й структуры согласно вертикальному вектору трансляции присвоить значение равное  $\max(L_{Q_1}, L_{Q_2}, \dots, L_{Q_m})$ . Перейти к шагу 75.

A<sub>msg</sub>74. [ $N_{P_{VV}} \leftarrow N_{P_{VV}} + 1$ ]. Увеличить количество структурных элементов  $N_{P_{VV}}$  в примитивной ячейке на 1.

A<sub>msg</sub>75. [Конец Цикла Пока ( $N_{P_{VV}} \leq n_{CH}$ ) или ( $L_{P_{VV}} = 0$ )]. Перейти к шагу 53.

A<sub>msg</sub>76. [ $L_{P_{VV}} = 0?$ ]. Если  $L_{P_{VV}} = 0$ , то перейти к шагу 77, иначе к шагу 78.

A<sub>msg</sub>77. [ $V_{np}[z] \leftarrow 0$ ]. Представительному объему геоматериала, описываемой  $z$ -й структурой, присвоить значение равное 0. Перейти к шагу 85.

A<sub>msg</sub>78. [ $L_{PHV} > L_{P_{VV}}?$ ]. Если размер примитивной ячейки  $L_{PHV}$  рассматриваемой  $z$ -й структуры, согласно горизонтальному вектору трансляции больше величины  $L_{P_{VV}}$ , то перейти к шагу 79, иначе к шагу 81.

A<sub>msg</sub>79. [ $N_{ян}[d] \leftarrow N_{PHV}$ ]. Количеству структурных элементов  $N_{ян}[d]$  в примитивной ячейке исследуемой  $z$ -й структуры в плоскости  $d$  присвоить величину  $N_{PHV}$ .

A<sub>msg</sub>80. [ $L_{nen}[d] \leftarrow L_{PHV}$ ]. Линейному размеру  $L_{nen}[d]$  примитивной ячейки  $z$ -й структуры в плоскости  $d$  присвоить значение  $L_{PHV}$ . Перейти к шагу 83.

A<sub>msg</sub>81. [ $N_{ян}[d] \leftarrow N_{P_{VV}}$ ]. Количеству структурных элементов  $N_{ян}[d]$  в примитивной ячейке  $z$ -й структуры в плоскости  $d$  присвоить величину  $N_{P_{VV}}$ .

A<sub>sgm</sub>82. [ $L_{nen}[d] \leftarrow L_{P_{VV}}$ ]. Линейному размеру  $L_{nen}[d]$  примитивной ячейки  $z$ -й структуры в плоскости  $d$  присвоить значение  $L_{P_{VV}}$ .

A<sub>msg</sub>83. [Конец Цикла  $d \leftarrow 1$  до 3]. Увеличить счетчик количества плоскостей на 1. Перейти к шагу 3.

A<sub>msg</sub>84. [ $V_{np}[z] \leftarrow 2 \cdot (L_{nen}[1] \cdot L_{nen}[2] \cdot L_{nen}[3])$ ]. Представительному объему геоматериала, описываемого  $z$ -й структурой, присвоить величину удвоенного произведения линейных размеров примитивных ячеек в трех плоскостях.

A<sub>msg</sub>85. [Конец Цикла  $z \leftarrow 1$  до  $Y$ ]. Увеличить счетчик  $z$  количества анализируемых структур на 1. Перейти к шагу 2.

A<sub>msg</sub>86. [ $x \leftarrow 1$ ]. Булевой переменной  $x$ , указывающей на наличие примитивной

- ячейки во всех анализируемых структурах геоматериала, присвоить значение 1.
- A<sub>msg</sub>87. [Цикл  $z \leftarrow 1 \text{ до } Y$ ]. Для переменной  $z$ , принимающей значения от 1 до  $Y$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.
- A<sub>msg</sub>88. [ $V_{np}[z] = 0 ?$ ]. Если  $V_{np}[z] = 0$ , то перейти к шагу 89, иначе к шагу 90.
- A<sub>msg</sub>89. [ $x \leftarrow 0$ ]. Булевой переменной  $x$  присвоить 0.
- A<sub>msg</sub>90. [Конец Цикла  $z \leftarrow 1 \text{ до } Y$ ]. Увеличить счетчик  $z$  количества анализируемых структур на 1. Перейти к шагу 87.
- A<sub>msg</sub>91. [ $x = 1 ?$ ]. Если  $x = 1$ , то перейти к шагу 92, иначе к шагу 93.
- A<sub>msg</sub>92. [*Вывод*: Изучаемый объект обладает природно-мультифрактальной структурой, и для его исследования следует использовать механику сплошной среды]. Перейти к шагу 94.
- A<sub>msg</sub>93. [*Вывод*: Изучаемый объект обладает незавершенно-мультифрактальной структурой, и для его исследования следует использовать мезомеханику].
- A<sub>msg</sub>94. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

#### **4.3.8. Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам, адекватно описываемым изотропной или анизотропной сплошной средой**

Вторая структурная особенность, определяющая процесс выбора теории моделирования, связана с существованием или отсутствием возможности описания разрушаемого геоматериала сплошной средой, свойства которой не зависят от направления в точке. По отношению к проявлению данной возможности существующие геоматериалы можно разделить на два вида – статистически-изотропные и статистически-анизотропные.

В строении геоматериалов первого вида преимущественная ориентация структурных элементов не наблюдается, вследствие чего, физические свойства таких объектов одинаковы по всем направлениям. Установлено, что разработку

математических моделей разрушения статистически-изотропных геоматериалов, по причине высокой степени адекватности при малой стоимости разработки, следует производить в рамках одной из теорий, в той или иной степени основанных на классических методах механики сплошной среды.

У геоматериалов второго вида структурные элементы на одном из масштабных уровней обладают преимущественной ориентацией. Вследствие этого физические свойства таких геоматериалов зависят от направления, а потому для их моделирования необходимо использовать анизотропную сплошную среду. Для исследования таких статистически анизотропных геоматериалов классические методы механики твердого деформируемого тела, описывающих объекты в виде изотропных сред, не дают адекватных количественных оценок процессов разрушения. По этой причине разработку математических моделей разрушения статистически-анизотропных геоматериалов производят в рамках теорий, в которых свойства исследуемого объекта задаются тензорными величинами, позволяющими учесть наличие преимущественной ориентации.

Таким образом, при определении теории моделирования необходимо установить, принадлежит ли разрушаемый геоматериал к объектам, адекватно описываемым изотропной или анизотропной сплошной средой.

На данный момент наличие или отсутствие зависимости свойств от направления устанавливается посредством проведения опытов над макрообразцами. Однако, как указывалось ранее, при проведении опытов наблюдается масштабный эффект, вследствие чего выявление стохастической изотропности или анизотропности исследуемых геоматериалов в большинстве случаев не представляется возможным.

В сложившейся ситуации для решения данной проблемы требуется разработка алгоритма анализа структуры геоматериала произвольного порядка сложности на предмет возможности адекватного описания моделью изотропной или анизотропной сплошной среды. Проводя анализ подробно описанных ранее структур геоматериалов, а также сформулированных выше способов их исследования, данный алгоритм анализа можно представить в следующем виде.

Алгоритм  $A_{isg}$  (Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам, адекватно описываемым изотропной или анизотропной сплошной средой)

$A_{isg1}$ . [Определить количество анализируемых структур  $Y$ ]. Проанализировав строение изучаемого геоматериала установить количество структур, которые необходимо исследовать на предмет существования примитивной ячейки.

*{ Для минералов –  $Y = 1$ ; минералов с наполненными флюидом порами –  $Y = 2$ ; минералов с флюидными включениями  $Y = 3$ ; горных пород и породных массивов – величина  $Y$  зависит от количества видов структурных составляющих, слагающих данные геоматериалы. }*

$A_{isg2}$ . [Цикл  $z \leftarrow 1$  до  $Y$ ]. Для переменной  $z$ , принимающей значения от 1 до  $Y$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

$A_{isg3}$ . [Обработать входные данные графического вида исследуемой структуры]. Произвести обработку входных данных графического вида исследуемого геоматериала.

*{ Для геоматериалов первого и второго порядков сложности данный шаг заключается во введении декартовой системы координат на графическом виде структуры данных объектов.*

*Для всех остальных геоматериалов на данном шаге осуществляется построение  $z$ -й эквивалентной структуры анализируемого геоматериала, ввод декартовой системы координат в  $z$ -й эквивалентной структуре, а также выполняются процедуры по формированию блоков Вороного. }*

$A_{isg4}$ . [Цикл  $d \leftarrow 1$  до 3]. Для счетчика количества плоскостей  $d$ , принимающего значения от 1 до 3, выполнить нижеследующую последовательность действий.

$A_{isg5}$ . [Определить множество вспомогательных параметров  $A_{c9}$ ]. Для каждого структурного элемента геоматериала определить вспомогательный параметр, состоящий из координаты маркера (центр фрактальной неоднородности или центр включения в блоке Вороного) и характеристического вектора (вектора с наибольшей длиной, исходящий из маркера до точки на границе структурного

элемента). Полученные параметры объединить во множество  $A_{cэ} = \{(x_1, y_1, l_1), (x_2, y_2, l_2), \dots, (x_N, y_N, l_N)\}$ , где  $N$  – количество элементов в соответствующей плоскости рассматриваемой структуры геоматериала.

*{ Для геоматериалов первого и второго порядков сложности структурными элементами являются соответственно зерно и зерно с порой. Для всех остальных геоматериалов структурным элементом является блок Вороного. }*

A<sub>isg6</sub>. [Установить длину  $P_g$  геоматериала]. Определить длину  $P_g$  исследуемого геоматериала.

A<sub>isg7</sub>. [ $t \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик горизонтального уровня  $t$  равным 1.

A<sub>isg8</sub>. [ $k \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик вертикального уровня  $k$  равным 1.

A<sub>isg9</sub>. [ $n \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик общего количества структурных элементов  $n$  в геоматериале равным 1.

A<sub>isg10</sub>. [Цикл Пока  $n \leq \text{num}(A_{cэ})$ ]. Пока  $n$  не превышает количества элементов во множестве  $A_{cэ}$ , выполнить нижеследующие шаги.

A<sub>isg11</sub>. [Выбрать структурный элемент геоматериала на  $t$ -м горизонтальном и на  $k$ -м вертикальном уровнях]. Из множества  $A_{cэ}$  найти  $a_E = (x_E, y_E, l_E) = \min_{x_i} \max_{y_i} \{(x_1, y_1, l_1), (x_2, y_2, l_2), \dots, (x_N, y_N, l_N)\}$ . Полученное значение будет соответствовать маркеру структурного элемента, находящегося на  $t$ -м горизонтальном и на  $k$ -м вертикальном уровнях.

A<sub>isg12</sub>. [Определить и добавить параметр  $\mu_n$  к множеству параметров структуры  $M$ ]. Для структурного элемента, находящегося на  $t$ -м горизонтальном и  $k$ -м вертикальном уровнях, определить параметр  $\mu_n$  и добавить его к множеству  $M$ .

*{ Для геоматериала первого порядка сложности –  $\mu_n = g_n$  и  $M = G$ ; для геоматериала второго порядка сложности –  $\mu_n = \lambda_n$  и  $M = \Lambda$ ; для остальных геоматериалов –  $\mu_n = w_n$  и  $M = W$ . }*

A<sub>isg13</sub>. [Выбранный структурный элемент последний в горизонтальном уровне?].

Если  $x_E + |l_E| \geq P_g$ , то перейти к шагу 15, иначе к шагу 17.

A<sub>isg</sub>14. [ $t \leftarrow t + 1$ ]. Увеличить счетчик горизонтального уровня  $t$  на 1.

A<sub>isg</sub>15. [ $k \leftarrow 1$ ]. Установить счетчик вертикального уровня  $k$  равным 1. Перейти к шагу 19.

A<sub>isg</sub>16. [Определить структурные элементы геоматериала, с которыми выбранный элемент, описываемый параметром  $a_E$ , имеет общую границу]. Определить множество  $B = \{(x, y, l) : \sqrt{(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2} \leq |l + l_E|\}$ ,  $B \subset A_{c_9}$ .

A<sub>isg</sub>17. [Выбрать следующий структурный элемент согласно горизонтальному вектору трансляции]. Провести векторы, соединяющие маркер выбранного структурного элемента с маркерами структурных элементов из множества  $B$ . Один из полученных векторов, имеющий наименьший угол с осью –  $OX$  (при  $d = 1$  или  $d = 3$ ) или  $OY$  (при  $d = 2$ ), укажет на маркер следующего структурного элемента.

A<sub>isg</sub>18. [ $k \leftarrow k + 1$ ]. Увеличить счетчик вертикального уровня  $k$  на 1.

A<sub>isg</sub>19. [Удалить  $a_E$  из  $A_{c_9}$ ]. Удалить параметры описанного структурного элемента из  $A_{c_9}$ .

A<sub>isg</sub>20. [ $n \leftarrow n + 1$ ]. Увеличить счетчик общего количества структурных элементов в геоматериале на 1.

A<sub>isg</sub>21. [Конец цикла Пока  $n \leq \text{num}(A_{c_9})$ ]. Перейти к шагу 10.

A<sub>isg</sub>22. [Построить структурную матрицу  $H$ ]. Сформировать структурную матрицу  $H = [h_{ij}]$ , при этом  $h_{ij} = f(i, j, \xi)$ .

{ Для геоматериалов первого порядка сложности –  $f(i, j, \xi) = (l, \varphi)$ , где  $\xi = (r, l, \varphi, i, j)$ ,  $\xi \in G$ . Для геоматериалов второго порядка сложности –  $f(i, j, \xi) = (|l|, \varphi, \gamma)$ , где  $\xi = (r, l, \varphi, \gamma, i, j)$ ,  $\xi \in \Lambda$ . Для остальных геоматериалов:  $f(i, j, \xi) = s$ , где  $\xi = (s, i, j)$ ,  $\xi \in W$ . }

A<sub>isg</sub>23. [Построить плотность распределения  $F(\Omega)$ ]. Для множества  $\Omega \in h_{11}, h_{12}, \dots, h_{\tau\nu}$  ( $\tau, \nu$  – количество строк и столбцов в матрице  $H$ ) построить

плотность распределения  $F(\Omega)$ .

A<sub>isg</sub>24. [Получить  $\chi^2_E$ ]. Сравнить плотность распределения  $F(\Omega)$  с плотностью

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad \text{равномерно распределенной величины при помощи}$$

критерия согласия  $\chi^2$ . В результате получим приведенное значение  $\chi^2_E$ .

A<sub>isg</sub>25. [ $\chi^2_E < (\chi^2)_n$ ?]. Если  $\chi^2_E < (\chi^2)_n$  (для одной степени свободы и уровня значимости  $\alpha = 0,05$  нормативное значение  $(\chi^2)_n = 3,841$ ), то перейти к шагу 26, иначе к шагу 27.

A<sub>isg</sub>26. [ $T[d] \leftarrow 1$ ]. Элементу массива индексов  $T[d]$  булевого типа, указывающему на изотропность анализируемой  $z$ -й структуры геоматериала в  $d$ -й плоскости, присвоить значение равное 1. Перейти к шагу 28.

A<sub>isg</sub>27. [ $T[d] \leftarrow 0$ ]. Элементу массива индексов  $T[d]$  булевого типа, указывающему на изотропность анализируемой  $z$ -й структуры геоматериала в  $d$ -й плоскости, присвоить значение равное 0.

A<sub>isg</sub>28. [Конец Цикла  $d \leftarrow 1$  до 3]. Увеличить счетчик количества плоскостей на 1. Перейти к шагу 3.

A<sub>isg</sub>29. [ $Q[z] \leftarrow T[1] \text{ и } T[2] \text{ и } T[3]$ ]. Элементу массива индексов  $Q[z]$  булевого типа, указывающему на изотропность анализируемой  $z$ -й структуры геоматериала в целом, присвоить результат тернарной конъюнкции  $T[1] \text{ и } T[2] \text{ и } T[3]$ .

A<sub>isg</sub>30. [Конец Цикла  $z \leftarrow 1$  до  $Y$ ]. Увеличить счетчик  $z$  количества анализируемых структур на 1. Перейти к шагу 2.

A<sub>isg</sub>31. [ $x \leftarrow 1$ ]. Булевой переменной  $x$ , указывающей на изотропность всех исследуемых структур геоматериала, присвоить значение 1.

A<sub>isg</sub>32. [Цикл  $z \leftarrow 1$  до  $Y$ ]. Для переменной  $z$ , принимающей значения от 1 до  $Y$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>isg</sub>33. [ $Q[z] = 0$ ?]. Если  $Q[z] = 0$ , то перейти к шагу 34, иначе к шагу 35.

A<sub>isg</sub>34. [ $x \leftarrow 0$ ]. Булевой переменной  $x$  присвоить 0.

A<sub>isg</sub>35. [Конец Цикла  $z \leftarrow 1 \text{ до } Y$ ]. Увеличить счетчик  $z$  количества анализируемых структур на 1. Перейти к шагу 32.

A<sub>isg</sub>36. [ $x = 1 ?$ ]. Если  $x = 1$ , то перейти к шагу 37, иначе к шагу 38.

A<sub>isg</sub>37. [*Вывод*: Изучаемый объект адекватно описывается изотропной сплошной средой, и для его исследования следует использовать механику изотропной сплошной среды]. Перейти к шагу 39.

A<sub>isg</sub>38. [*Вывод*: Изучаемый объект адекватно описывается анизотропной сплошной средой, и для его исследования следует использовать механику анизотропной сплошной среды].

A<sub>isg</sub>39. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

#### **4.3.9. Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам, адекватно описываемым однородной или неоднородной сплошной средой**

Третья структурная особенность, определяющая процесс выбора теории моделирования, связана с возможностью представления разрушаемого геоматериала в виде сплошной среды с одинаковыми свойствами во всех точках. Если такое представление возможно, то разрушаемый геоматериал будем называть статистически-однородным, в противном случае – статистически-неоднородным.

При разработке математических моделей разрушения статистически-однородных геоматериалов, представляемых в виде сплошной среды с одинаковыми свойствами во всех точках, усредненные уравнения совпадают с локальными (записанными относительно точки). Данное обстоятельство позволяет в большинстве случаев получить точное аналитическое решение поставленной задачи, ограничившись использованием классического математического анализа, в рамках которого разрабатываемые математические

модели сводятся к локальным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Математические модели разрушения статистически-неоднородных геоматериалов не могут быть сведены к локальным уравнениям, и при аналитическом решении требуют учета внутреннего и внешнего полей напряжений (деформаций), усреднения по ансамблю полей неоднородностей и др.

Таким образом, при выборе теории моделирования необходимо отличать геоматериалы, адекватно описываемые однородной или неоднородной сплошной средой.

К сожалению, на данный момент исследователи при выборе типа сплошной среды для разрушаемого геоматериала руководствуются только эмпирическим подходом, ошибочно не принимая во внимание анализ плотности распределения структурных элементов рассматриваемого объекта. По этой причине был разработан следующий алгоритм анализа геоматериала на предмет его принадлежности к стохастически-однородным или стохастически-неоднородным геоматериалам.

Алгоритм  $A_{osg}$  (Алгоритм анализа геоматериала на предмет принадлежности к объектам, адекватно описываемым однородной или неоднородной сплошной средой)

$A_{osg1}$ . [Ввод  $V_{III}$ ]. Ввести величину объема  $V_{III}$ , в котором протекает изучаемый процесс.

$A_{osg2}$ . [Определить величину представительного объема  $V_{PP}$  геоматериала]. С помощью алгоритма  $A_{msg}$  определить представительный объем исследуемого геоматериала  $V_{PP}$ .

$A_{osg3}$ . [ $V_{III} < V_{PP}$ ?] Если исследуемый процесс, протекает в объеме меньшем чем представительный, то перейти к шагу 4, иначе к шагу 5.

$A_{osg4}$ . [Вывод: Изучаемый объект адекватно описывается неоднородной сплошной средой, и для его исследования следует использовать механику неоднородной сплошной среды]. Перейти к шагу 6.

$A_{osg5}$ . [Вывод: Изучаемый объект адекватно описывается однородной сплошной средой, и для его исследования следует использовать механику однородной сплошной среды].

$A_{osg6}$ . [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

#### 4.3.10. Алгоритмы идентификации теорий моделирования

Итак, главные структурные особенности, определяющие процесс выбора теории моделирования рассмотрены. Все выше разработанные алгоритмы были направлены на установление совокупности теорий моделирования, которые будут адекватно описывать структуру исследуемых геоматериалов. В тоже время для некоторых отдельных теорий также могут быть разработаны алгоритмы, позволяющие однозначно установить, даст ли их применение в рамках рассматриваемой научно-практической задачи положительный результат в виде высокоадекватной математической модели разрушения геоматериалов. При этом необходимо учитывать, что выполнение данных алгоритмов идентификации существенно опирается на входные данные, полученные либо экспериментальным способом, либо путем обработки результатов других исследователей.

Проводя анализ работ [157-159, 194, 201, 223, 224, 228 и др.], были разработаны следующие алгоритмы идентификации теорий моделирования.

Алгоритм  $A_{mtc}$  (Алгоритм идентификации математической теории трещин)

$A_{mtc1}$ . [Определить количество трещин  $N_T$  в исследуемом геоматериале].

Посредством экспериментальных методов исследований определить количество трещин  $N_T$  в исследуемом геоматериале.

$A_{mtc2}$ . [Определить величину линейных размеров  $L_{nen}[1]$ ,  $L_{nen}[2]$ ,  $L_{nen}[3]$

примитивных ячеек рассматриваемого геоматериала в трех плоскостях]. С

помощью алгоритма  $A_{msg}$  определить линейные размеры  $L_{nen}[1]$ ,  $L_{nen}[2]$ ,  $L_{nen}[3]$

примитивных ячеек исследуемого геоматериала в плоскостях  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ .

A<sub>mtc3</sub>. [ $x \leftarrow 0$ ]. Булевой переменной  $x$ , указывающей на отсутствие в исследуемом геоматериале трещин, размеры которых превышают линейные размеры примитивных ячеек, присвоить значение 0.

A<sub>mtc4</sub>. [Цикл  $i \leftarrow 1 \text{ до } N_T$ ]. Для переменной  $i$ , принимающей значения от 1 до  $N_T$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>mtc5</sub>. [Определить  $l_{xoy}[i]$ ]. Определить длину  $l_{xoy}$   $i$ -й трещины в плоскости  $XOY$ .

A<sub>mtc6</sub>. [Определить  $l_{zoy}[i]$ ]. Определить длину  $l_{zoy}$   $i$ -й трещины в плоскости  $ZOY$ .

A<sub>mtc7</sub>. [Определить  $l_{xoz}[i]$ ]. Определить длину  $l_{xoz}$   $i$ -й трещины в плоскости  $XOZ$ .

A<sub>mtc8</sub>. [ $(l_{xoy} \geq L_{нен}[1]) \text{ и } (l_{zoy}[i] \geq L_{нен}[2]) \text{ и } (l_{xoz}[i] \geq L_{нен}[3]) ?$ ]. Если размеры трещин превышают или равны линейным размерам примитивных ячеек, то перейти к шагу 9 иначе к шагу 10.

A<sub>mtc9</sub>. [ $x \leftarrow 1$ ]. Булевой переменной  $x$  присвоить значение равное 1.

A<sub>mtc10</sub>. [Конец Цикла  $i \leftarrow 1 \text{ до } N_T$ ]. Увеличить счетчик  $i$  количества трещин в исследуемом геоматериале на 1. Перейти к шагу 4.

A<sub>mtc11</sub>. [ $x = 1 ?$ ]. Если  $x = 1$ , то перейти к шагу 12 иначе к шагу 13.

A<sub>mtc12</sub>. [*Вывод*: При разработке математической модели разрушения следует использовать математическую теорию трещин]. Перейти к шагу 14.

A<sub>mtc13</sub>. [*Вывод*: При разработке математической модели разрушения не следует использовать математическую теорию трещин].

A<sub>mtc14</sub>. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

Алгоритм A<sub>ilmd</sub> (Алгоритм идентификации линейной и нелинейной механики разрушения)

A<sub>ilmd1</sub>. [Определить  $Z_{II}$ ]. Посредством экспериментальных методов исследований определить длину  $Z_{II}$  зоны пластичности.

A<sub>ilmd2</sub>. [Определить  $\sigma_{III}$ ]. Посредством экспериментальных методов исследований установить предел текучести  $\sigma_{III}$  исследуемого геоматериала.

A<sub>ilmd3</sub>. [Определить  $l$ ]. Посредством экспериментальных исследований измерить длину трещины  $l$  в рассматриваемом геоматериале.

A<sub>ilmd4</sub>. [Определить  $\sigma$ ]. Определить величину напряжения  $\sigma$ , действующего на исследуемый геоматериал.

A<sub>ilmd5</sub>. [Определить величину линейных размеров  $L_{nen}[1]$ ,  $L_{nen}[2]$ ,  $L_{nen}[3]$  примитивных ячеек рассматриваемого геоматериала в трех плоскостях]. С помощью алгоритма  $A_{msg}$  определить линейные размеры  $L_{nen}[1]$ ,  $L_{nen}[2]$ ,  $L_{nen}[3]$  примитивных ячеек исследуемого геоматериала в плоскостях  $XOY$ ,  $ZOY$  и  $XOZ$ .

A<sub>ilmd6</sub>. [ $(L_{nen}[1] = L_{nen}[2])$  или  $(L_{nen}[1] = L_{nen}[3])$  или  $(L_{nen}[2] = L_{nen}[3])$ ?]. Если величины линейных размеров примитивных ячеек исследуемого геоматериала в одной из двух плоскостей совпадают, то перейти к шагу 7, иначе к шагу 21.

A<sub>ilmd7</sub>. [Ввод номера варианта  $N$ , характеризующего один из возможных условий нагружения и расположения трещины в исследуемом геоматериале]. Посредством анализа решаемой задачи выбрать один из нижеследующих вариантов:

1) геоматериал, в центре которого имеется трещина, находится в состоянии одноосного растяжения распределенной нагрузкой ( $N = 1$ ); 2) геоматериал, в центре которого имеется трещина, находится в состоянии одноосного растяжения сосредоточенными силами ( $N = 2$ ); 3) геоматериал с краевой трещиной находится в состоянии одноосного растяжения распределенной нагрузкой ( $N = 3$ ); 4) геоматериал с двумя краевыми трещинами находится в состоянии одноосного растяжения распределенной нагрузкой ( $N = 4$ ); 5) среди приведенных вариантов нет соответствующего решаемой задаче ( $N = 5$ ).

A<sub>ilmd8</sub>. [ $N = 1$ ?]. Если выбран первый вариант, то перейти к шагу 9, иначе к шагу 11.

A<sub>ilmd9</sub>. [Ввод  $\alpha$ ]. Ввести значение угла  $\alpha$ , определяющего ориентацию трещины относительно одной из осей.

A<sub>ilmd10</sub>. [ $K_{lc} \leftarrow \frac{2\sigma\pi}{l} \cos^2 \alpha$ ]. Присвоить значению коэффициента интенсивности

напряжений  $K_{Ic}$  значение выражения  $\frac{2\sigma\pi}{l} \cos^2 \alpha$ .

Ailmd11. [ $N = 2 ?$ ]. Если выбран второй вариант, то перейти к шагу 12, иначе к шагу 14.

Ailmd12. [Ввод  $F_c$ ]. Ввести значение параметра  $F_c$ , определяющего величину сосредоточенной силы, действующей на геоматериал.

Ailmd13. [ $K_{Ic} \leftarrow \frac{F_c \sqrt{2}}{\sqrt{\pi \cdot l}}$ ]. Присвоить значению коэффициента интенсивности

напряжений  $K_{Ic}$  значение выражения  $\frac{F_c \sqrt{2}}{\sqrt{\pi \cdot l}}$ .

Ailmd14. [ $N = 3 ?$ ]. Если выбран третий вариант, то перейти к шагу 15, иначе к шагу 17.

Ailmd15. [Ввод  $b$ ]. Ввести величину  $b$ , определяющую ширину исследуемого геоматериала.

Ailmd16. [ $K_{Ic} \leftarrow \sigma \sqrt{\pi l} \left( 30,39 \left( \frac{l}{b} \right)^4 - 21,72 \left( \frac{l}{b} \right)^3 + 10,55 \left( \frac{l}{b} \right)^2 - 0,23 \frac{l}{b} + 1,12 \right)$ ].

Присвоить значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$  значение

выражения  $\sigma \sqrt{\pi l} \left( 30,39 \left( \frac{l}{b} \right)^4 - 21,72 \left( \frac{l}{b} \right)^3 + 10,55 \left( \frac{l}{b} \right)^2 - 0,23 \frac{l}{b} + 1,12 \right)$ .

Ailmd17. [ $N = 4 ?$ ]. Если выбран четвертый вариант, то перейти к шагу 18, иначе к шагу 20.

Ailmd18. [Ввод  $b$ ]. Ввести величину  $b$ , определяющую ширину исследуемого геоматериала.

Ailmd19. [ $K_{Ic} \leftarrow \sigma \sqrt{\pi l} \left( \sqrt{\frac{b}{\pi l} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi l}{b} + 0,1 \sin \frac{2\pi l}{b} \right)} \right)$ ]. Присвоить значению

коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$  значение выражения

$\sigma \sqrt{\pi l} \left( \sqrt{\frac{b}{\pi l} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi l}{b} + 0,1 \sin \frac{2\pi l}{b} \right)} \right)$ . Перейти к шагу 21.

A<sub>ilmd20</sub>. [Определить  $K_{Ic}$ ]. Экспериментальным (или любым другим аналитическим) способом определить величину коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$ .

A<sub>ilmd21</sub>. [Ввод номера варианта  $N$ , характеризующего один из возможных условий нагружения и расположения трещины в исследуемом геоматериале]. Посредством анализа решаемой задачи выбрать один из вариантов: 1) геоматериал с кольцевой трещиной находится в состоянии одноосного растяжения распределенной нагрузкой ( $N=1$ ); 2) геоматериал с краевой трещиной находится в состоянии изгиба сосредоточенной силой ( $N=2$ ); 3) геоматериал, в центре которого присутствует трещина, находится в состоянии одноосного растяжения распределенной нагрузкой ( $N=3$ ); 4) среди приведенных вариантов нет соответствующего решаемой задаче ( $N=4$ );

A<sub>ilmd22</sub>. [ $N=1?$ ]. Если выбран первый вариант, то перейти к шагу 23, иначе к шагу 26.

A<sub>ilmd23</sub>. [Ввод  $d_1$ ]. Ввести значение величины  $d_1$ , определяющей ширину геоматериала.

A<sub>ilmd24</sub>. [Ввод  $d_2$ ]. Ввести значение величины  $d_2$ , определяющей ширину геоматериала в месте кольцевой трещины.

$$A_{ilmd25}. [K_{Ic} \leftarrow \sigma \sqrt{\pi l} \left[ \left( 2 \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \right)^{-1} \left( \frac{d_1}{d_2} + 0,73 \frac{d_2^3}{d_1^3} - 0,3 \frac{d_2^2}{d_1^2} + 0,38 \frac{d_2}{d_1} + 0,5 \right) \right)].$$

Присвоить значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_{Ic}$  значение

$$\text{выражения } \sigma \sqrt{\pi l} \left[ \left( 2 \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \right)^{-1} \left( \frac{d_1}{d_2} + 0,73 \frac{d_2^3}{d_1^3} - 0,3 \frac{d_2^2}{d_1^2} + 0,38 \frac{d_2}{d_1} + 0,5 \right) \right].$$

A<sub>ilmd26</sub>. [ $N=2?$ ]. Если выбран второй вариант, то перейти к шагу 27, иначе к шагу 31.

A<sub>ilmd27</sub>. [Ввод  $b$ ]. Ввести величину  $b$ , определяющую ширину исследуемого геоматериала.

A<sub>ilmd28</sub>. [Ввод  $d$ ]. Ввести величину  $d$ , определяющую толщину рассматриваемого геоматериала.

A<sub>ilmd29</sub>. [Ввод  $F_c$ ]. Ввести значение параметра  $F_c$ , определяющего величину сосредоточенной силы, действующей на геоматериал.

$$A_{ilmd30}. [K_{lc} \leftarrow \frac{P\sqrt{\pi l}}{lb} \left( 87,34 \left( \frac{l}{b} \right)^4 - 84,97 \left( \frac{l}{b} \right)^3 + 49,19 \left( \frac{l}{b} \right)^2 - 10,39 \frac{l}{b} + 6,53 \right)].$$

Присвоить значению коэффициента интенсивности напряжений  $K_{lc}$  значение

$$\text{выражения } K_{lc} \leftarrow \frac{P\sqrt{\pi l}}{lb} \left( 87,34 \left( \frac{l}{b} \right)^4 - 84,97 \left( \frac{l}{b} \right)^3 + 49,19 \left( \frac{l}{b} \right)^2 - 10,39 \frac{l}{b} + 6,53 \right).$$

A<sub>ilmd32</sub>. [ $N = 3 ?$ ]. Если выбран третий вариант, то перейти к шагу 33, иначе к шагу 37.

A<sub>ilmd33</sub>. [Ввод  $b$ ]. Ввести величину  $b$ , определяющую ширину исследуемого геоматериала.

A<sub>ilmd34</sub>. [Ввод  $d$ ]. Ввести величину  $d$ , определяющую толщину рассматриваемого геоматериала.

A<sub>ilmd35</sub>. [Ввод  $h$ ]. Ввести величину  $h$ , определяющую ширину трещины в исследуемом геоматериале.

$$A_{ilmd36}. [K_{lc} \leftarrow \sigma\sqrt{\pi l} \left( \frac{0,48 \frac{h}{l} - 1,12}{1 + 0,75 \frac{h^2}{d^2} - \frac{h}{d}} \right)]. \text{ Присвоить значению коэффициента}$$

интенсивности напряжений  $K_{lc}$  значение выражения

$$K_{lc} \leftarrow \sigma\sqrt{\pi l} \left( \frac{0,48 \frac{h}{l} - 1,12}{1 + 0,75 \frac{h^2}{d^2} - \frac{h}{d}} \right). \text{ Перейти к шагу 38.}$$

A<sub>ilmd37</sub>. [Определить  $K_{lc}$ ]. Экспериментальным (или любым другим аналитическим) способом определить величину коэффициента интенсивности напряжений  $K_{lc}$ .

Ailmd38.  $[\sigma_s \leftarrow \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\frac{\pi}{l}}}]$ . Установить величину  $\sigma_s$ , определяющую напряжение, при

котором происходит разрушение в геоматериале.

Ailmd39.  $[(Z_{II} < 0,15l) \text{ и } \sigma_s < 0,66\sigma_{III} ?]$ . Если зона пластичности в геоматериале не превышает 15% от длины трещины и напряжение, при котором в геоматериале происходит разрушение меньше 66% от предела текучести, то перейти к шагу 40, иначе к шагу 41.

Ailmd40. [*Вывод*: В качестве теории моделирования следует использовать линейную механику разрушения]. Перейти к шагу 6.

Ailmd41. [*Вывод*: В качестве теории моделирования следует использовать нелинейную механику разрушения].

Ailmd42. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

Алгоритм A<sub>tda</sub> (Алгоритм идентификации теории накопления повреждений при усталостном разрушении)

A<sub>tda</sub>1. [Определить  $V$ ]. Определить объем  $V$  исследуемого геоматериала.

A<sub>tda</sub>2. [Определить количество непересекающихся трещин  $N_T$  в геоматериале].  
Посредством экспериментальных методов исследований определить количество непересекающихся трещин  $N_T$  в исследуемом геоматериале.

A<sub>tda</sub>3. [ $V_{II} \leftarrow 0$ ]. Объему повреждений  $V_{II}$  в геоматериале присвоить начальное значение равное 0.

A<sub>tda</sub>4. [Цикл  $i \leftarrow 1$  до  $N_T$ ]. Для переменной  $i$ , принимающей значения от 1 до  $N_T$ , выполнить нижеследующую последовательность действий.

A<sub>tda</sub>5. [Определить  $l_{xoy}[i]$ ]. Определить длину  $l_{xoy}$   $i$ -й трещины в плоскости  $XOY$ .

A<sub>tda</sub>6. [Определить  $l_{zoy}[i]$ ]. Определить длину  $l_{zoy}$   $i$ -й трещины в плоскости  $ZOY$ .

A<sub>tda</sub>7. [Определить  $l_{xoz}[i]$ ]. Определить длину  $l_{xoz}$   $i$ -й трещины в плоскости  $XOZ$ .

A<sub>tda</sub>8. [ $V_{II} \leftarrow V_{II} + l_{xoy}[i] \cdot l_{zoy}[i] \cdot l_{xoz}[i]$ ]. К объему повреждений в исследуемом

геоматериале добавить объем трещины.

Atda9. [Конец Цикла  $i \leftarrow 1 \text{ до } N_T$ ]. Увеличить счетчик  $i$  количества трещин в исследуемом геоматериале на 1. Перейти к шагу 4.

Atda10. [ $k_{II} \leftarrow \frac{V_{II}}{V}$ ]. Определить коэффициент поврежденности  $k_{II}$  геоматериала как отношение объема повреждений к общему объему исследуемого объекта.

Atda11. [ $k_{II} > 0,15 ?$ ]. Если  $k_{II} > 0,15$ , то перейти к шагу 12, иначе к шагу 13.

Atda12. [*Вывод*: При разработке математической модели разрушения следует использовать теорию накопления повреждений при усталостном разрушении]. Перейти к шагу 14.

Atda13. [*Вывод*: При разработке математической модели разрушения не следует использовать теорию накопления повреждений при усталостном разрушении].

Atda14. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

Алгоритм Atlda (Алгоритм идентификации теории линейного накопления повреждений)

Atlda1. [Определить величину представительного объема  $V_{PP}$  геоматериала]. С помощью алгоритма  $A_{msg}$  определить представительный объем исследуемого геоматериала  $V_{PP}$ .

Atlda2. [Сформировать выборку  $M$  образцов геоматериала]. Из генеральной совокупности сформировать выборку, элементы которой представляют собой макрообразцы геоматериала, объем которых превышает представительный.

Atlda3. [ $M = \emptyset ?$ ]. Если выборка  $M$  не содержит элементов, то перейти к шагу 4, иначе к шагу 5.

Atlda4. [*Ввод*  $\sigma_{II}$ ]. Ввести значение величины  $\sigma_{II}$ , определяющей предел прочности исследуемого геоматериала.

Atlda5. [*Ввод*  $N_1$ ]. Посредством проведения опытов над макрообразцами определить количество циклических нагрузок  $N_1$ , приводящих к разрушению

исследуемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_1 = 0,75\sigma_{II}$ .

Atlda6. [Ввод  $N_2$ ]. Посредством проведения опытов над макрообразцами определить количество циклических нагрузок  $N_2$ , приводящих к разрушению изучаемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_1 = 0,5\sigma_{II}$ .

Atlda7. [Ввод  $N_3$ ]. Посредством проведения опытов над макрообразцами определить количество циклических нагрузок  $N_3$ , приводящих к разрушению исследуемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_1 = 0,25\sigma_{II}$ .

Atlda8. [Ввод  $N_4$ ]. Посредством проведения опытов над макрообразцами определить количество циклических нагрузок  $N_4$ , приводящих к разрушению изучаемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_1 = 0,1\sigma_{II}$ .

Atlda9. [ $k \leftarrow \frac{0,1\sigma_{II} - \sigma_{II}}{N_4 - 1}$ ]. Определить угловой коэффициент касательной прямой, проходящей через точки  $A(0; \sigma_{II})$  и  $B(N_4; 0,1\sigma_{II})$ .

Atlda10. [ $R_1 \leftarrow \frac{0,75\sigma_{II} - \sigma_{II}}{k} + 1$ ]. Согласно линейному закону определить теоретическое значение количества циклических нагрузок  $R_1$ , приводящих к разрушению исследуемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_1 = 0,75\sigma_{II}$ .

Atlda11. [ $R_2 \leftarrow \frac{0,5\sigma_{II} - \sigma_{II}}{k} + 1$ ]. Согласно линейному закону определить теоретическое значение количества циклических нагрузок  $R_2$ , приводящих к разрушению исследуемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_2 = 0,5\sigma_{II}$ .

Atlda12.  $[R_3 \leftarrow \frac{0,25\sigma_{II} - \sigma_{II}}{k} + 1]$ . Согласно линейному закону определить

теоретическое значение количества циклических нагрузок  $R_3$ , приводящих к разрушению исследуемого геоматериала под действием напряжения с постоянной амплитудой  $S_3 = 0,25\sigma_{II}$ .

Atlda13.  $[(N_1 < 1,05R_1) \text{ и } (N_1 > 0,95R_1) \text{ и } (N_2 < 1,05R_2) \text{ и } (N_2 > 0,95R_2) \text{ и } (N_3 < 1,05R_3) \text{ и } (N_3 > 0,95R_3)]$ . Если экспериментальные значения  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  и  $N_4$  с 5% уровнем точности совпадают с теоретическими значениями  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и  $R_4$ , то перейти к шагу 14, иначе к шагу 15.

Atlda14. [*Вывод*: При разработке математической модели разрушения следует использовать теорию линейного накопления повреждений]. Перейти к шагу 16.

Atlda15. [*Вывод*: При разработке математической модели разрушения не следует использовать теорию линейного накопления повреждений].

Atlda16. [Конец]. Выполнение алгоритма прекратить.

#### 4.3.11. Продукционные правила, определяющие выбор теории моделирования

Итак, все алгоритмы, входящую в базу знаний рассматриваемой экспертной системы разработаны. Дополним данную базу знаний правилами продукций, позволяющих определить искомую теорию моделирования или их совокупность. Используя труды [74-76, 66, 70, и др.], а также обобщая экспертные знания в области разрушения, были получены следующие основные правила продукций:

*Правило: Классическая\_теория\_прочности*

IF применима Механика однородной сплошной среды OR применима Механика неоднородной сплошной среды OR применима Механика изотропной сплошной среды OR применима Механика анизотропной сплошной среды AND процесс разрушения исследуемого объекта зависит только от средних напряжений и деформаций THEN использовать Классическая теория прочности;

*Правило: Статистическая\_теория\_прочности*

IF применима Механика однородной сплошной среды OR применима Механика неоднородной сплошной среды OR применима Механика изотропной сплошной среды OR применима Механика анизотропной сплошной среды AND механические свойства структурных и текстурных элементов исследуемого объекта можно описать случайной величиной THEN использовать Статистическая теория прочности;

*Правило: Феноменологическая\_теория\_длительной\_прочности*

IF применима Механика однородной сплошной среды OR применима Механика неоднородной сплошной среды OR применима Механика изотропной сплошной среды OR применима Механика анизотропной сплошной среды AND процесс разрушения исследуемого объекта зависит от величины и длительности внешних воздействий THEN использовать Феноменологическая теория длительной прочности;

*Правило: Вычислительная\_механика\_разрушения*

IF применима Механика неоднородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND степень структурной сложности исследуемого объекта не превышает четвертого порядка, состоит из более пяти текстурных составляющих, и не содержит включения, группа нечувствительности которых совпадает с унимодулярной группой THEN использовать Вычислительная механика разрушения;

*Правило: Теория\_Мора*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND геоматериал разрушается при наступлении текучести и для исследуемого объекта предел текучести при сжатии существенно отличается от предела текучести при растяжении THEN использовать Теория Мора;

*Правило: Модифицированная\_теория\_Мора*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности

AND исследуемый объект разрушается хрупко и предел его прочности на сжатие значительно отличается от предела прочности на растяжение THEN использовать Модифицированная теория Мора;

*Правило: Теория\_Рэнкина*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект разрушается хрупко THEN использовать Теория Рэнкина;

*Правило: Теория\_Треска-Геста*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект разрушается при наступлении текучести или путем пластического разрыва использовать Теория Треска-Геста;

*Правило: Теория\_Сен-Венана*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект находится в многоосном напряженном состоянии THEN использовать Теория Сен-Венана;

*Правило: Теория\_Губера-Мизеса-Генки*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект разрушается при наступлении текучести или путем пластического разрыва и величина удельной энергии формоизменения зависит от напряженного состояния THEN использовать теория Губера-Мизеса-Генки;

*Правило: Теория\_Фишера*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика анизотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект имеет слоистую текстуру, разрушается хрупко в зависимости от величины удельной энергии формоизменения и пределы его прочности на сжатие и растяжение отличаются незначительно THEN

использовать Теория Фишера;

*Правило: Теория\_Марина*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика анизотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект имеет слоистую текстуру, разрушается хрупко и пределы его прочности на сжатие и растяжение в основных направлениях отличаются незначительно THEN использовать Теория Марина;

*Правило: Теория\_Нориса-Мак-Кинэна*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика анизотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект имеет слоистую текстуру, разрушается при наступлении текучести или путем пластического разрыва, плохо сопротивляется скалыванию и пределы его прочности на сжатие и растяжение отличаются незначительно THEN использовать Теория Нориса-Мак-Кинэна;

*Правило: Теория\_Гольденблата\_Копнова*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика анизотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND исследуемый объект, разрушается хрупко и пределы его прочности на сдвиг зависят от направления приложенных касательных напряжений THEN использовать Теория Гольденблата Копнова;

*Правило: Теория\_перколяции*

IF применима Механика неоднородной сплошной среды AND применима Механика анизотропной сплошной среды AND применима Классическая теория прочности AND применима Статистическая теория прочности AND разрушение исследуемого объекта рассматривается на уровне зерен (или минералов), содержащих включения, группа нечувствительности которых совпадает с унимодулярной группой THEN использовать Теория перколяции;

*Правило: Теория\_накопления\_повреждений\_Марко-Старки*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Феноменологическая теория

длительной прочности AND поврежденность исследуемого объекта связана с относительным числом циклов степенным законом THEN использовать Теория накопления повреждений Марко-Старки;

*Правило: Теория\_накопления\_повреждений\_Генри*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Феноменологическая теория длительной прочности AND кривые усталости исследуемого объекта смещаются по мере накопления повреждений и его поврежденность зависит от предела усталости THEN использовать Теория накопления повреждений Генри;

*Правило: Теория\_накопления\_повреждений\_Гатса*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Феноменологическая теория длительной прочности AND усталостная прочность и предел усталости исследуемого объекта при действии циклических напряжений изменяются непрерывно и его усталостная прочность пропорциональна функции амплитуды напряжения THEN использовать Теория накопления повреждений Гатса;

*Правило: Теория\_накопления\_повреждений\_Кортена-Долана*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Феноменологическая теория длительной прочности AND рост поврежденности исследуемого объекта продолжается даже при действии напряжений, уровень которых ниже минимального уровня, требуемого для начала процесса повреждения THEN использовать Теория накопления повреждений Кортена-Долана.

*Правило: Теория\_суммирования\_повреждений\_Мэнсона*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Механика изотропной сплошной среды AND применима Феноменологическая теория длительной прочности AND применима Математическая теория трещин AND процесс усталостного разрушения исследуемого объекта можно разделить на фазы зарождения и распространения трещины и число циклов, в течение которых происходит распространение трещины после ее образования, связано степенным

законом с полным числом циклов до разрушения THEN использовать Теория суммирования повреждений Мэнсона;

*Правило: Метод\_конечных\_элементов*

IF применима Вычислительная механика разрушения AND сплошную среду, соответствующую исследуемому объекту, можно разбить на совокупность конечных элементов таким образом, чтобы величины деформаций (или напряжений) на их границе не были слишком велики THEN использовать Метод конечных элементов;

*Правило: Метод\_граничных\_элементов*

IF применима Вычислительная механика разрушения AND сплошную среду, соответствующую исследуемому объекту, нельзя разбить на совокупность конечных элементов таким образом, чтобы величины деформаций (или напряжений) на их границе не были слишком велики и используется линейная постановка задачи разрушения THEN использовать Метод граничных элементов;

*Правило: Теория\_Гриффитса*

IF применима Линейная механика разрушения AND для исследуемого объекта прочность на сжатие в 8 раз больше его прочности на растяжение THEN использовать Теория Гриффитса;

*Правило: Теория\_Ирвина-Баренблата*

IF применима Механика однородной сплошной среды AND применима Линейная механика разрушения AND процесс разрушения исследуемого объекта связан с напряженным состоянием в окрестностях вершины трещины THEN использовать Теория Ирвина-Баренблата;

*Правило: Теория\_Ершова-Снеддона*

IF применима Линейная механика разрушения AND процесс разрушения исследуемого объекта связан с напряженным состоянием, обусловленным в том числе дефектами в виде разрезов THEN использовать Теория Ершова-Снеддона;

*Правило: Теория\_Райса-Черепанова*

IF применима Линейная механика разрушения AND при исследовании процесса разрушения исследуемого объекта есть необходимость в учете функциональной

зависимости между напряжением и длиной трещины (т.е. учитывается процесс распространения трещины) THEN использовать Теория интеграла Райса-Черепанова;

*Правило: Теория\_Уэлса*

IF применима Нелинейная механика разрушения AND исследуемый объект обладает высокой вязкостью, т.е. определение коэффициента интенсивности напряжений такого объекта не представляется возможным THEN использовать Теория Уэлса.

#### 4.3.12. Архитектура подсистемы механизма логического вывода

Перейдем к детальному проектированию подсистемы "LogicalInferenceMechanism", реализующей механизм логического вывода рассматриваемой экспертной системы. Именно данная подсистема определяет схему управления процессом определения теории моделирования, т.е. порядок применения фактов, приводящих к получению экспертного знания (мнения) в рассматриваемой предметной области. С учетом предложенного гибридного метода разработки экспертных систем детализированная архитектура подсистемы "LogicalInferenceMechanism" имеет следующий вид (рисунок 75).

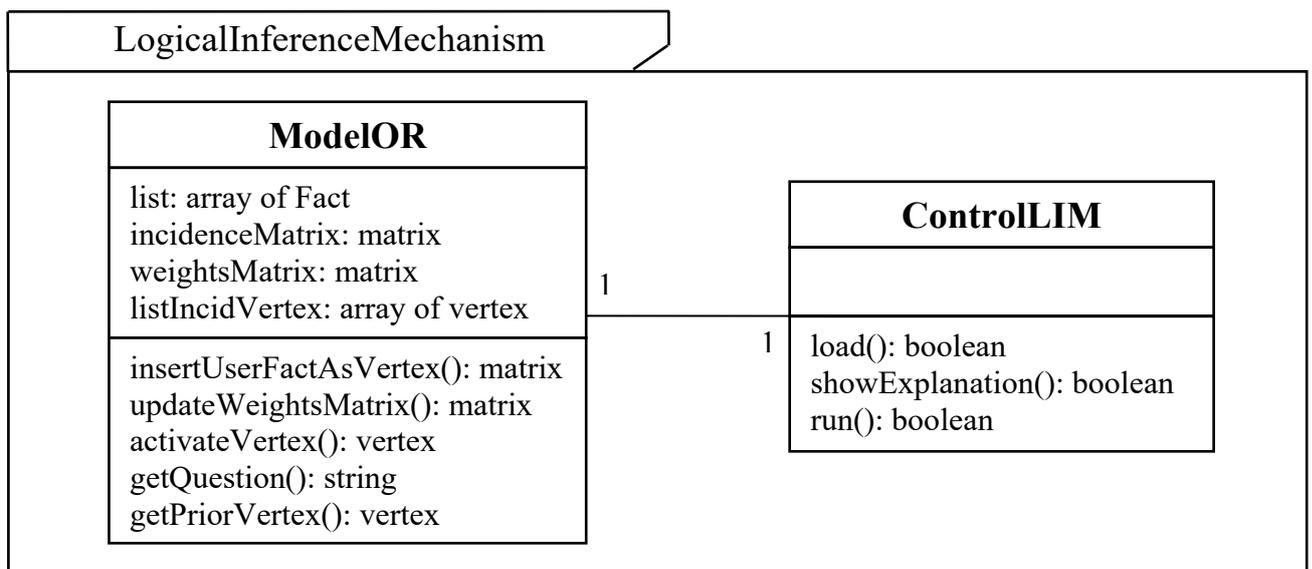


Рисунок 75 – Детализированная архитектура подсистемы "LogicalInferenceMechanism"

Данная подсистема состоит из двух классов "ModelOR" и "ControlLIM". Первый из них реализует модель формирования рассуждений рассматриваемой экспертной системы. Второй класс "ControlLIM" является управляющим и отвечает за нахождение решения рассматриваемой задачи. За функционирование подсистемы отвечает метод "run()" объекта класса "ControlLIM", алгоритм которого можно представить в виде следующей модели деятельности (рисунки 76 и 77). Приведем пояснения к представленной модели деятельности метода "ControlLIM.run()". Его выполнение начинается с инициализации для всех объектов класса "Fact" метода "ControlLIM.load()", загружающего факты из подсистемы базы знаний в массив "list[]".

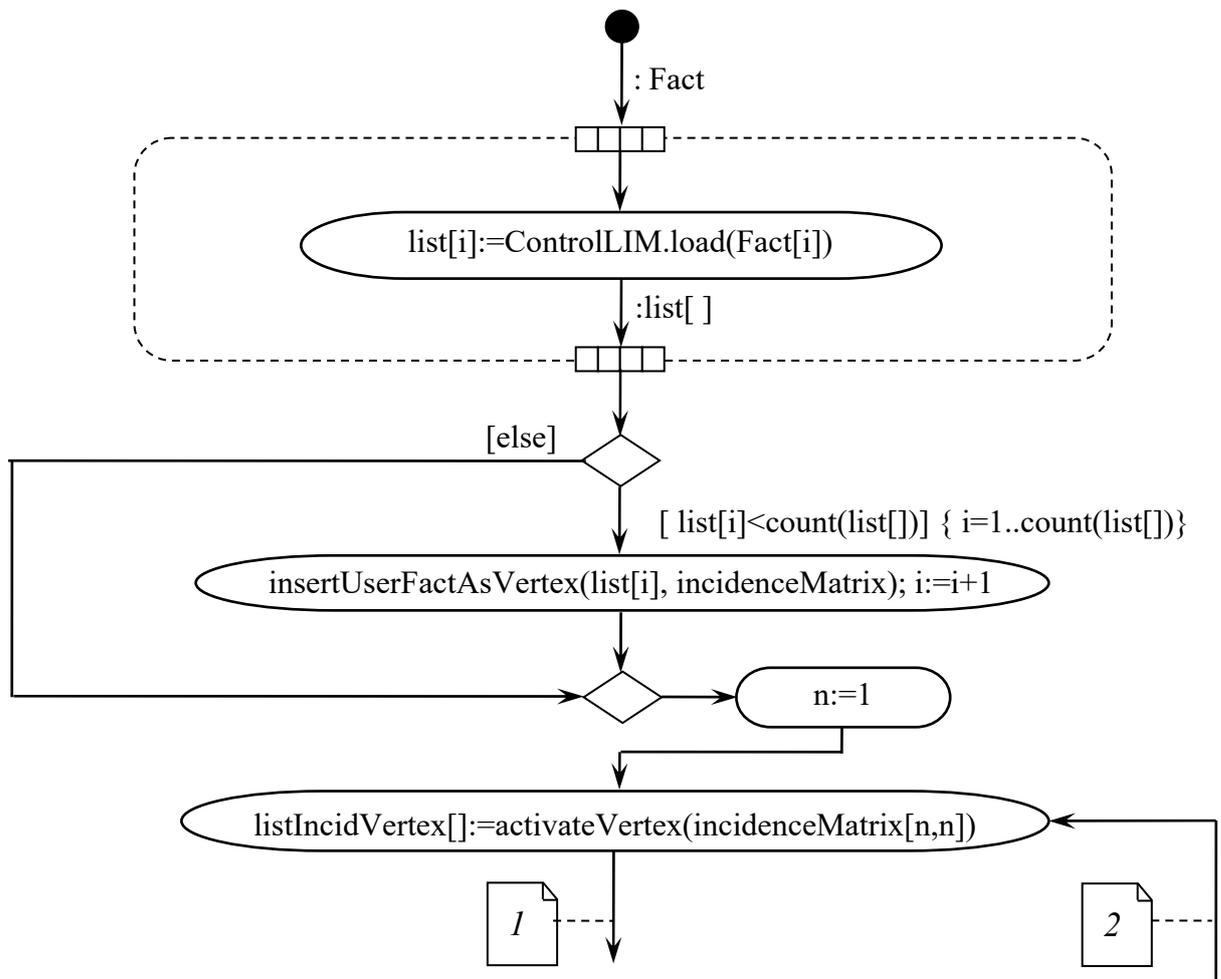


Рисунок 76 – Алгоритм метода "run()" объекта класса "ControlLIM" (начало)

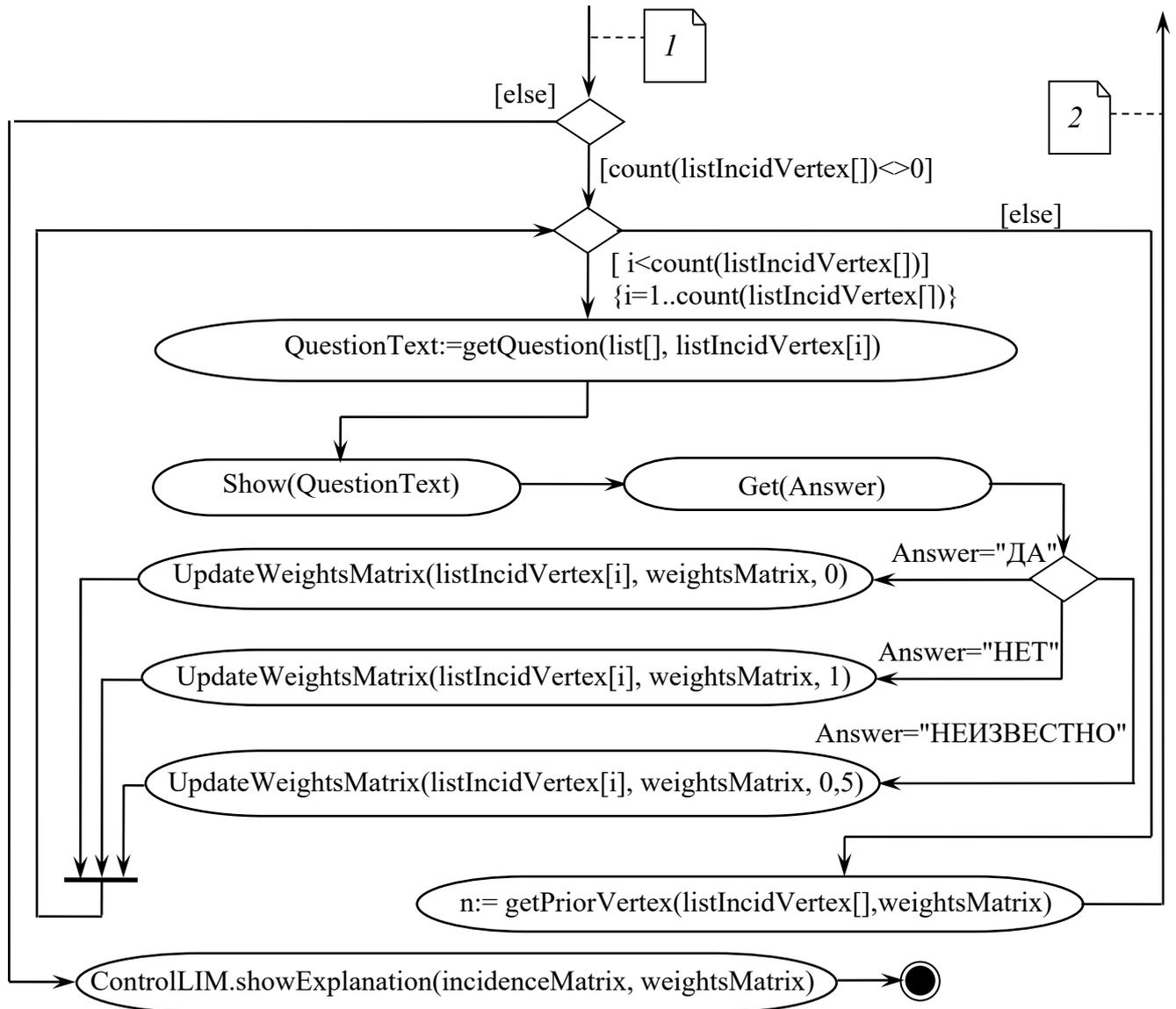


Рисунок 77 – Алгоритм метода "run()" объекта класса "ControlLIM" (начало)

Далее, на основе полученного списка производится построение матрицы инцидентности графа, отражающего связи между вершинами – теориями моделирования (экземплярами класса "Fact"). При этом дуга соединяет две вершины лишь в том случае, если применение одной теории базируется на постулатах другой. После построения матрицы инцидентности осуществляется активизация начальной вершины (метод "activateVertex()"), сводящаяся к нахождению массива вершин "listIncidVertex[]", инцидентных данной. Далее, для каждой инцидентной вершины из данного массива осуществляется следующая последовательность действий.

Сначала с помощью метода "getQuestion()", параметрами которого являются полученный список "list[]" и элемент массива "listIncidVertex[]", выводится на графический интерфейс пользователя вопрос QuestionText, соответствующий рассматриваемой инцидентной вершине. В зависимости от ответа на поставленный вопрос ("ДА", "НЕТ", "НЕИЗВЕСТНО") производится обновление соответствующих элементов матрицы весов "weightsMatrix" значениями 0, 1 и 0,5 (по умолчанию каждое ребро взвешено значением "1"). При этом необходимо отметить, что обновляются лишь те элементы из матрицы весов, которые указывают на дуги, исходящие из активированной вершины и входящие в рассматриваемую инцидентную вершину.

После выполнения данной последовательности с помощью метода "getPriorVertex()" из массива инцидентных вершин, с учетом матрицы весов определяется следующая вершина, подлежащая активизации. Далее, все вышеописанное повторяется уже для вновь полученной активизированной вершины, начиная с метода "activateVertex()". В результате получаем совокупность итераций, оканчивающуюся условием – отсутствие у полученной активизированной вершины инцидентных вершин. Такая конечная активизированная вершина как раз и укажет на искомую теорию моделирования.

Завершающее действие в представленной модели заключается в применении метода ControlLIM.showExplanation, позволяющего посредством графического интерфейса вывести пользователю результат решения задачи по выбору теории моделирования, использование которой должно позволить разработать высокоадекватную математическую модель разрушения геоматериала.

Проанализировав модель деятельности представленного метода можно сделать вывод, что функционирование механизма логического вывода рассматриваемой гибридной экспертной системы сводится к формированию в зависимости от ответов пользователей одного или нескольких путей во взвешенном ориентированном графе, вершины которого соответствуют фактам. При этом конечная вершина данных путей будет соответствовать искомой теории,

применение которой в рамках решаемой прикладной задачи позволит получить наиболее адекватную математическую модель разрушения геоматериалов.

И в завершение с помощью интегрированной среды разработки Embarcadero C++ Builder 10.3 и программного стека WAMP (Windows, Apache, MySQL и PHP) произведена реализация полученной архитектуры в виде web-приложения, главное окно которого представлено на рисунке 78.

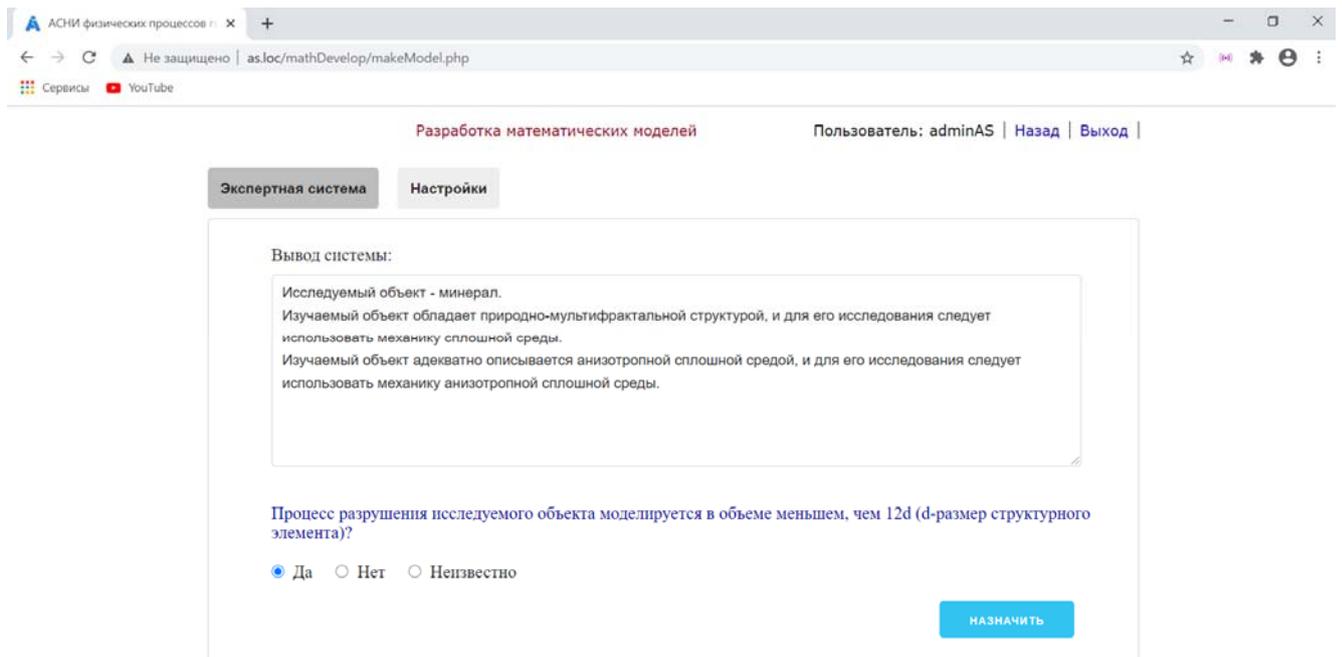


Рисунок 78 – Графическое окно "ExpertSystemMainWindow".

#### 4.4. Программное обеспечение АСНИ физических процессов горного производства

Перейдем к следующим стадиям – проектированию архитектуры ПО АСНИ и ее программной реализации. Для этого воспользуемся разработанным высокоуровневым каркасом программного обеспечения в качестве основы для проектирования и реализации ПО рассматриваемой АСНИ. Применяв механизм наследования, добавляя и переопределяя методы доступа к свойствам соответствующих классов, приходим к следующей архитектуре разрабатываемого программного обеспечения (рисунок 79). Как следует из данной диаграммы, представленная архитектура состоит из восьми подсистем и пакета графического интерфейса пользователя (GUI – graphical user interface).

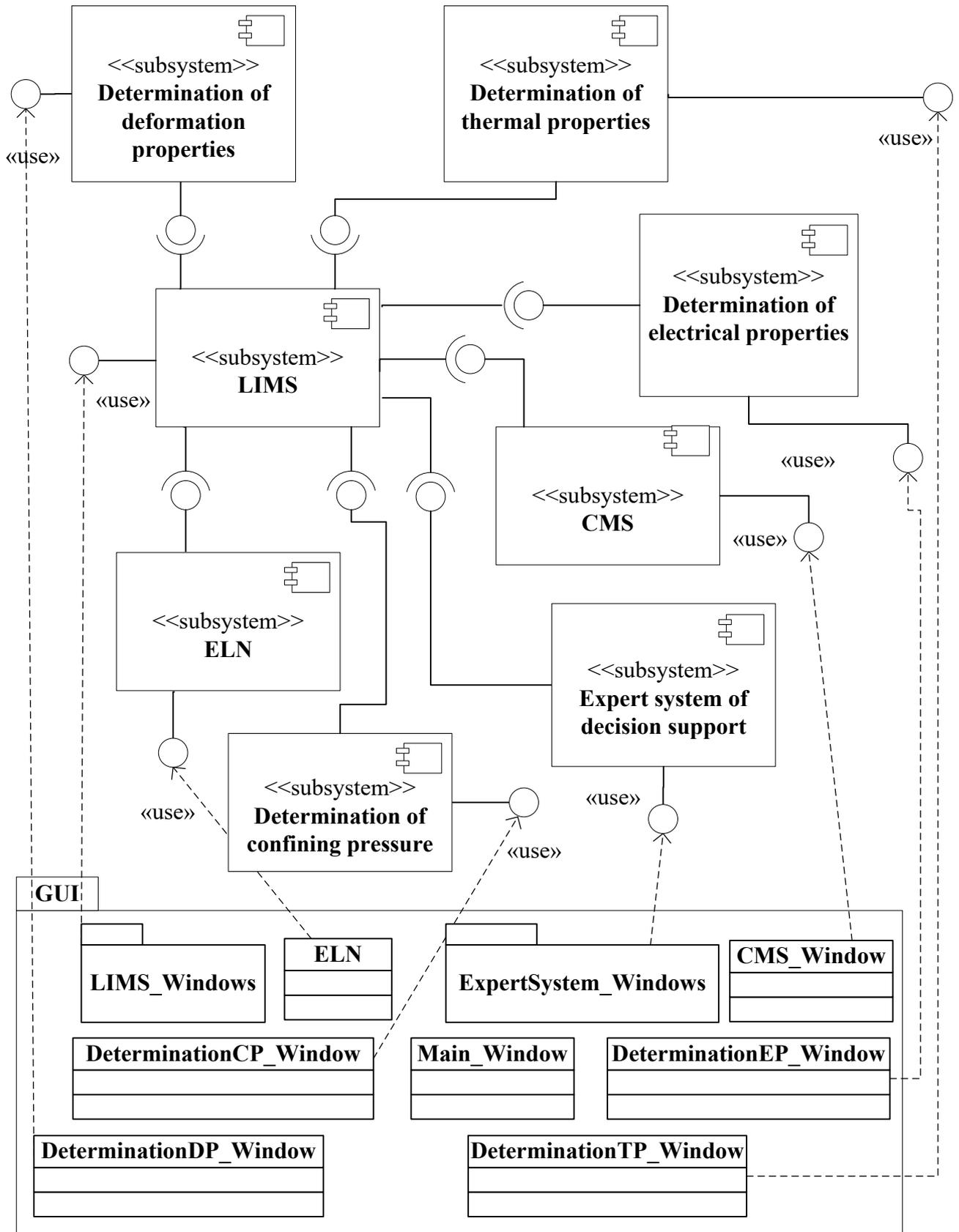


Рисунок 79 – Архитектура ПО АСНИ физических процессов горного производства

Подсистема "LIMS" предназначена для автоматизации административных функциональных задач АСНИ физических процессов горного производства и реализуется классами, наследуемыми от экземпляров рассмотренных ранее пакетов "PlanningAndControl" и "ExpDesignAndDataAnalysis".

Подсистемы "Determination of deformation properties", "Determination of thermal properties", "Determination of electrical properties" реализуют специализированные функциональные задачи определения деформационных, тепловых и электрических свойств изучаемых геоматериалов. Классы-потомки данных подсистем наследуются от классов пакета "DTEPropAndExtStDefinition".

Следующие подсистемы "Determination of confining pressure" и "Expert System of decision support" реализуют соответственно функциональную задачу определения величины внешнего поля напряжения, действующего на породный массив, и подробно рассмотренную ранее экспертную систему поддержки принятия решений, позволяющую определить теорию, в рамках которой следует производить построение и исследование математической модели разрушения изучаемого геоматериала. Классы данных подсистем наследуются соответственно от классов пакетов "DTEPropAndExtStDefinition" и "MathModelDecisionSupport".

Перейдем к рассмотрению следующей подсистемы. Как указывалось ранее, одним из главных требований, предъявляемым к АСНИ, является модельная ориентированность результата исследования, т.е. в результате работы любой системы рассматриваемого класса должны быть получены соответствующие математические модели изучаемых объектов. При этом необходимо отметить, что полученные таким способом математические модели должны быть не только количественно адекватными, но и находить свое применение на практике. К сожалению, как показывает анализ существующих работ, применение разработанных математических моделей в деятельности горнопромышленных предприятий весьма ограничено, что в первую очередь связано со сложностью их использования. Так, в большинстве случаев входные данные в разработанных моделях приходится вводить вручную, мониторинг состояния моделируемых объектов не производится, а время отклика между управляющим воздействием и

выдаваемым моделью прогнозом недопустимо велико.

Для решения данной проблемы в состав архитектуры предлагаемой АСНИ физических процессов горного производства включена подсистема компьютерного моделирования "СMS", предназначенная не только для разработки количественно адекватных математических моделей, но и для их интеграции в существующее программное обеспечение других автоматизированных систем (АСУ ТП, АСУП, АСТПП и др.). Именно подобная интеграция должна позволить в оперативном режиме получать входные данные разрабатываемых моделей, осуществлять мониторинг моделируемого объекта и своевременно принимать управленческие решения.

В качестве "СMS" в рамках рассматриваемой работы используется система компьютерного моделирования MATLAB. При этом для обеспечения высокой количественной адекватности разрабатываемых математических моделей в области горной промышленности для подсистемы MATLAB была разработана библиотека классов, предназначенная для использования в моделирующих программах функций, связанных с операциями над четкими и нечеткими тензорными величинами (создание и удаление тензоров различного ранга, внутреннее и внешнее умножение, умножение со сверткой и др.).

Последняя подсистема "ELN" соответствует электронному лабораторному журналу, интегрирующему и систематизирующему всю информацию, получаемую в результате функционирования вышеописанных подсистем. Экземпляры классов данной подсистемы являются потомками классов из пакета "PlanningAndControl". Детализированная архитектура вышеописанных подсистем, отражающих схему наследования между классами подсистем и соответствующих пакетов, представлена на рисунках 80-91.

В результате использования интегрированной среды С++ Builder 10.3 были осуществлены стадии реализации и последующего тестирования полученных подсистем, составляющих рассматриваемую АС. В итоге, на наиболее значимые (с точки зрения научной новизны) части программного кода была получена совокупность свидетельств о регистрации программ для ЭВМ [126-131].

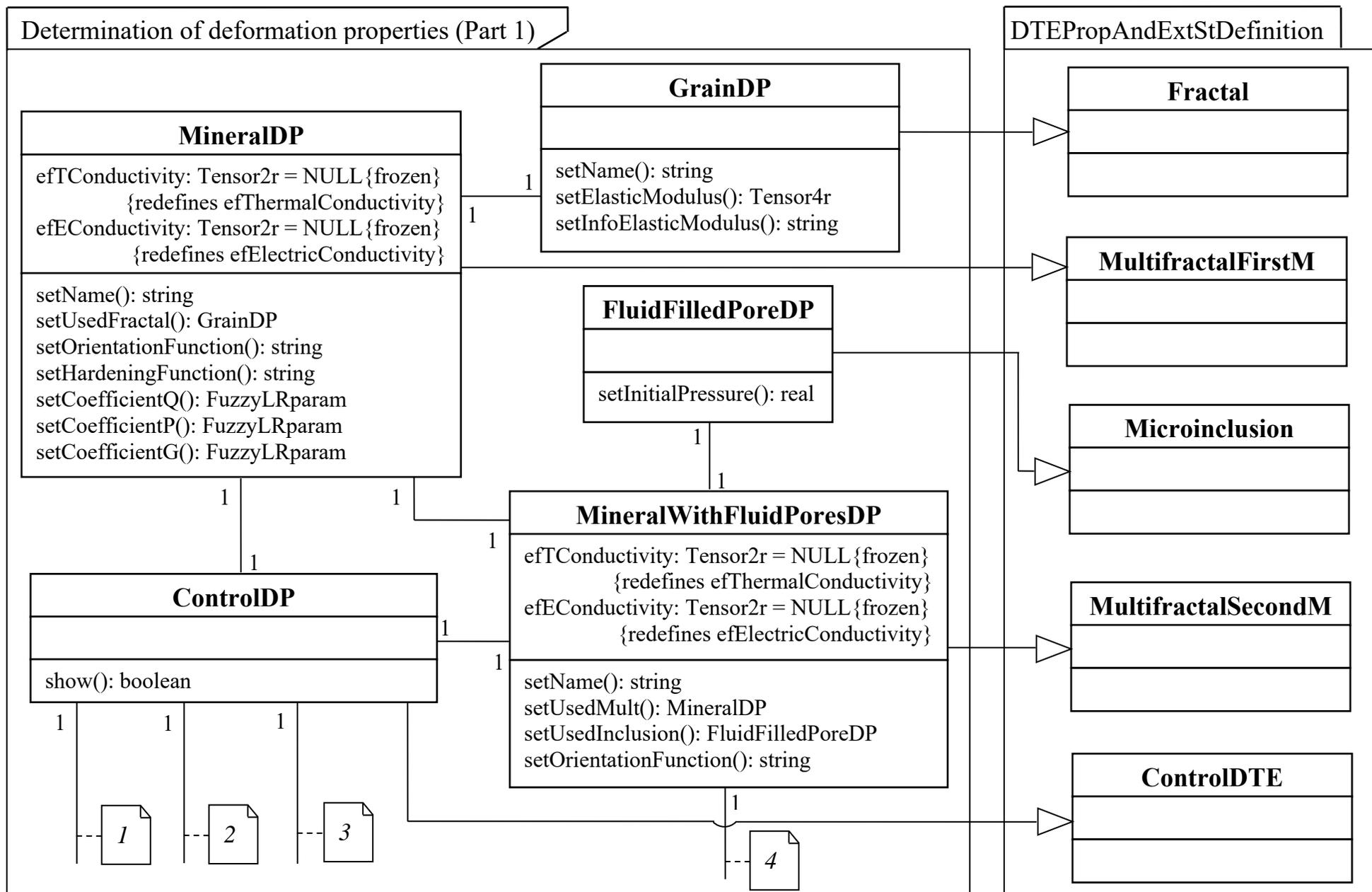


Рисунок 80 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of deformation properties" (Часть 1)

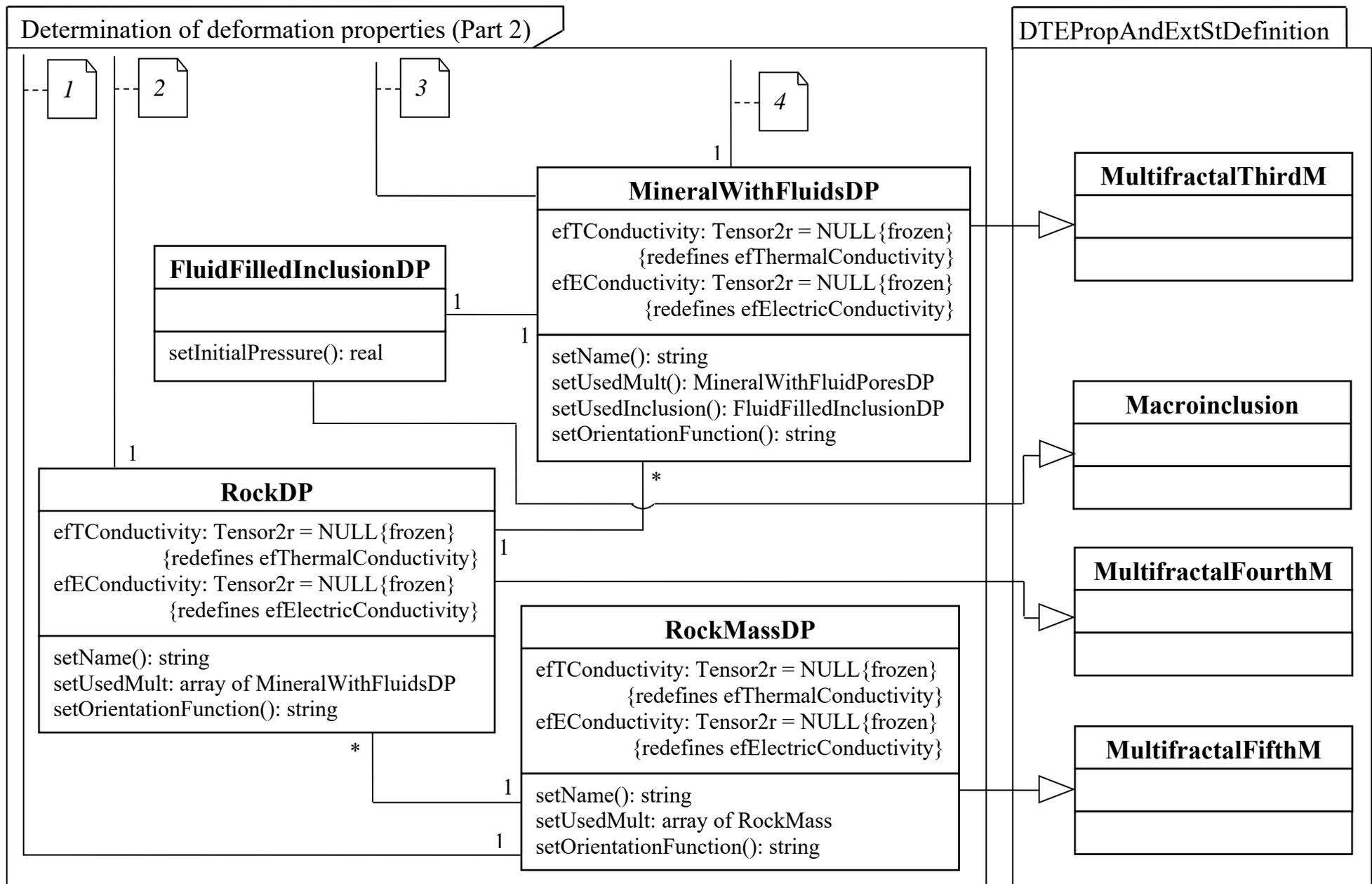


Рисунок 81 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of deformation properties" (Часть 2)

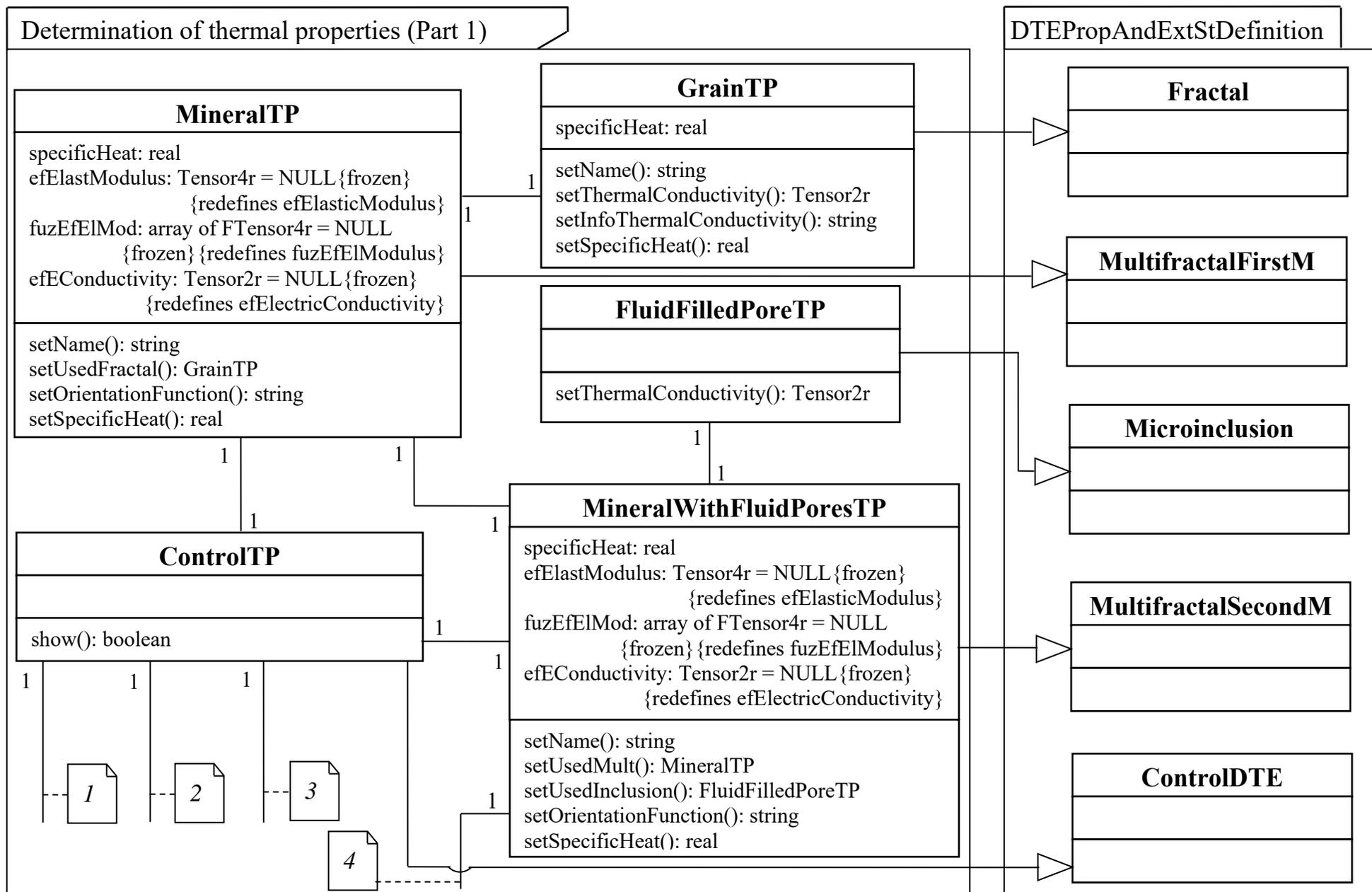


Рисунок 82 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of thermal properties" (Часть 1)

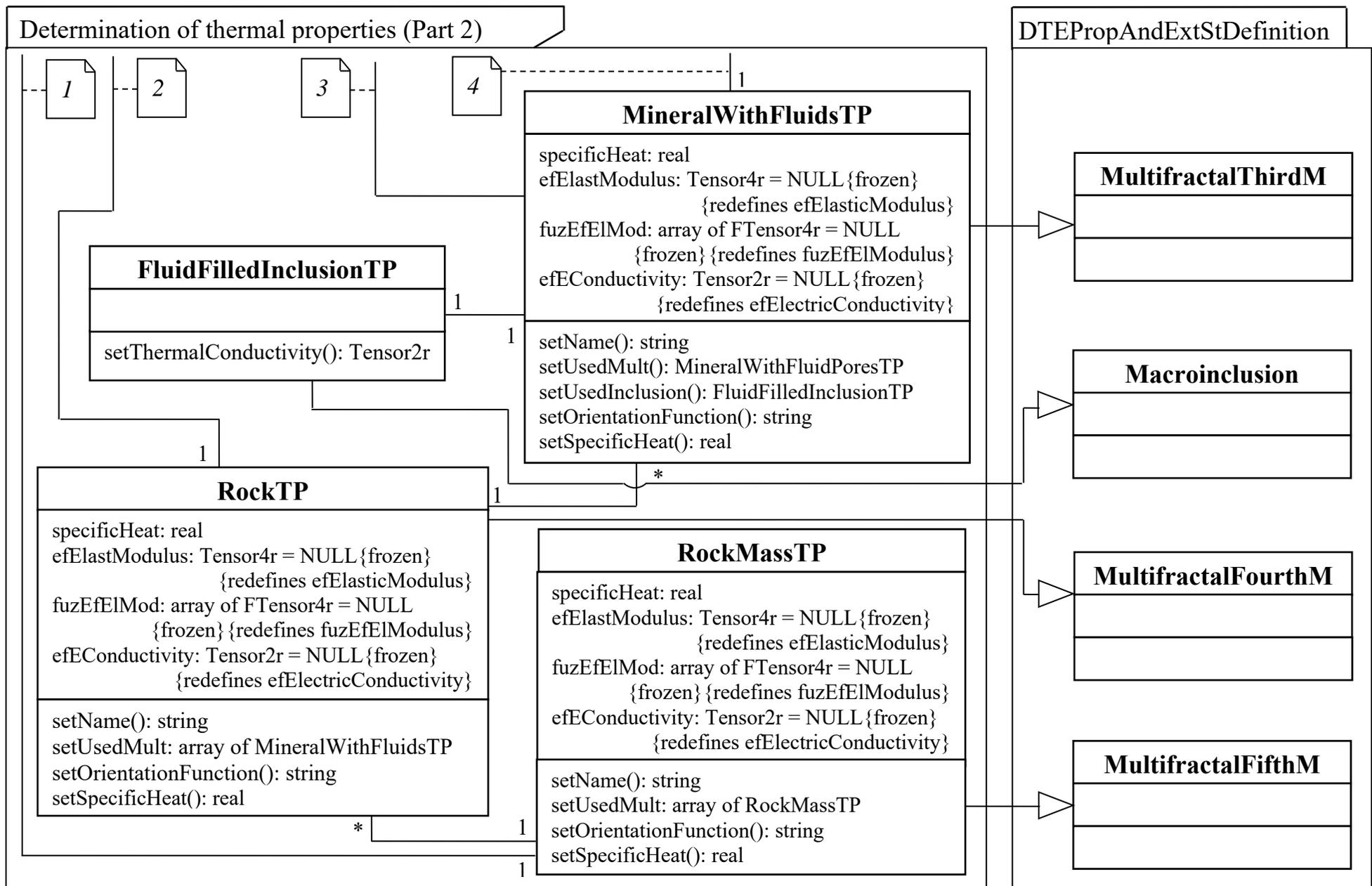


Рисунок 83 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of thermal properties" (Часть 2)

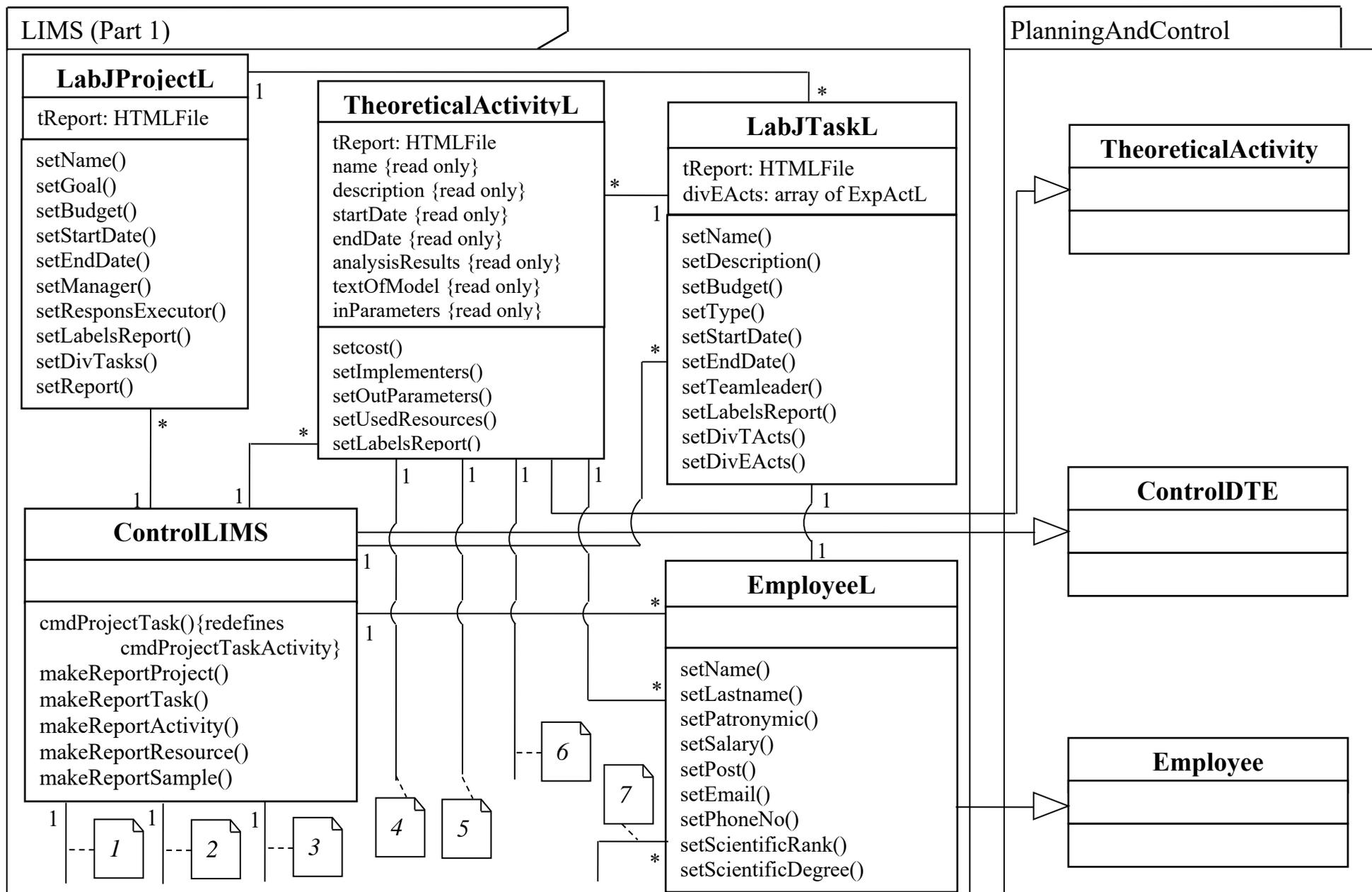


Рисунок 84 – Детализированная архитектура подсистемы "LIMS" (Часть 1)

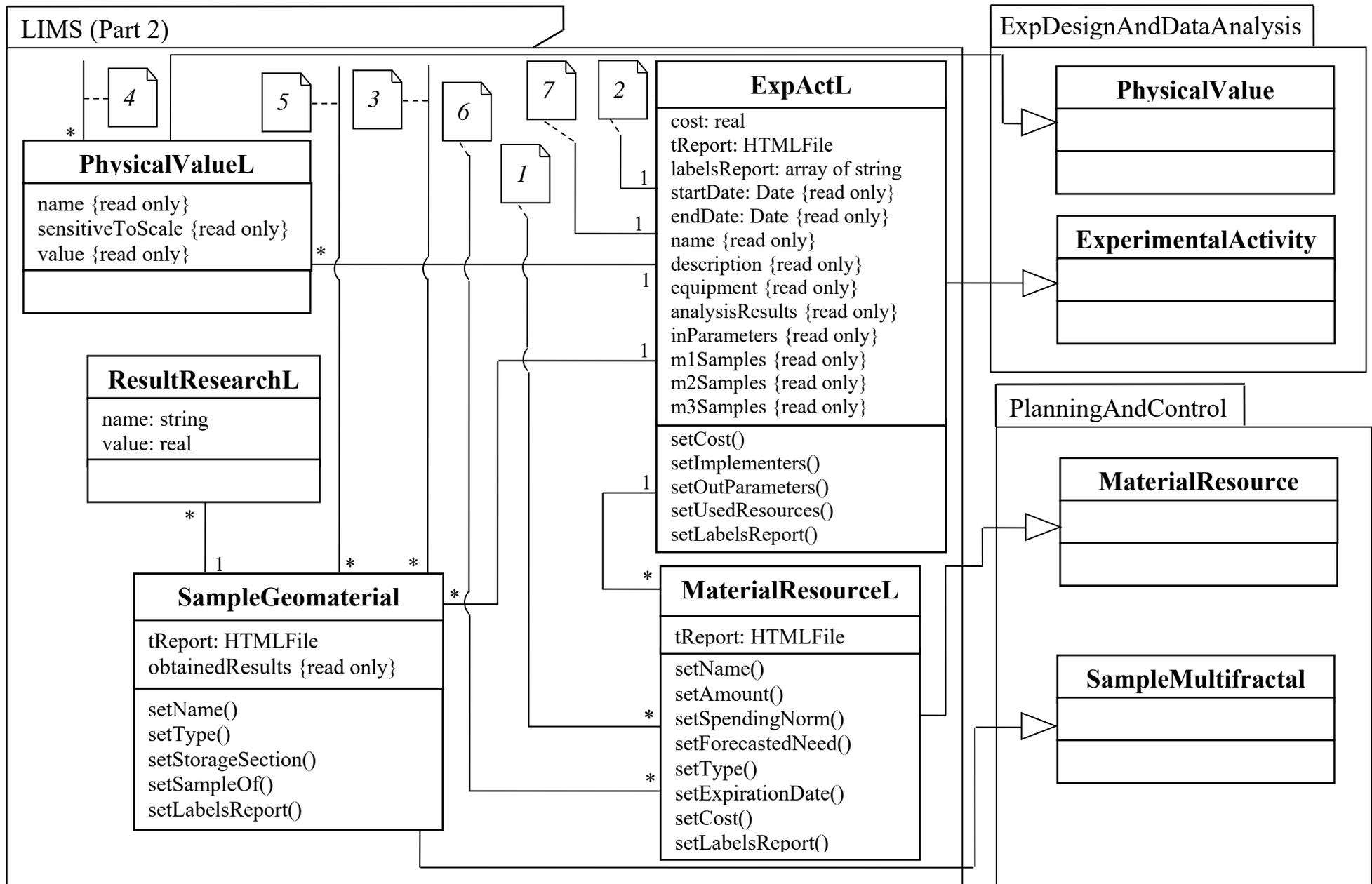


Рисунок 85 – Детализированная архитектура подсистемы "LIMS" (Часть 2)

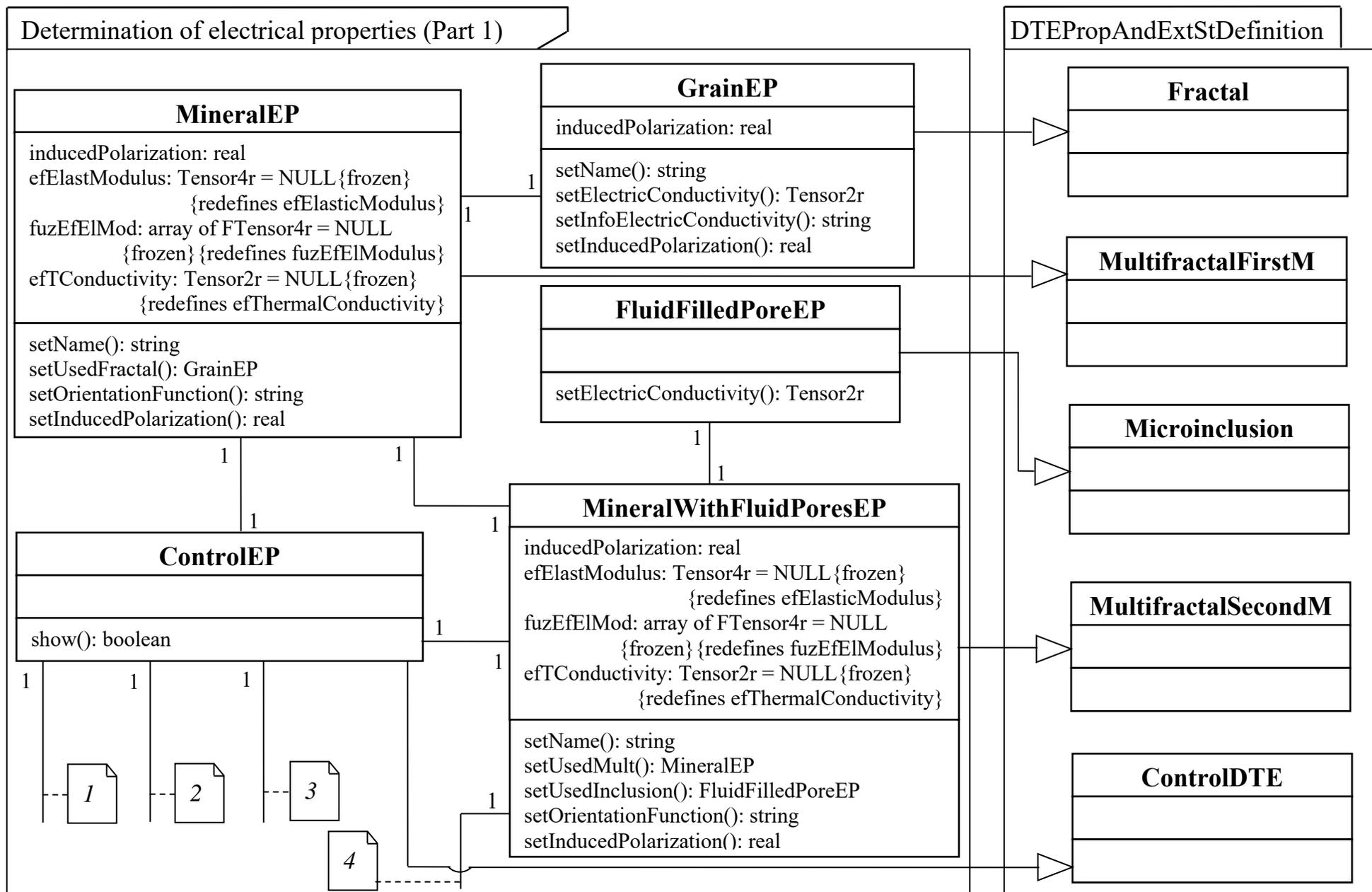


Рисунок 86 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of electrical properties" (Часть 1)

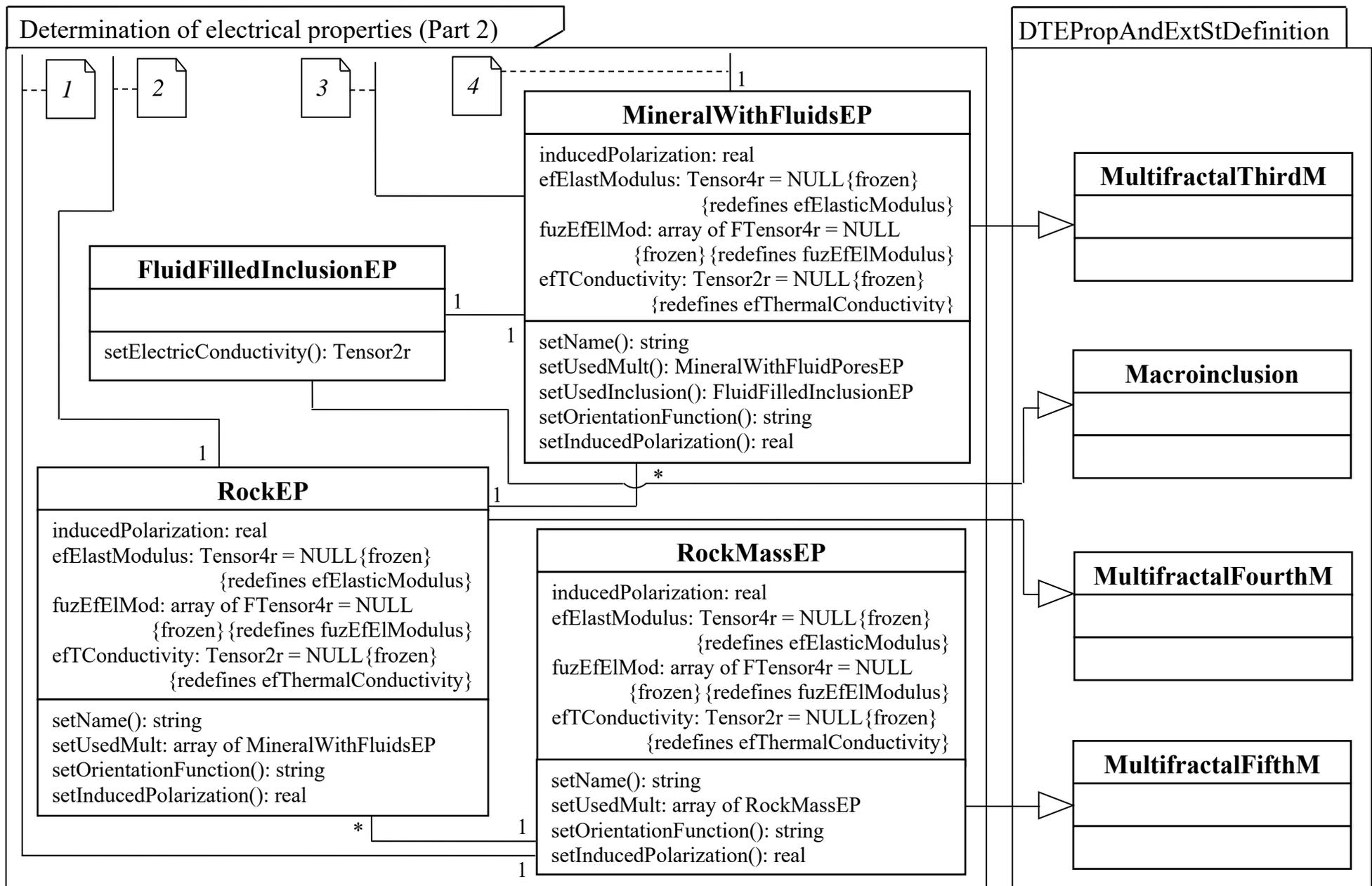


Рисунок 87 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of electrical properties" (Часть 2)

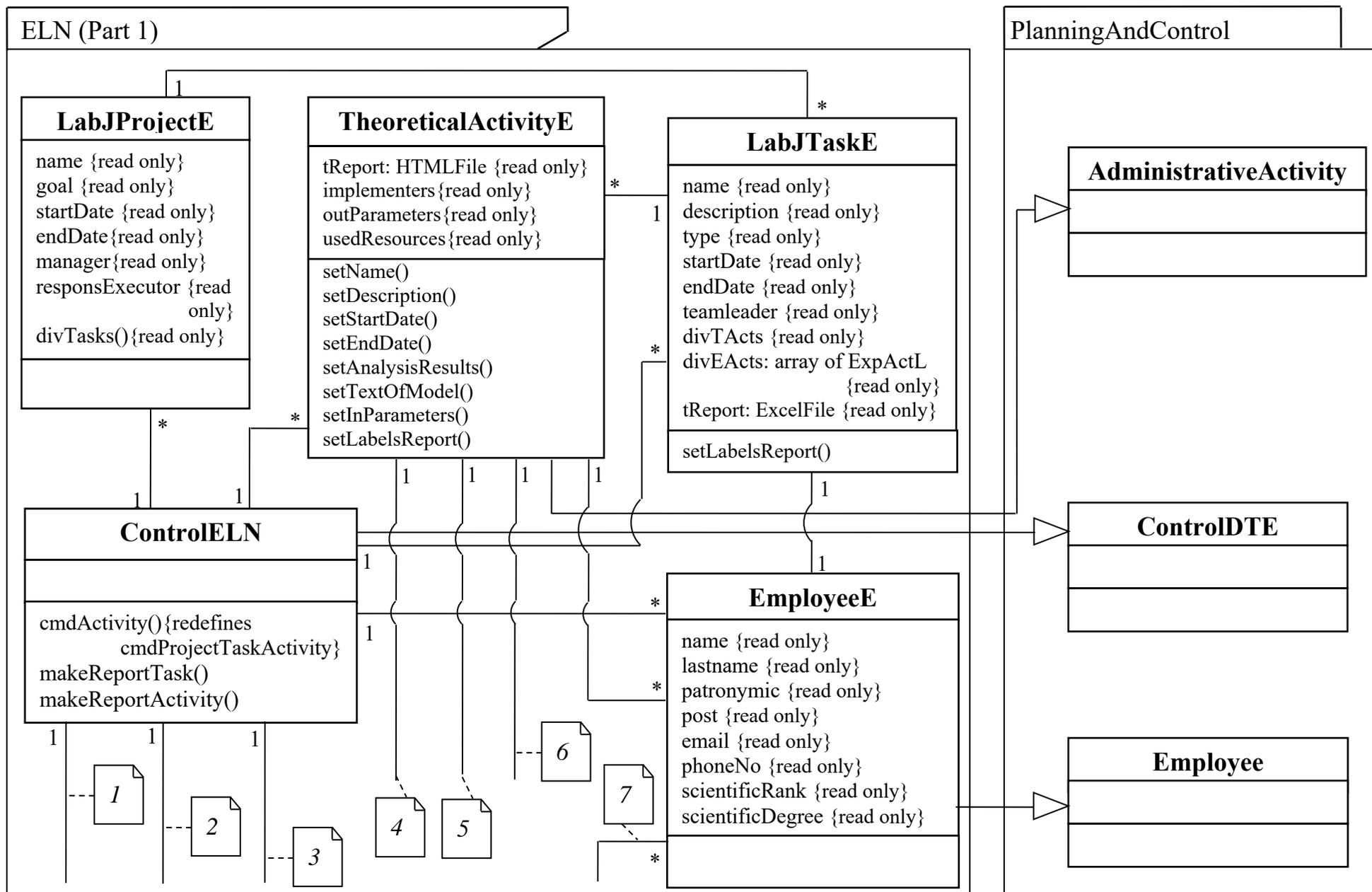


Рисунок 88 – Детализированная архитектура подсистемы "ELN" (Часть 1)

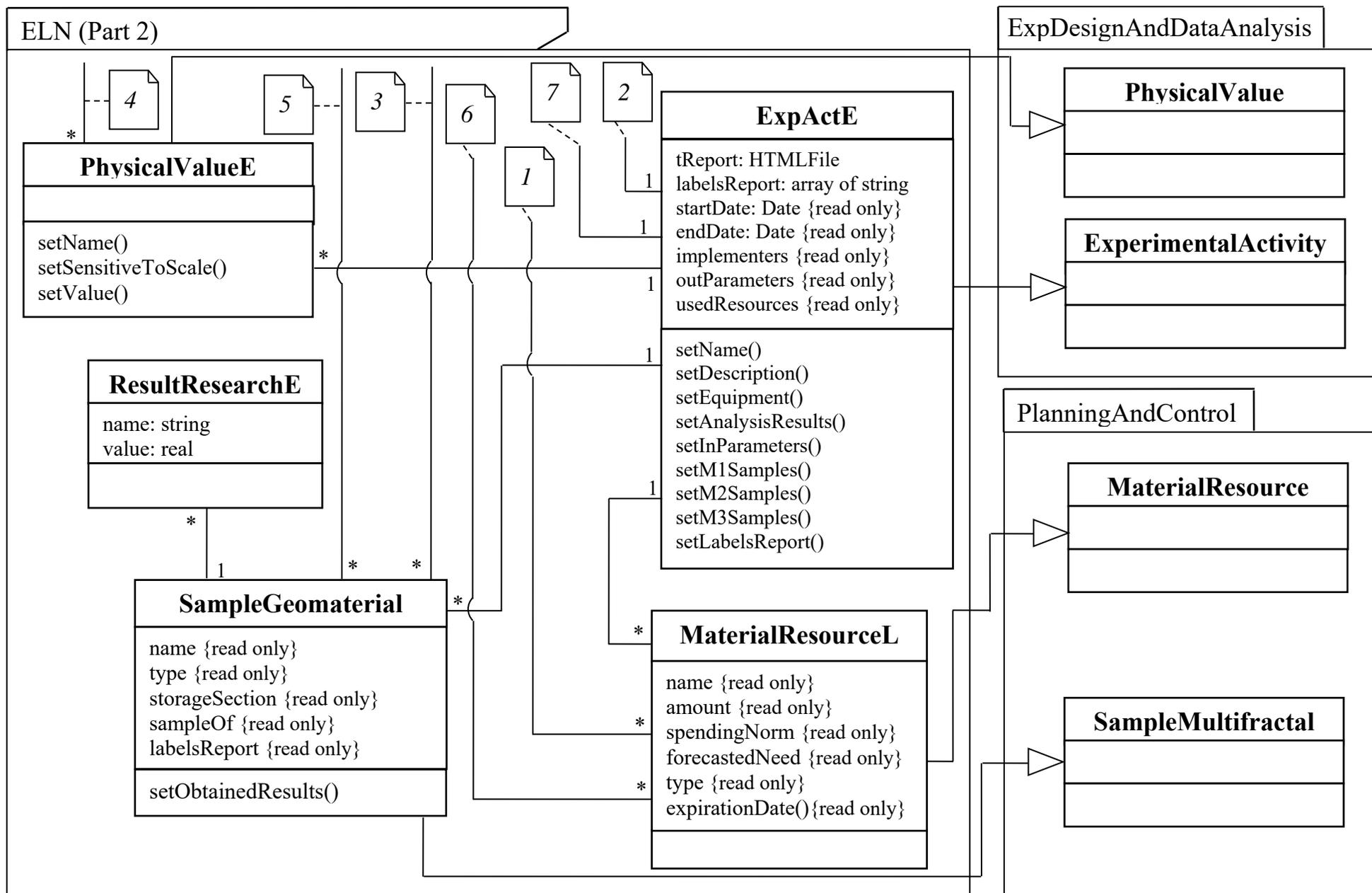


Рисунок 89 – Детализированная архитектура подсистемы "ELN" (Часть 2)

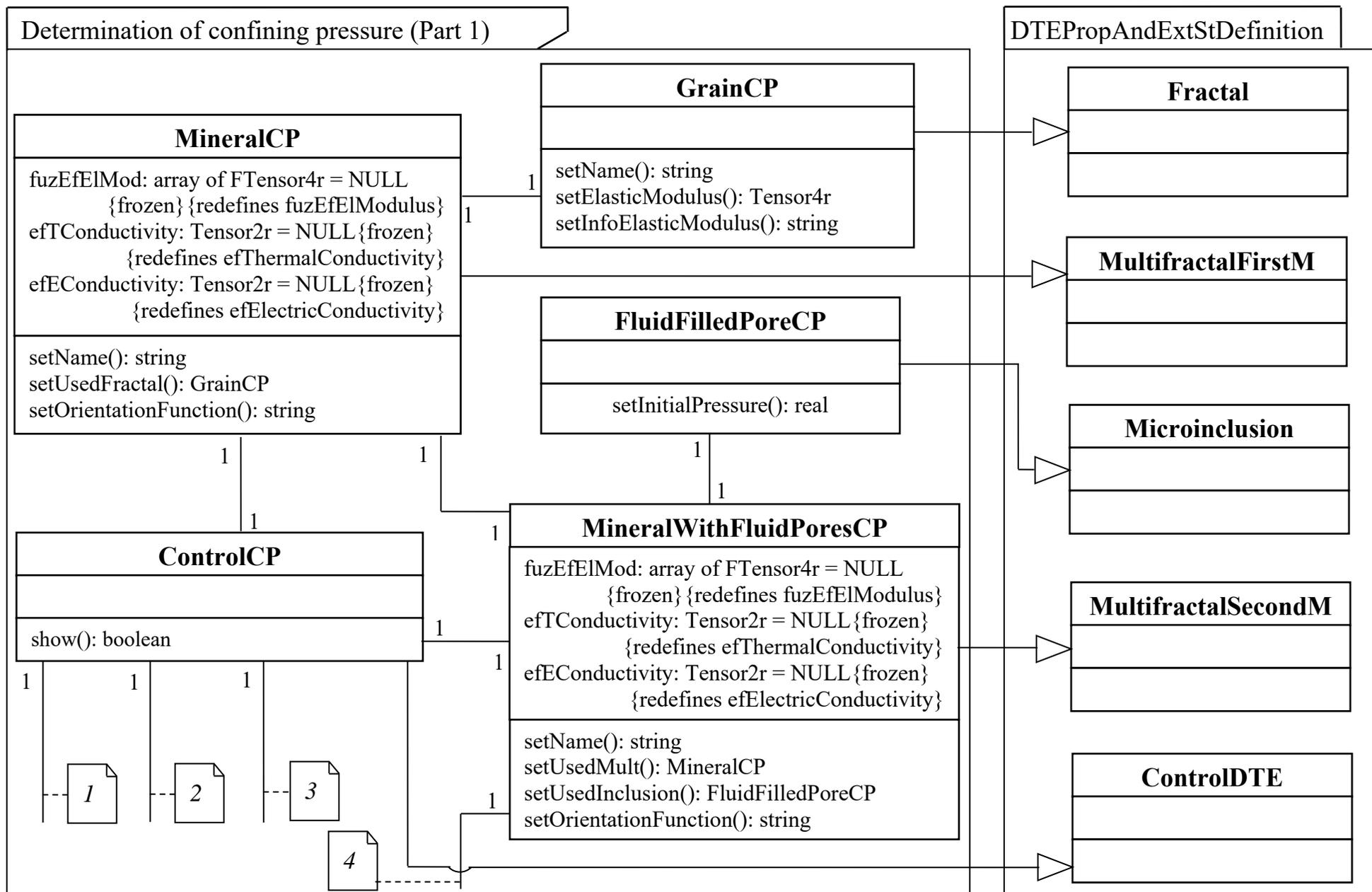


Рисунок 90 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of confining pressure" (Часть 1)

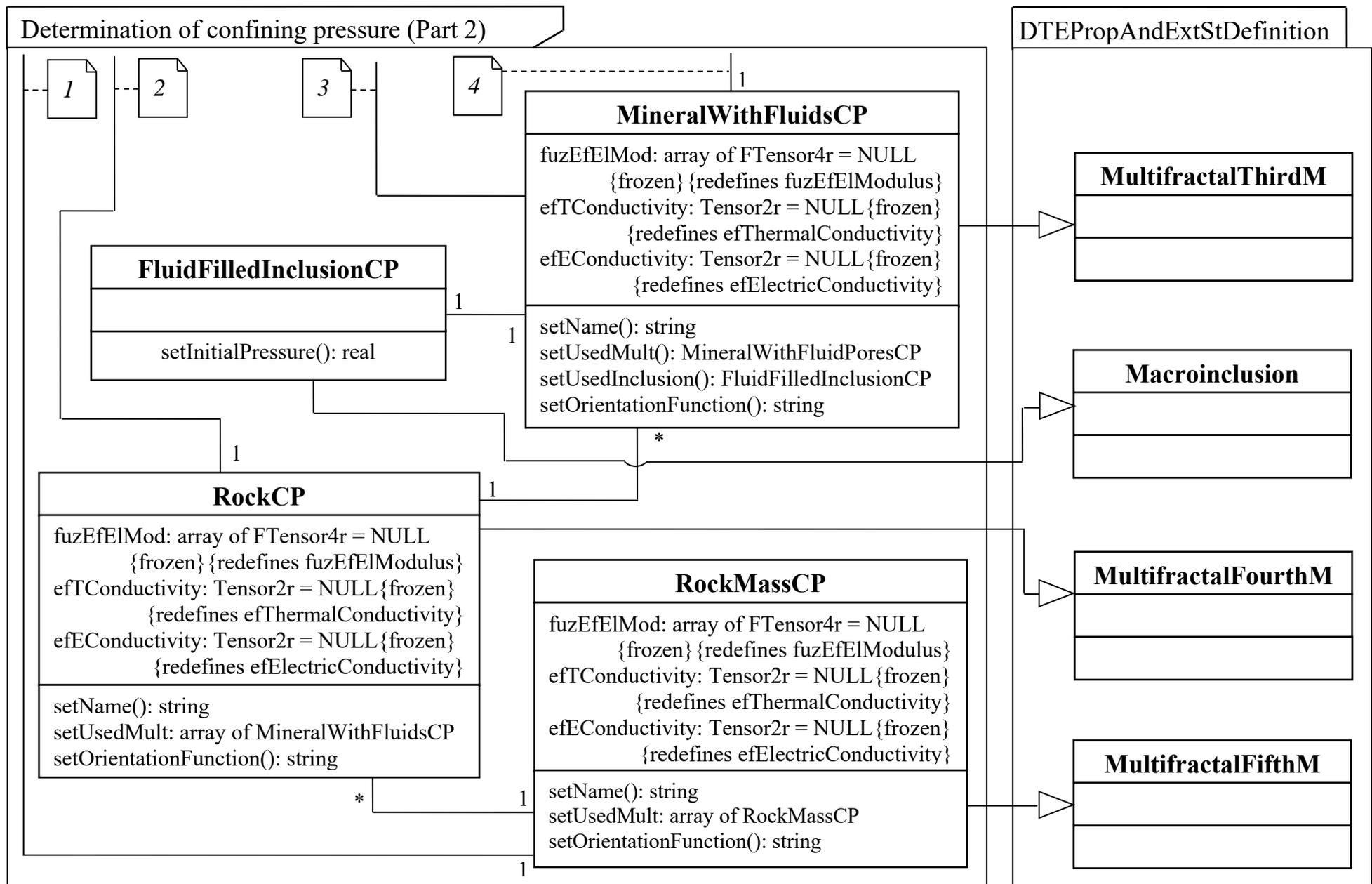


Рисунок 91 – Детализированная архитектура подсистемы "Determination of confining pressure" (Часть 2)

Графические окна пользователя, реализованные с применением программного стека WAMP (Windows, Apache, MySQL и PHP) и вместе составляющие пакет классов графического интерфейса пользователя – "GUI" представлены на рисунках 92-103.

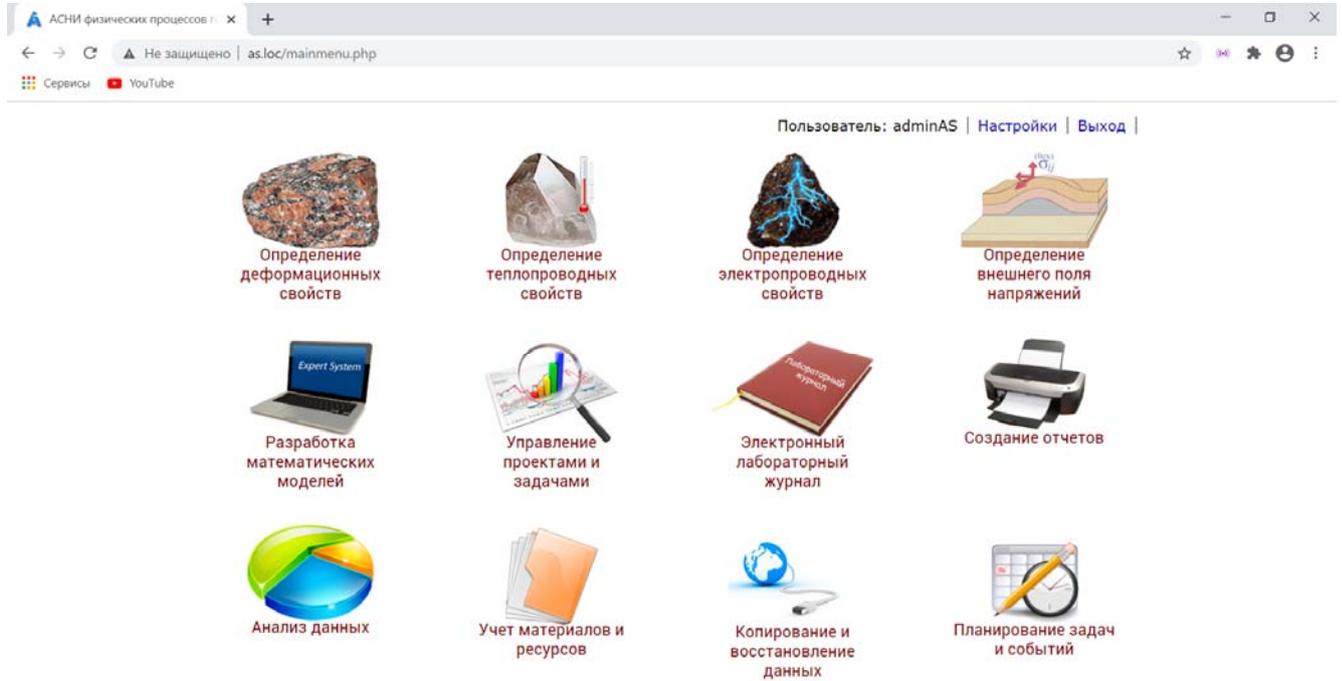


Рисунок 92 – Графическое окно "MainWindow"

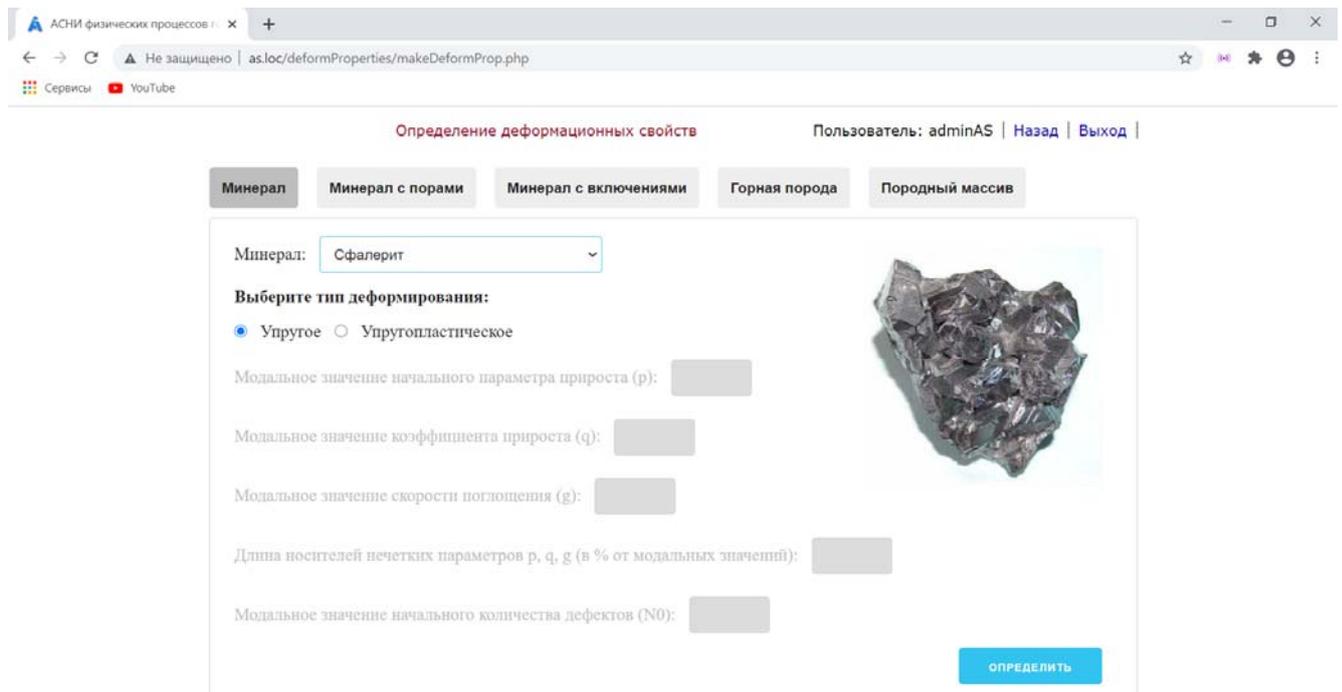


Рисунок 93 – Графическое окно "DeterminationDP\_Window"

АСНИ физических процессов | Не защищено | as.loc/thermalProperties/makeThermalProp.php

Определение теплопроводных свойств | Пользователь: adminAS | Назад | Выход

Минерал | Минерал с порами | Минерал с включениями | Горная порода

Минерал: Галит

Теплопроводность флюида в порах (Вт/м<sup>2</sup>К): 0.0342

Концентрация пор (%): 30

ОПРЕДЕЛИТЬ



Рисунок 94 – Графическое окно "DeterminationTP\_Window"

АСНИ физических процессов | Не защищено | as.loc/electricalProperties/makeElectricalProp.php

Определение электропроводных свойств | Пользователь: adminAS | Назад | Выход

Минерал | Минерал с порами | Минерал с включениями | Горная порода

Минерал: Магнетит

ОПРЕДЕЛИТЬ



Рисунок 95 – Графическое окно "DeterminationEP\_Window"

АСНИ физических процессов | Не защищено | as.loc/externalStress/makeExternalStress.php

Определение внешнего поля напряжений | Пользователь: adminAS | Назад | Выход

Горная порода | Породный массив

Выберите вид минерала, на основе параметров которого будет осуществляться расчет величины внешнего поля напряжений, действующего на исследуемую горную породу:

Выберите наименование минерала

Размеры образца минерала в составе исследуемой горной породы (мм):

Длина:  Ширина:  Высота:

Линейные размеры трещины в образце минерала (мм):

- вертикально ориентированной трещины:
- горизонтально ориентированной трещины:

Предел прочности зерна на растяжение (МПа):

Концентрация минерала в горной породе (%):

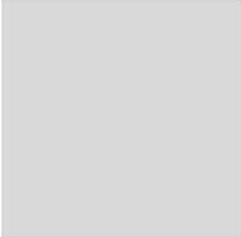


Рисунок 96 – Графическое окно "DeterminationCP\_Window"

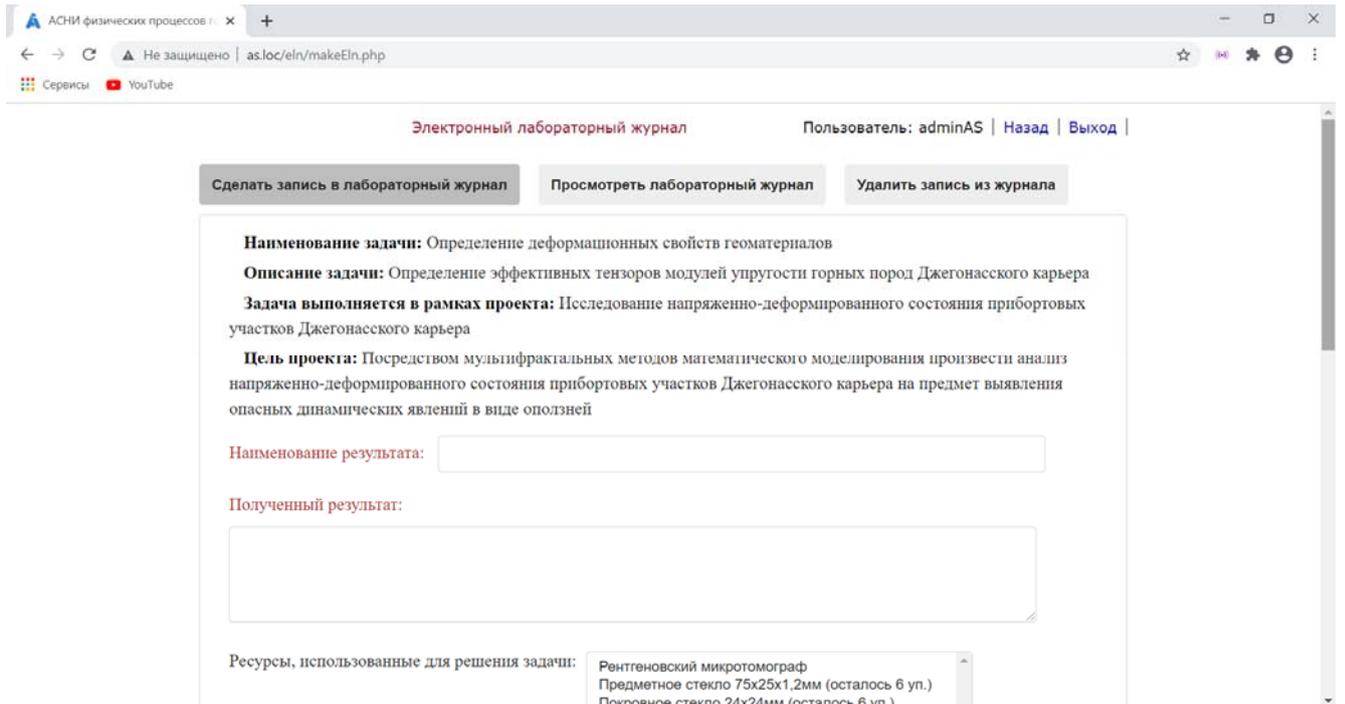


Рисунок 97 – Графическое окно "ELN"

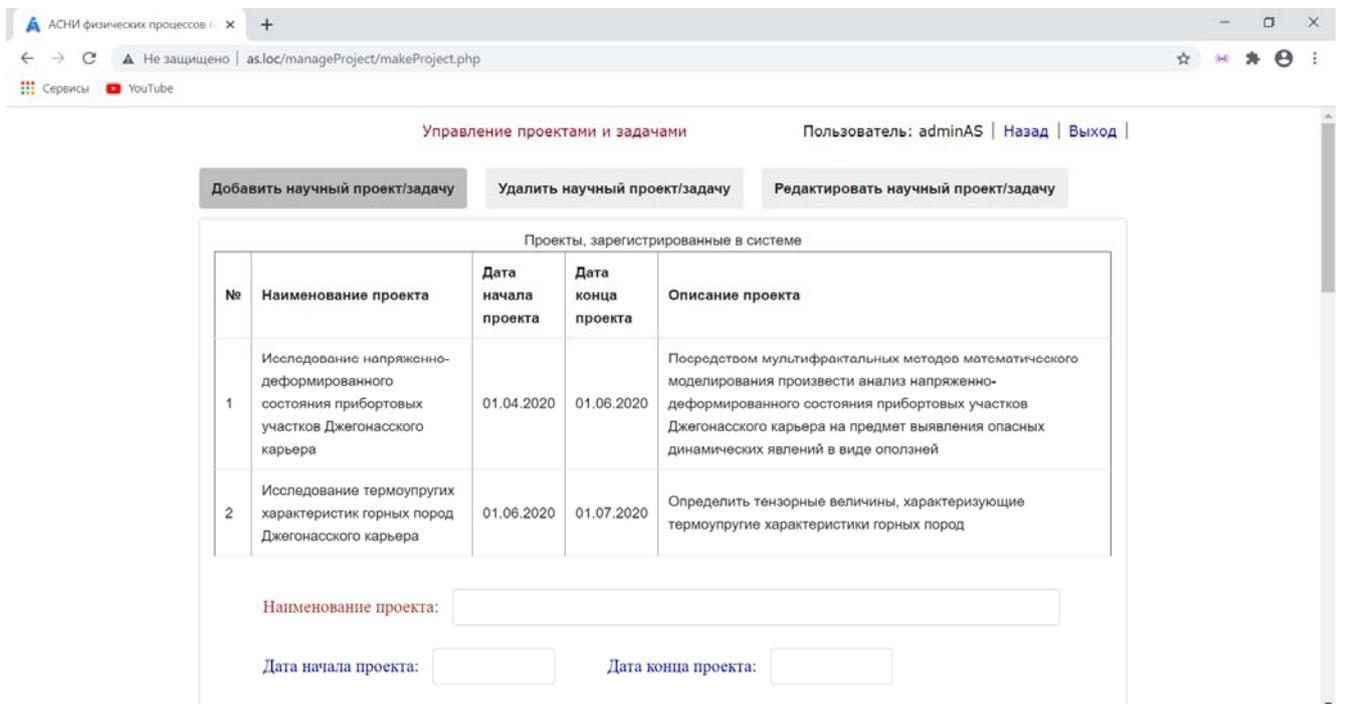


Рисунок 98 – Графическое окно "ManageProjectsAndTasks" пакета "LIMSWindows"

Учет материалов и ресурсов Пользователь: adminAS | [Назад](#) | [Выход](#)

Добавить материал/ресурс Удалить материал/ресурс Редактировать характеристики материала/ресурса

Ресурсы, зарегистрированные в системе

№	Наименование ресурса	Количество	Тип ресурса	Задача, в которой задействован ресурс
8	Рентгеновский микротомограф		Оборудование	Определение деформационных свойств геоматериалов
9	Предметное стекло 75x25x1,2мм	10	Расходный материал	Определение деформационных свойств геоматериалов
10	Покровное стекло 24x24мм	10	Расходный материал	Определение деформационных свойств геоматериалов

Наименование ресурса:

Количество:

Тип ресурса:

Рисунок 99 – Графическое окно "Accounting" пакета "LIMSWindows"

Копирование и восстановление данных Пользователь: adminAS | [Назад](#) | [Выход](#)

Копирование данных

MySQL код структуры и дампа данных таблиц БД:

```
-- База данных: 'administrativeDB'
SET SQL_MODE = "NO_AUTO_VALUE_ON_ZERO";
START TRANSACTION;
SET time_zone = "+00:00";

-- Структура и дампа данных таблицы 'activity'
CREATE TABLE `activity` (
  `activityid` int NOT NULL,
  `taskid` int NOT NULL,
  `title` varchar(60) NOT NULL,
  `description` varchar(250) NOT NULL
) ENGINE=InnoDB DEFAULT CHARSET=utf8mb4 COLLATE=utf8mb4_0900_ai_ci;
INSERT INTO `activity` (`activityid`, `taskid`, `title`, `description`) VALUES
(8, 1, 'Оповещение о собрании 26 августа', 'Обсуждение результатов исследования. Выбор направления дальнейшего исследования.');
```

```
-- Структура и дампа данных таблицы 'physicalparameter'
CREATE TABLE `physicalparameter` (
  `physicalparameterid` int NOT NULL,
```

Рисунок 100 – Графическое окно "BackUpReserve" пакета "LIMSWindows"

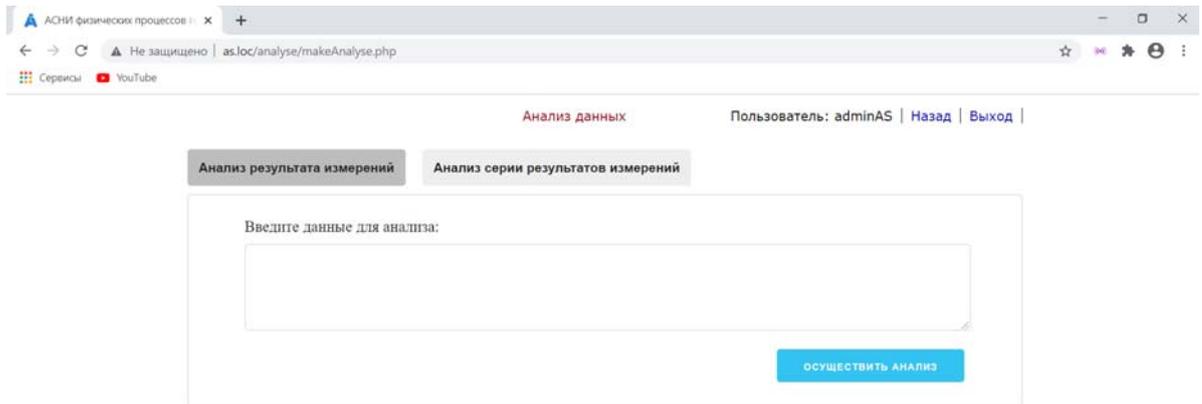


Рисунок 101 – Графическое окно "DataAnalyse" пакета "LIMSWindows"

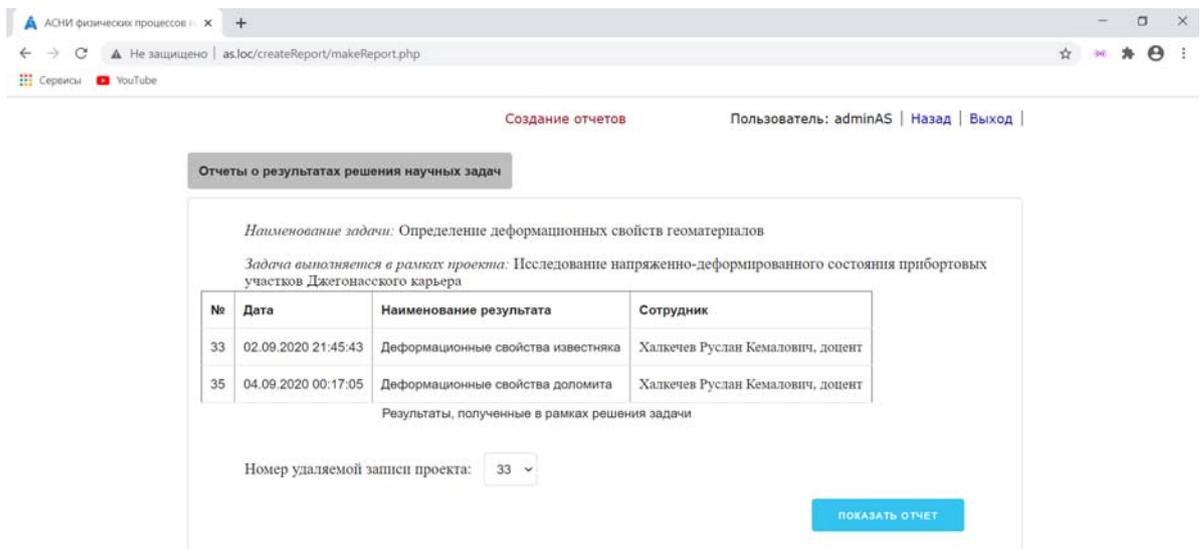


Рисунок 102 – Графическое окно "CreateReport" пакета "LIMSWindows"

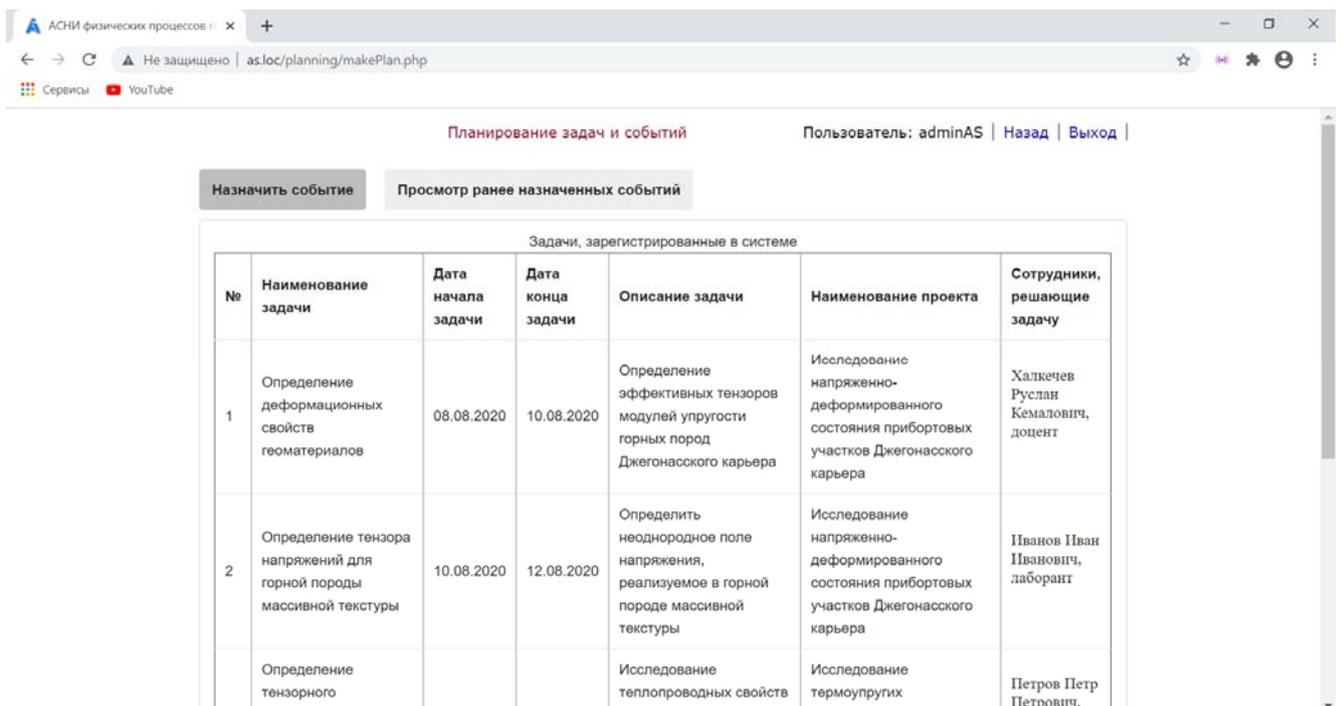


Рисунок 103 – Графическое окно "PlanTasksAndEvents" пакета "LIMSWindows"

"CMS\_Window" представляет собой главное окно системы компьютерного моделирования Matlab, а графическое окно, входящие в пакет "ExpertSystem\_Windows", было представлено ранее (рисунок 78).

#### **4.5. Техническое обеспечение АСНИ физических процессов горного производства**

Перейдем к заключительной стадии разработки АСНИ в рамках предложенного каркасного метода – специфицированию технического обеспечения разрабатываемой АСНИ.

Техническое обеспечение рассматриваемой системы представляет собой совокупность взаимосвязанных технических средств, предназначенных для выполнения выше сформулированных административных и специализированных функциональных задач.

Для описания технического обеспечения системы воспользуемся языком UML в части диаграмм развертывания (deployment diagram). В результате получим, следующую диаграмму (рисунок 104), описывающую статическое представление АСНИ физических процессов горного производства с точки зрения ее развертывания. Из представленной диаграммы следует, что топология аппаратных средств, на которых реализуется техническое обеспечение рассматриваемой АСНИ, состоит из четырех узлов.

Первый узел "Microscope" представляет собой цифровой оптический микроскоп, предназначенный для микрофотографирования структуры исследуемого геоматериала в трех плоскостях. К ограничению, налагаемому на рассматриваемый узел, можно отнести то, что характеристика общего увеличения используемого микроскопа должна быть не менее 100X.

Второй узел "Workstation" указывает на совокупность автоматизированных рабочих мест, на каждом из которых развертываются два компонента ASSR.exe и CMS.exe. Первый из них является реализацией вышеописанной программной архитектуры (рисунок 79). Второй компонент представляет собой исполняемый

файл CMS среды Matlab, необходимый для разработки компьютерных версий математических моделей. Кроме того необходимо отметить, что на ЭВМ, используемых в качестве узла "Workstation", накладываются следующие ограничения – оперативная память не менее 64Гб, внешняя память более 5 Гб и тактовая частота CPU не менее 4,7 ГГц.

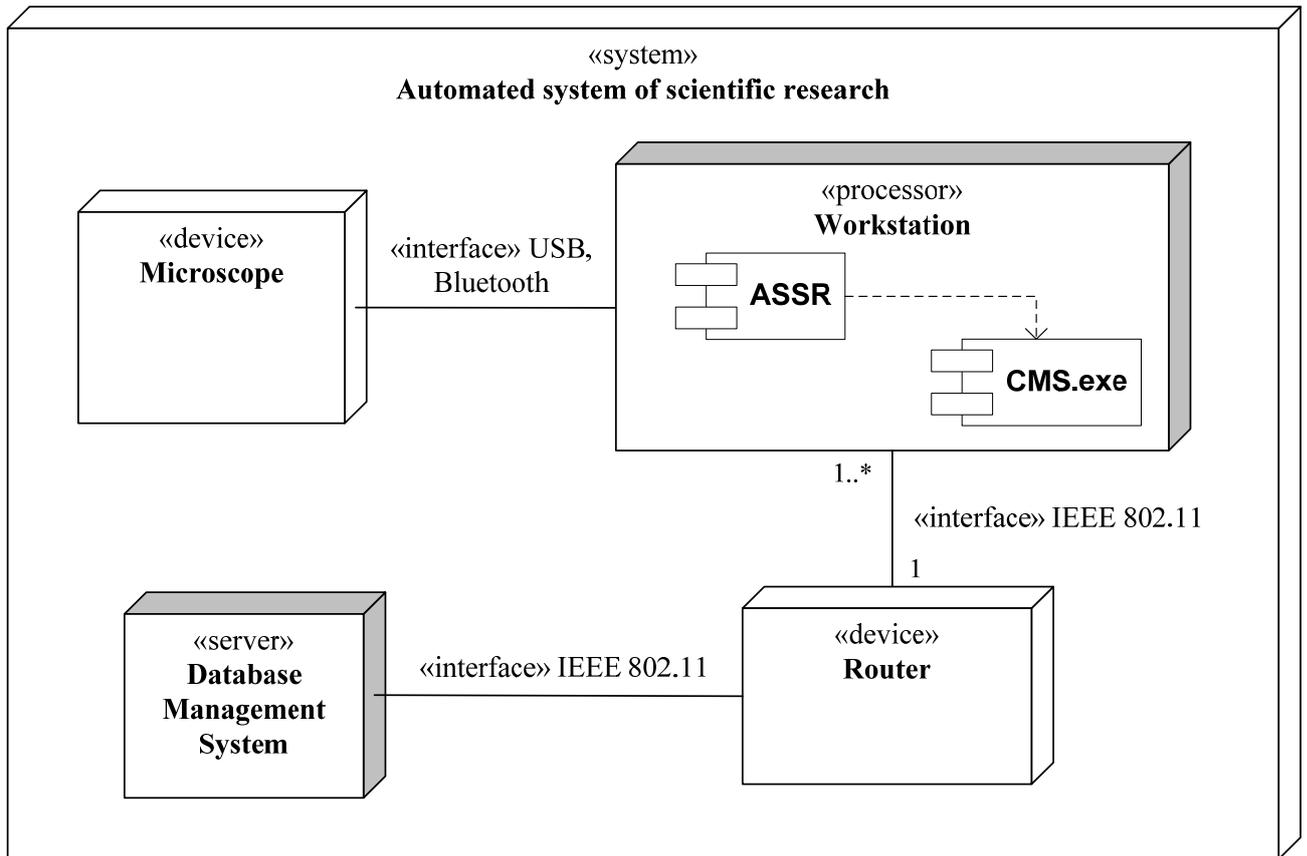


Рисунок 104 – Диаграмма развертывания ТО АСНИ физических процессов горного производства

Следующим узлом рассматриваемой архитектуры технического обеспечения является сервер "Database Management System", на котором в качестве системы управления базами данных используется MySQL. Данный сервер, связанный с автоматизированными рабочими местами посредством узла "Router" (маршрутизатор), предназначен для хранения экспериментальных данных, результатов математического моделирования и другой административной информации, содержащейся в базах данных "БД\_Пользователи" и "БД\_Административное\_Управление".

#### **4.6. Формулирование концепции АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов**

В соответствии с задачами исследований перейдем к разработке АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов. Ее построение начнем с формулирования концепции разрабатываемой АС.

Ведение горных работ в условиях открытой разработки месторождений часто сопровождается возникновением динамических явлений в виде оползней, которые приводят к травматизму людей и наносят существенный технико-экономический ущерб горным предприятиям.

К одним из наиболее распространенных методов борьбы с рассматриваемыми динамическими явлениями относятся методы свайного укрепления, направленные на стабилизацию положения горных пород прибортовых участков массивов с помощью погружения соответствующих свайных конструкций.

В настоящее время существует большое количество научных работ, посвященных разработке такого рода методов. Несмотря на всю ценность данных работ, как показывает практика, применение методов свайного укрепления оползнеопасных участков дает неоднозначные результаты. Так, в одних случаях погруженные в массив сваи перераспределяют напряжения с оползнеопасного участка на другую более устойчивую часть массива. А в других случаях – интегрированные в массив сваи создают недопустимую дополнительную статическую нагрузку на оползнеопасный участок, способствуя сходу оползня. В результате такой неоднозначности ни одна из существующих АСУ ТП забивки свай, используемая в рамках методов свайного укрепления, не в состоянии эффективно решать проблему снижения рисков возникновения оползней. Такая неэффективность связана с существованием одного главного фундаментального недостатка, а именно – ни одна из существующих систем класса АСУ ТП в области забивки свай не учитывает изменение напряженного состояния участков породных массивов, обусловленное возникновением дополнительных

динамических нагрузок от погружения свай ударным способом. Вследствие этого, достаточно часто наблюдаются случаи, когда неправильно выбранная осевая нагрузка ударника на наголовник сваи приводит к излишним динамическим нагрузкам на оползнеопасный участок, в результате которого наблюдается увеличение площади поверхности разрушения оползня. И как результат – увеличивается вероятность схода оползня.

В сложившейся ситуации приобретает актуальность решения функциональной задачи определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи, позволяющей эффективно погружать сваю, не приводя к излишним динамическим нагрузкам на оползнеопасный участок.

На основании изложенного можно сделать вывод об актуальности разработки принципиально новой АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов. К основным функциональным задачам такой системы следует отнести: определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи; определение деформационных свойств геоматериалов; установление значений внешнего поля напряжений, действующего на горную породу с учетом масштабного эффекта. Последние две основные функциональные задачи покрываются сервисами разработанного ранее высокоуровневого каркаса программного обеспечения. В свою очередь, к административным функциональным задачам разрабатываемой АСУ ТП можно отнести: учет материалов и ресурсов; планирование задач и событий; создание отчетов; аутентификация пользователей; резервное копирование и восстановление данных. При этом каждая из данных функциональных задач полностью покрываются сервисами разработанного высокоуровневого программного фреймворка.

В виду преимущественного использования в отечественных АСУ ТП горной промышленности операционных систем на платформе Windows, в качестве графического интерфейса пользователя воспользуемся библиотекой компонентов VCL. В качестве точек расширения планируется использовать программные объекты, разработанные на языке программирования C++ и обеспечивающие обработку событий графического интерфейса пользователя.

В рамках разрабатываемого проекта в качестве технического обеспечения разрабатываемой АСУ ТП предполагается использовать сваебойную установку, оснащенную встроенной системой (embedded system), управляющей исполнительными механизмами гидравлического молота. Взаимодействие с ПЛК осуществляется посредством низкоуровневого API. Главный модуль разрабатываемой АСУ ТП будет портирован на одной ПЭВМ, взаимодействующей с контроллером на физическом уровне через Ethernet интерфейс. Используемая ПЭВМ будет функционировать в промышленной среде и установлена на рабочем месте оператора сваебойной установки.

#### **4.7. Формулирование требований к функциональным задачам АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов**

Перейдем к следующей стадии разработки – формулированию требований к разрабатываемой АСУ ТП. В соответствии с предложенным каркасным методом разработки АС на этой стадии производится построение и сценарное описание диаграммы вариантов использования. При этом сценарное описание варианта использования будем производить в контексте взаимодействия сущностей системы (подсистем, программных объектов и др.) с разработанным ранее высокоуровневым каркасом ПО.

Воспользовавшись языком UML получим следующую диаграмму вариантов использования (рисунок 105). Как следует из представленной диаграммы, каждому варианту использования сопоставляется функциональная задача. При этом в качестве действующего лица в данной диаграмме выступает оператор сваебойной установки.

Так как большинство функциональных задач разрабатываемой АСУ ТП совпадают с задачами построенного программного фреймворка (отличие состоит в использовании геоматериалов в качестве мультифрактальных объектов), разработаем сценарий для вариантов использования «Определение оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник свай».

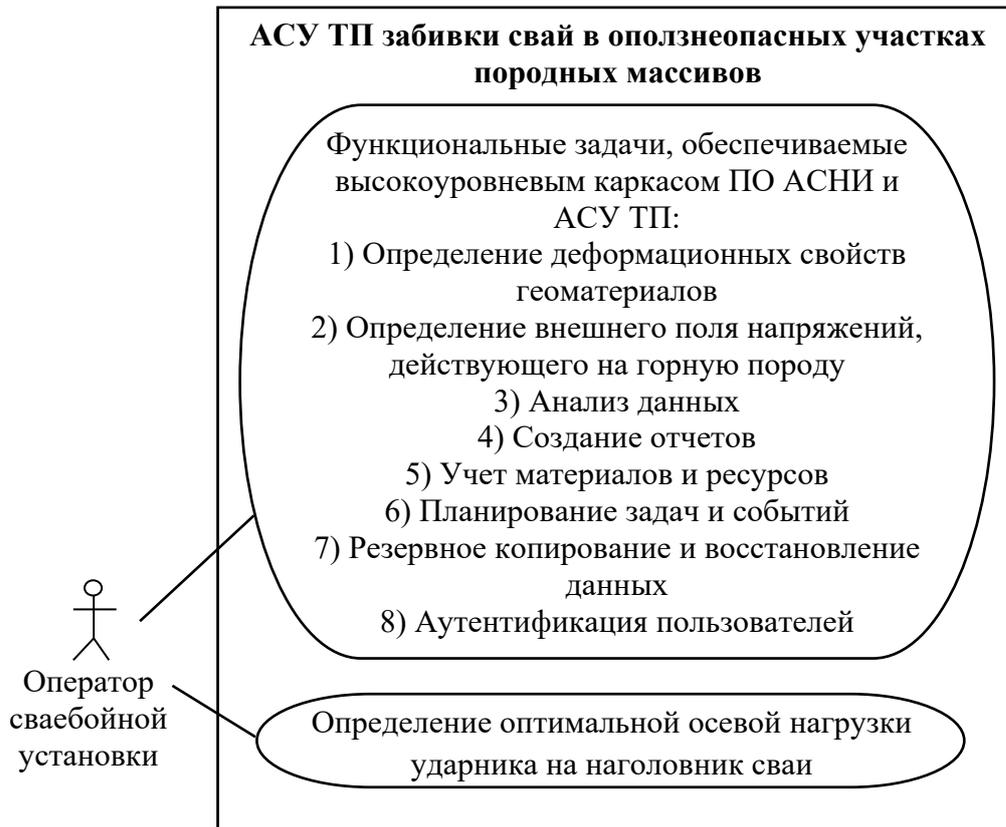


Рисунок 105 – Диаграмма вариантов использования АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породных массивов

*Вариант использования «Определение оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи».*

Действующее лицо: Оператор сваебойной установки.

*Краткое описание.*

Данный вариант использования позволяет в соответствии с напряженно-деформированным состоянием породного массива, глубины залегания и поперечного сечения сваи, определять оптимальную величину осевой нагрузки ударника на наголовник сваи.

*Основной поток событий.*

Данный вариант использования начинает выполняться, когда оператору сваебойной установки потребовалось забить сваю в одно из мест погружения сваи.

1. АСУ ТП запрашивает у встроенной системы управления исполнительными механизмами гидравлического молота значения параметров настройки

технологического процесса.

2. Встроенная система управления исполнительными механизмами гидравлического молота инициализирует параметры настройки технологического процесса.

3. Для участка породного массива соответствующего рассматриваемому месту погружения сваи определить деформационные свойства геоматериалов (для этого исполнить вариант использования «Определение деформационных свойств геоматериалов»).

4. Для участка породного массива соответствующего рассматриваемому месту погружения сваи определить внешнее поле напряжений пластов горных пород (для этого исполнить вариант использования «Определение внешнего поля напряжений, действующего на породный массив»).

5. АСУ ТП запрашивает у оператора сваебойной установки значение текущей глубины залегания сваи.

6. Оператор сваебойной установки вводит значения текущей глубины залегания сваи или данное значение вводится автоматически – посредством отправки запроса на сбор показаний с соответствующего оборудования.

7. На основе установленных значений параметров настройки технологического процесса, деформационных свойств геоматериалов, внешних полей напряжений горных пород, текущего значения глубины залегания, поперечного и осевого сечения сваи, АСУ ТП с помощью соответствующей математической модели в режиме реального времени определяет и устанавливает посредством встроенной системы оптимальную величину осевой нагрузки ударника на наголовник сваи.

*Альтернативные потоки.*

А.2. Неполный список значений параметров технологического процесса.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что встроенная система управления инициализирует неполный список значений параметров технологического процесса, то АСУ ТП выводит сообщение об ошибке. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования завершается.

А.6. Значение текущей глубины залегания сваи – недоступно.

Если во время выполнения основного потока обнаружится, что посредством отправки запроса на сбор показаний соответствующего датчика значение текущей глубины залегания сваи – не получено, то АСУ ТП выводит сообщение об отсутствии автоматического сбора данных и предлагает пользователю ввести значение данного параметра самостоятельно. После вывода данного сообщения выполнение варианта использования продолжается.

*Предусловия.*

Для реализации данного варианта использования необходимо, чтобы успешно был выполнен прецедент «Аутентификация пользователей».

*Постусловия.*

Отсутствуют.

Перейдем к следующему этапу – проектированию АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породного массива. Согласно каркасному методу построения АС произведем математическое моделирование и алгоритмизацию дополнительной основной функциональной задачи «Определение оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи».

#### **4.8. Математическое моделирование и алгоритмизация функциональной задачи определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи**

Решение рассматриваемой функциональной задачи следует начать с применения разработанных в данной главе алгоритмов анализа геоматериалов на предмет мультифрактальности, входящих в базу знаний экспертной системы принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов. Данные алгоритмы позволяют определить, существует ли представительный объем для геоматериалов (минералов, минералов с наполненными флюидами порами, минералов с флюидными включениями, горных пород и пласта), составляющих участок породного массива, в который

погружается свая. Если существует, то пласты рассматриваемого участка и его составляющие являются геоматериалами природно-мультифрактальной структуры, а следовательно, приложение разработанных мультифрактальных математических моделей к исследованию напряженно-деформированного состояния массива, соответствующего месту погружения сваи, даст количественно адекватные результаты. В противном случае, результаты мультифрактального моделирования будут иметь качественный характер.

Таким образом, применяя к реальным пластам бортов карьеров мультифрактальные математические модели и алгоритмы, составляющие каркас математического обеспечения АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности, можно получить адекватные результаты о напряженно-деформированном состоянии исследуемых прибортовых участков породных массивов (в которые будут погружаться сваи) и их структурно-текстурных составляющих.

Однако для решения проблемы определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи этого не достаточно, – требуется разработка математической модели разрушения прибортового участка породного массива в условиях погружения сваи ударным способом. Воспользовавшись экспертной системой принятия решений, входящей в состав АСНИ физических процессов горного производства, было установлено, что для такой модели разрушения прибортового участка требуется использовать перколяционную теорию.

В связи с этим перейдем к построению перколяционной математической модели, позволяющей описать процесс разрушения прибортового участка породного массива под воздействием технологического процесса забивки свай. Именно данная модель должна стать основой для решения функциональной задачи определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи.

Рассмотрим в трехмерной плоскости прибортовой участок породного массива, в который производится погружение сваи ударным способом. Не теряя общности, будем считать, что данный участок слагается пятью видами горных пород: кварцевые песчаники, известковые мергели, известняки, слюдястый кварцево-полевошпатовый песчаник, кварцево-полевошпатовый песчаник.

Построим в соответствующем масштабе трехмерную модель рассматриваемого приборного участка (рисунок 106), разделенную на секторы, соответствующие горным породам.

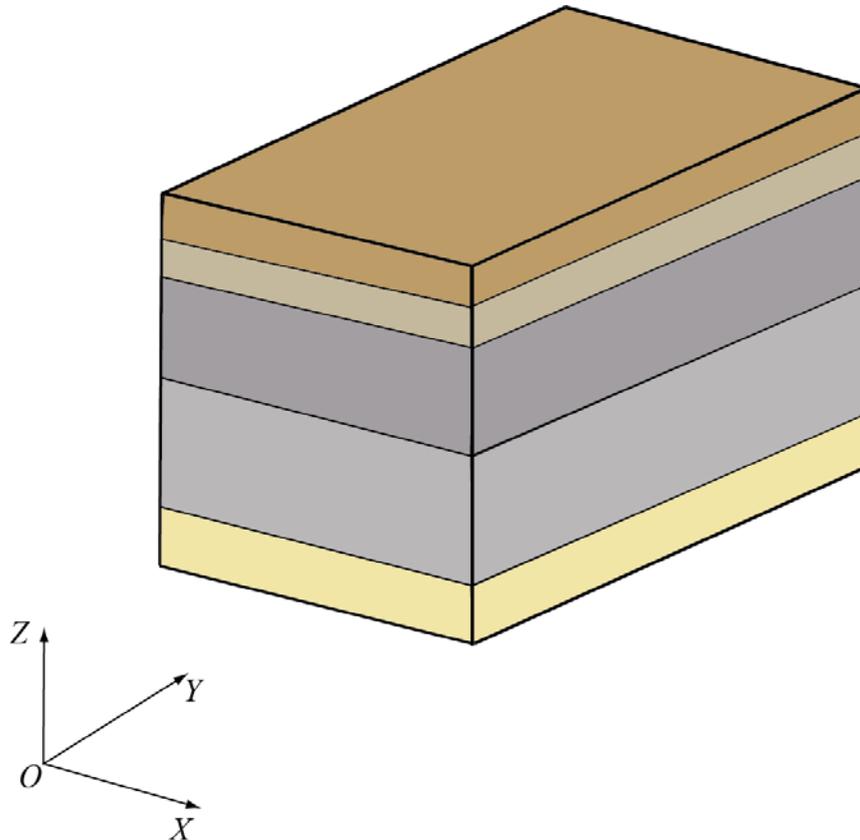


Рисунок 106 – Трехмерная модель исследуемого приборного участка

Разобьем каждую горную породу рассматриваемого приборного участка на одинаковые кубики. При этом в отличие от ранее рассмотренной перколяционной модели, представленной во второй главе, в данном случае объем каждого кубика равен максимальной величине из представительных объемов минералов с наполненными флюидом порами, составляющих данные породы. В результате получим следующую трехмерную перколяционную решетку (рисунок 107). Поскольку в дальнейшем, при построении модели будет использоваться еще один вид перколяционных решеток, то назовем данную трехмерную решетку – глобальной. Итак, имеется глобальная трехмерная перколяционная решетка, по существу являющаяся графической моделью исследуемого приборного участка породного массива на верхнем уровне. В этой решетке каждому кубику соответствует определенный вид минерала с наполненными флюидом порами.

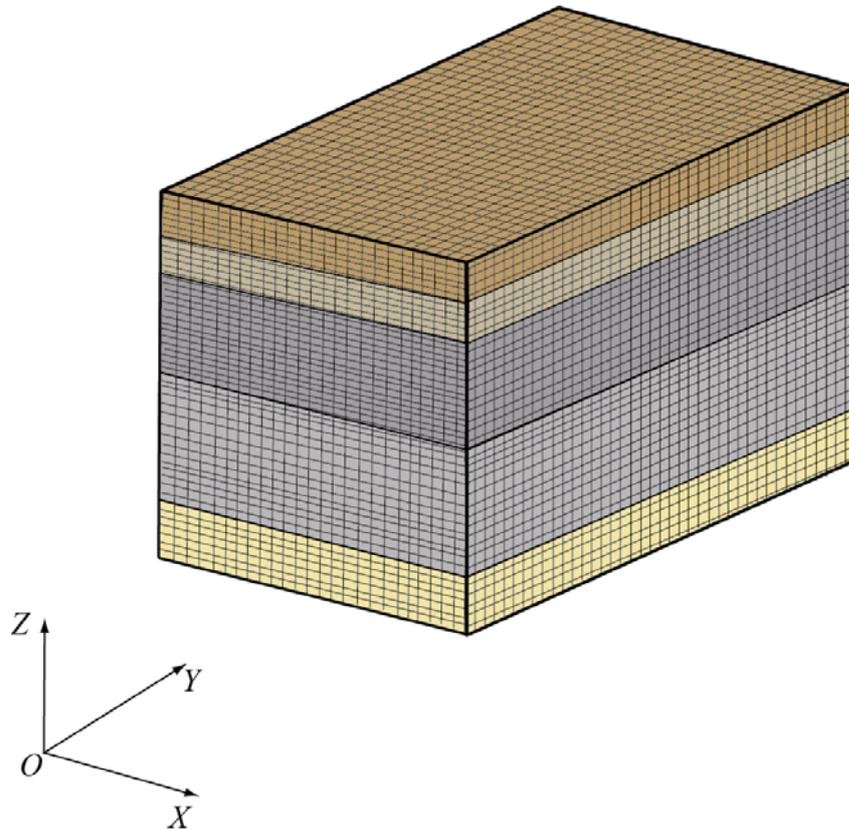


Рисунок 107 – Трехмерная перколяционная решетка исследуемого участка

При этом необходимо отметить, что выбор минералов с порами в качестве элемента решетки обусловлен лишь удобствами исследования, поскольку, в конечном счете, процесс разрушения борта карьера, обусловлен полями напряжений и давлений пор в зернах геоматериалов (рассматриваемых в локальных трехмерных перколяционных решетках, описывающих рассматриваемый прибортовой участок породного массива на нижнем уровне).

Каждому кубику из исследуемой глобальной трехмерной перколяционной решетки верхнего уровня сопоставим параметр  $w = (x, y, z, \alpha, \beta, \lambda)$ , где  $x, y, z$  – координаты центра кубика;  $\alpha$  – номер сектора в перколяционной решетке (каждый сектор соответствует горной породе прибортового участка);  $\beta$  – порядковый номер, определяющий вид минерала в породе исследуемого прибортового участка;  $\lambda$  – индикатор разрушения, определяемый следующим

образом:  $\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если кубик разрушен} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$ .

Тогда рассматриваемую трехмерную решетку можно описать множеством  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , где  $n$  – общее количество кубиков в данной решетке.

Исследование процессов разрушения в пространстве является трудоемкой задачей. Поэтому разделим исследуемую трехмерную перколяционную решетку на совокупность слоев параллельных плоскости  $ZOX$ .

Полученные слои будут описываться подмножествами  $G_1, G_2, \dots, G_k$  множества  $W$ , каждое из которых определяется следующим образом:

$$G_i = \{w : y = b_i\}, w \in W, i = 1..k,$$

где  $b_i$  – набор значений, указывающих соответственно на координаты центра кубика по оси  $OY$ ;  $k$  – количество слоев в направлении плоскости  $ZOX$  в рассматриваемой глобальной трехмерной перколяционной решетке.

Поскольку ширина всех слоев равна ширине кубика, то каждый слой можно заменить соответствующей плоской фигурой (рисунок 108).

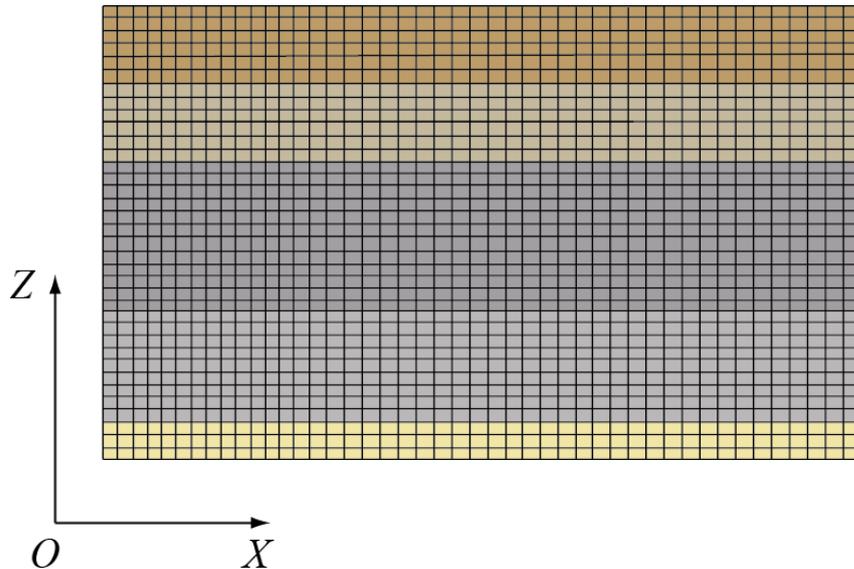


Рисунок 108 – Вид глобальной двухмерной решетки

Таким образом, далее вместо рассматриваемой трехмерной перколяционной решетки будем исследовать совокупность из  $k$  глобальных двухмерных решеток, каждая из которых, описывается подмножеством  $G_i \in W$ .

Перейдем к компьютерному моделированию процесса разрушения рассматриваемого прибортового участка породного массива. Этот процесс

заключается в выполнении для каждой полученной глобальной двумерной перколяционной решетки следующего компьютерного эксперимента.

Пусть каждый квадрат рассматриваемой глобальной решетки может находиться в двух состояниях – "занято трещиной" и "свободно от трещины". Первое из них соответствует случаю, когда минерал с наполненными флюидом порами – разрушен. Второе – геоматериал целый. Квадрат в занятом состоянии будем закрашивать черным цветом, в свободном – цвет сектора в котором он находится. Вначале все квадраты глобальной двумерной перколяционной решетки устанавливаются в состояние "свободно от трещины".

Далее, для каждого квадрата из рассматриваемой решетки осуществляется следующая процедура. Сначала с помощью генератора случайных чисел, в соответствии с номером сектора  $\alpha$  в котором он находится, получаем число  $\beta$ , определяющие вид минерала с порами в исследуемой горной породе. Так, например, для кварцевого полевошпатового песчаника,  $\alpha = 5$ , а  $\beta = 1 \div 4$ , поскольку типовой состав данной породы состоит из четырех видов минералов – кварца, полевого шпата, корунда и гематита. После этого, генерируется локальная перколяционная решетка (рисунок 109), имеющая кубический вид и объем которой равен представительному объему минерала с наполненными флюидом порами (вид данного геоматериала определяется величиной  $\beta$ ). В данной решетке каждому кубику соответствует зерно с наполненной флюидом порой.

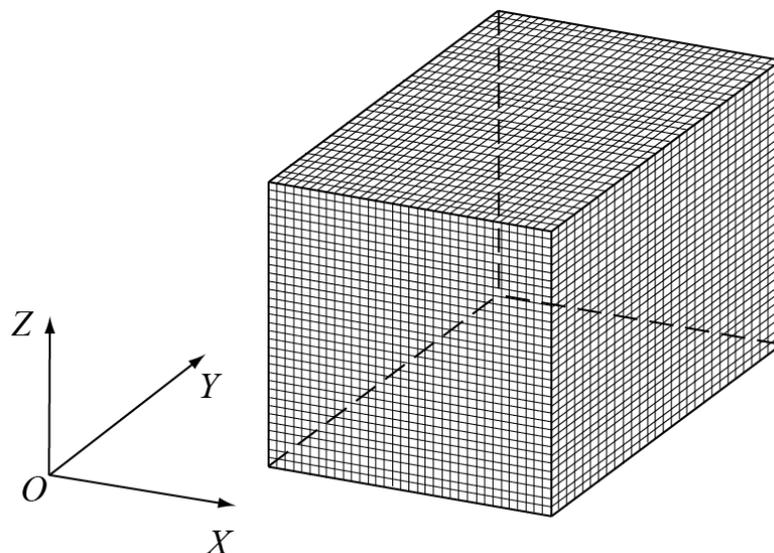


Рисунок 109 – Вид локальной перколяционной решетки

Далее, необходимо исследовать полученную локальную кубическую решетку на предмет перколирования. Способ такого исследования во многом идентичен, что и для рассмотренной ранее перколяционной модели экспериментального исследования образования трещин в минерале под действием внешнего поля напряжений. Так, сначала, полученная трехмерная локальная кубическая решетка делится на совокупность слоев вдоль плоскости  $ZOY$ .

В результате такого деления, получается совокупность локальных двумерных решеток. Далее, с помощью модифицированной мультифрактальной математической модели зерна относительно поля напряжений (сомножитель описывающий напряженное состояние пласта отсутствует):

$$\begin{aligned} \sigma^{(nz)} = & C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \cdot \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \cdot \langle C^{(nz)} \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle \times \\ & \times \langle \left( I + B \cdot C^{(1nz)} \right)^{-1} \rangle^{-1} \cdot \left( I + H \cdot C^{(1tgp)} \right)^{-1} \times \\ & \times \left[ I + \frac{1}{r} \int K(x-x') \cdot \Phi(x-x') dx' \right]^{-1} \cdot C'^{(eftgp)} \cdot \sigma^{(0tgp)}, \end{aligned} \quad (2.168)$$

и математической модели зерна с наполненной флюидом порой относительно поля давлений:

$$p\delta^{ij} = p_0 I^{ijkl} \left( I^{klmn} + B^{(nzp)} \left( p_0 I^{pqmn} - C^{(nz)} \right) \right)^{-1} \left( C^{(nz)} \right)^{-1} \sigma_{sd}^{(nz)}, \quad (2.172)$$

определяется вероятность разрушения зерна с порой. После чего проводится компьютерный эксперимент на предмет перколяции.

Если будет обнаружено, что рассматриваемая кубическая решетка (рисунок 109) перколирует, т.е. в каждой локальной двумерной квадратной решетке (из их совокупности) обнаруживается хотя бы один бесконечный горизонтальный или вертикальный кластеры (рисунки 110 и 111), то исходный квадрат глобальной решетки необходимо перевести в состояние "занято трещиной" и закрасить в черный цвет. В противном случае данный квадрат сохраняет свое состояние "свободно от трещины" и имеет цвет сектора, в котором он находится. Таким образом, в рассматриваемой модели глобальная трехмерная перколяционная решетка имеет иерархическое строение. Каждый структурный элемент (кубик)

такой решетки является по факту отдельной трехмерной решеткой, называемой локальной и имеющей кубический вид. В результате, компьютерные эксперименты, проводимые для каждой локальной решетки, определяют процессы перколяции в глобальной решетке.

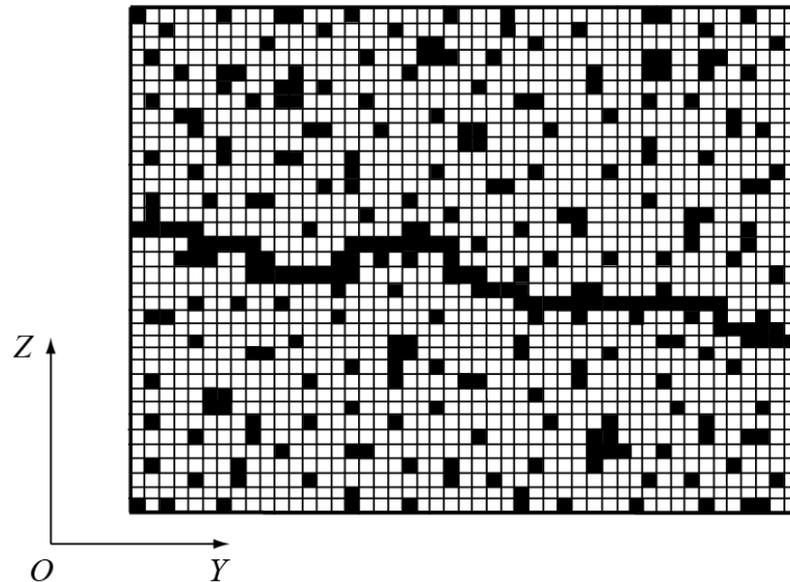


Рисунок 110 – Бесконечный горизонтальный кластер в локальной двумерной квадратной решетке

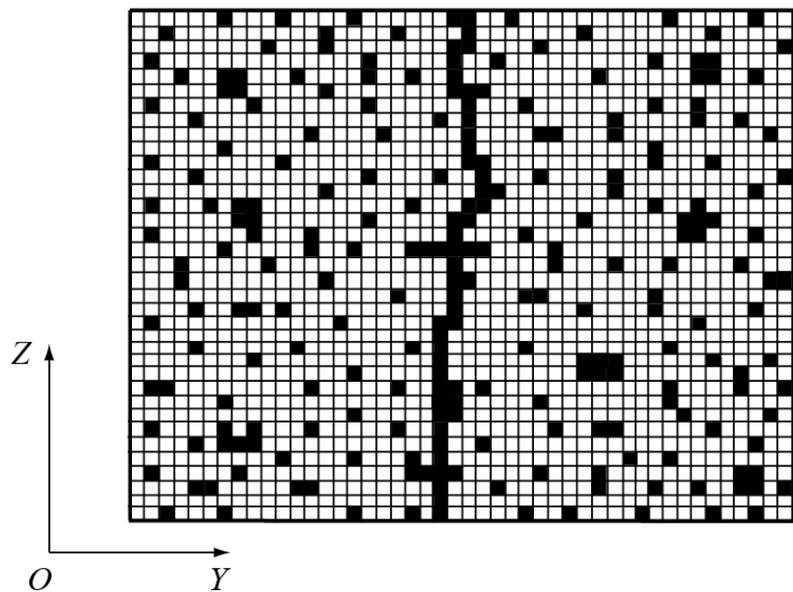


Рисунок 111 – Бесконечный вертикальный кластер в локальной двумерной квадратной решетке

В результате выполнения серий из  $k$  компьютерных экспериментов было

получено, что некоторые квадраты в глобальных двумерных решетках либо изолированы друг от друга, либо образуют конечные или бесконечные кластеры (рисунок 112).

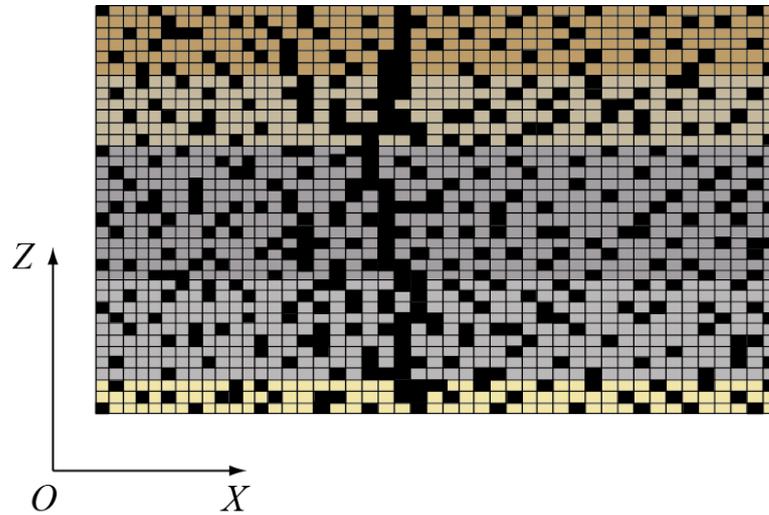


Рисунок 112 – Различные виды кластеров в глобальной двумерной решетке

Среди представленных видов кластеров особого внимания заслуживают бесконечные вертикальные кластеры, площадь квадратов которых в каждом из секторов равна или немного превышает проектное значение площади осевого сечения погруженной сваи в соответствующей горной породе. Один из таких кластеров указан на рисунке 113.

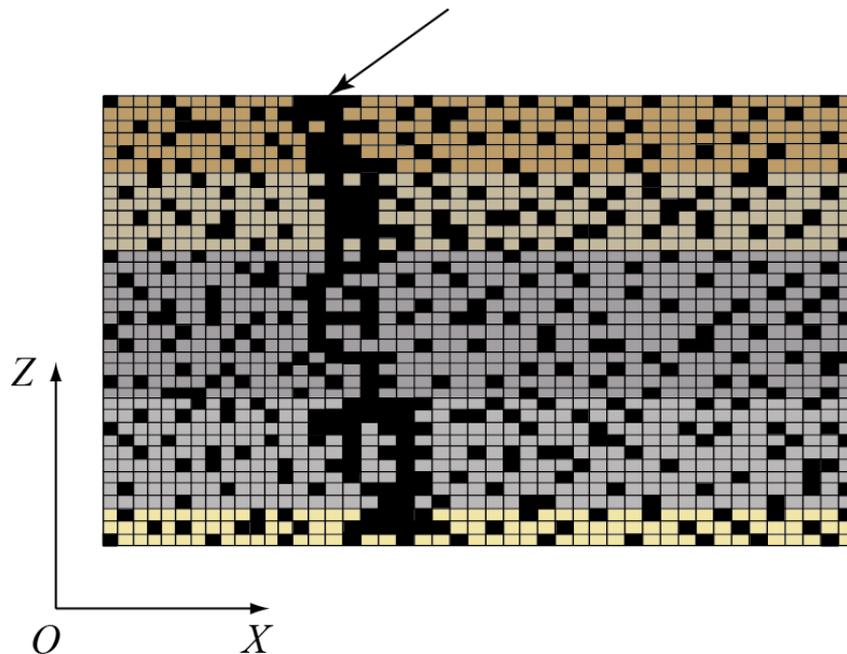


Рисунок 113 – Вид приоткосного кластера в глобальной двумерной решетке

В дальнейшем подобного рода бесконечные вертикальные кластеры будем называть приоткосными. Как показывают компьютерные эксперименты реализация приоткосных кластеров в каждой из  $k$  глобальных двухмерных решеток приводит к образованию трещины, размеры которой минимальны для погружения сваи ударным способом, что обеспечивает максимальное сцепление с разрушаемой горной породой.

Таким образом, для решения функциональной задачи определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи, сначала необходимо установить критические значения величин внешних полей напряжений  $\sigma^{(0ctgp)} [1..l]$  ( $l$  – количество горных пород в рассматриваемом прибортовом участке породного массива), при которых в каждой глобальной двухмерной перколяционной решетке реализуется приоткосный кластер. Далее, сопоставляя установленные критические значения  $\sigma^{(0ctgp)} [1..l]$  с текущими значениями данных величин  $\sigma^{(0tgp)} [1..l]$ , требуется для каждой горной породы в рассматриваемом прибортовом участке определить минимальную величину осевого напряжения (обусловленного забивкой свай), которое приведет к образованию приоткосных кластеров в глобальных двухмерных решетках. В итоге получим совокупность минимальных величин осевого напряжения  $\sigma^{(ax)} [1..l]$ , реализацию которых должен обеспечить технологический процесс забивки свай. Однако для решения рассматриваемой функциональной задачи этого недостаточно, необходимо определить величины осевых нагрузок  $F [1..l]$  на наголовник сваи, приводящих к формированию установленных величин осевого напряжения  $\sigma^{(ax)} [1..l]$ . Для этого, воспользуемся тем фактом, что напряжение, возникающее при внезапном приложении осевой нагрузки  $F$  к твердому телу, вдвое больше напряжения, возникающего в этом теле при статическом приложении такой же нагрузки  $F$ , т.е.

$$\frac{F}{2S_{ncc}} = \sigma^{(ax)},$$

где  $S_{ncc}$  – площадь поперечного сечения сваи.

Принимая это во внимание, а также делая обоснованные допущения об отсутствии потери энергии при ударном нагружении, получим следующее выражение для расчета величин осевых нагрузок на наголовник сваи при ее погружении в каждую из горных пород рассматриваемого прибортового участка:

$$F[i] = 2 \sigma^{(ax)} [i] S_{ncc},$$

где  $i = 1..l$  – индекс, указывающий на порядковый номер горной породы.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующий обобщенный алгоритм определения оптимальной осевой нагрузки ударника на наголовник сваи, представленный в обобщенном виде.

1. На основе геологических и геофизических данных построить трехмерную модель участка породного массива, в который погружается свая. Представленная модель должна быть разделена на секторы, отражающими в соответствующем масштабе границы горных пород с указанием их минералогического состава.
2. С помощью выше разработанного метода определить величины представительных объемов горных пород исследуемого участка и его составляющих минералов, минералов с наполненными флюидом порами, минералов с флюидными включениями. Если для определенных горных пород присутствуют нулевые значения, то осуществить вывод: результаты перколяции в прибортовом участке на уровне горных пород с нулевыми значениями представительных объемов носят качественный характер (относительная погрешность получаемых результатов превышает 15%).
3. Разбить полученную трехмерную модель на совокупность кубиков, объем каждого из которых равен максимальной величине  $V_{MAX}$  из представительных объемов  $V_{IP}[1..q]$  минералов с наполненными флюидом порами, слагающих данные пласты. В результате будет получена глобальная трехмерная перколяционная решетка прибортового участка породного массива.
4. Разделить полученную глобальную трехмерную решетку на совокупность слоев параллельных плоскости  $YOZ$ . Каждому такому слою сопоставить двухмерную

перколяционную решетку. В результате – получить совокупность из  $k$  глобальных двухмерных перколяционных решеток.

5. Определить совокупность проектных значений площадей осевых сечений  $S_{occ}[1..l]$  погруженной сваи в соответствующие горные породы.

6. Определить начальные значения величин внешних полей напряжений  $\sigma^{(0tgp)}[1..l]$ , действующих на горные породы рассматриваемого прибортового участка ( $l$  – общее количество горных пород).

7. Критическим значениям величин внешних полей напряжений  $\sigma^{(0ctgp)}[1..l]$ , при которых в каждой глобальной двухмерной перколяционной решетке реализуется приоткосный кластер (бесконечный вертикальный кластер, площадь квадратов которого в каждом из секторов равна или немного превышает проектные значения  $S_{occ}[1..l]$ ), присвоить значения  $\sigma^{(0tgp)}[1..l]$ .

8. Булевой переменной  $m$ , указывающей на наличие приоткосного кластера в каждой из глобальной двухмерных перколяционных решеток, присвоить значение равное 0, т.е.  $m \leftarrow 0$ .

9. Цикл Пока  $m = 0$  делать нижеследующую процедуру.

9.1. Цикл  $i = 1$  до  $k$  с шагом 1.

9.2. Для каждого кубика  $i$ -й глобальной двухмерной перколяционной решетки выполнить нижеследующие действия.

9.2.1. Определить номер сектора  $\alpha$  перколяционной решетки (каждый сектор соответствует горной породе рассматриваемого прибортового участка), в котором находится кубик.

9.2.2. В соответствии с номером сектора  $\alpha$  сгенерировать случайное число  $\beta = 1 \div \eta$ , определяющее вид минерала с порами ( $\eta$  – количество видов минералов слагающих пласт, характеризуемых параметром  $\alpha$ ).

9.2.3. Построить локальную трехмерную перколяционную решетку, имеющую форму куба и объем, равный  $V_{MAX}$ . Размеры каждого кубика данной решетки установить равным среднему размеру объема минерала с наполненными

флюидом порами, вид которого определяется величиной  $\beta$ .

9.2.4. Разделить полученную локальную трехмерную решетку на совокупность слоев параллельных плоскости  $YOZ$ . Каждому такому слою сопоставить двумерную перколяционную решетку.

9.2.5. Для зерен рассматриваемого вида минерала, определяемого параметром  $\beta$ , установить предел прочности  $\sigma_p$  на растяжение.

9.2.6. Определить входные параметры мультифрактальных математических моделей зерна относительно поля напряжений и зерна с наполненной флюидом порой относительно поля давлений. Если какие-либо из данных параметров имеют нечеткий вид, то посредством вычисления модальных значений привести их к четким величинам.

9.2.7. Посредством нижеследующей процедуры определить текущую вероятность разрушения  $P_{RD}$  в локальной трехмерной перколяционной решетке.

$$q_A \leftarrow 0; q_B \leftarrow 0;$$

$\{\varphi, \theta, \psi$  – углы Эйлера. В качестве конечного значения счетчиков цикла приняты  $11\pi/12$  и  $23\pi/12$  поскольку  $\varphi(0) = \varphi(\pi)$ ,  $\theta(0) = \theta(2\pi)$ ,  $\psi(0) = \psi(2\pi)$  }

Цикл  $\varphi = 0$  до  $11\pi/12$  с шагом  $\pi/12$

Цикл  $\theta = 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$

Цикл  $\psi = 0$  до  $23\pi/12$  с шагом  $\pi/12$

$$\begin{aligned} \sigma^{(nz)}(\varphi, \theta, \psi) &\leftarrow C^{(nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \left( I + B^{(nz)}[\beta] \cdot C^{(1nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \times \\ &\times \left\langle C^{(nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \left( I + B^{(nz)}[\beta] \cdot C^{(1nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left\langle C^{(nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \left( I + B^{(nz)}[\beta] \cdot C^{(1nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \left( I + B^{(nz)}[\beta] \cdot C^{(1nz)}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \cdot \left( I + H^{(tgp)}[\beta] \cdot C^{(1tgp)}[\beta] \right)^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \mathbf{I} + \frac{1}{r} \int^{(tgp)} \mathbf{K} [\alpha] (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \Phi [\alpha] (\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right]^{-1} \cdot \mathbf{C}' [\alpha] \cdot \boldsymbol{\sigma} [\alpha];$$

Если  $\overset{(nz)}{\sigma}_{11}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p$  или  $\overset{(nz)}{\sigma}_{22}(\varphi, \theta, \psi) \geq \sigma_p$ , то увеличить на 1 число состояний (ориентаций зерна в пространстве)  $q_A$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля напряжений;  $\{q_A \leftarrow q_A + 1\}$

$$p\delta^{ij}(\varphi, \theta, \psi) \leftarrow p_0[\beta] \cdot \mathbf{I}^{ijkl} \left( \mathbf{I}^{klmn} + \overset{(nzp)}{\mathbf{B}}^{klpq}[\beta] \left( p_0[\beta] \cdot \mathbf{I}^{pqmn} - \overset{(nz)}{\mathbf{C}}^{pqmn}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \right) \right)^{-1} \times \\ \times \left( \overset{(nz)}{\mathbf{C}}^{mnsd}[\beta](\varphi, \theta, \psi) \right)^{-1} \overset{(nz)}{\sigma}_{sd}[\beta](\varphi, \theta, \psi);$$

Если  $p(\varphi, \theta, \psi) > \frac{1}{5}\sigma_p$ , то увеличить на 1 число состояний  $q_B$ , при которых происходит разрушение зерна посредством поля давлений;  $\{q_B \leftarrow q_B + 1\}$

Конец цикла  $\psi$ ; Конец цикла  $\theta$ ; Конец цикла  $\varphi$ ;

$$P(A) \leftarrow q_A / w; P(B) \leftarrow q_B / w;$$

*{число возможных состояний w равно 13824}*

$$P_{RD} \leftarrow P(A) + P(B);$$

9.2.8. Для каждой локальной двухмерной перколяционной решетки, полученной на шаге 9.2.4, провести компьютерный эксперимент, заключающийся в следующем.

Вначале все квадраты рассматриваемой локальной двухмерной перколяционной решетки установить в состояние "свободно от трещины" и закрасить в белый цвет. Далее, для каждого квадрата из решетки с помощью генератора равномерно распределенных случайных чисел сгенерировать случайное число  $P$  от 0 до 1. Если полученное значение  $P$  окажется меньше вероятности  $P_{RD}$  разрушения зерна с наполненной флюидом порой, то квадрат переходит в состояние "занято трещиной" и закрашивается в черный цвет. В противном случае, квадрат сохраняет свое состояние – "свободно от трещины".

9.2.9. Если в каждой локальной двухмерной решетке реализуется хотя бы один

бесконечный горизонтальный или вертикальный кластер, то исходный кубик  $i - j$  глобальной двумерной перколяционной решетки перевести в состояние "занято трещиной" и закрасить в черный цвет. В противном случае данный квадрат сохраняет свое состояние "свободно от трещины" и имеет цвет сектора, в котором он находится.

9.3. Конец цикла  $i$ .

9.4. Если в каждой глобальной двумерной перколяционной решетке не реализуется хотя бы один приоткосный кластер, то увеличить компоненты  $\sigma_3^{(0ctgp)}$  значений параметров  $\sigma^{(0ctgp)} [1..l]$  и перейти к шагу 9, иначе булевой переменной  $m$  присвоить значение равное 1, т.е.  $m \leftarrow 1$ .

9.5. Конец Цикла Пока  $m = 0$ .

10. Определить совокупность минимальных величин осевого напряжения  $\sigma^{(ax)} [1..l]$ , реализацию которых должен обеспечить технологический процесс забивки свай. Для этого необходимо выполнить нижеследующий цикл:

Цикл  $i = 1$  до  $l$  с шагом 1

$$\sigma^{(ax)} [i] \leftarrow \sigma_3^{(0ctgp)} [i] - \sigma_3^{(0tgp)} [i];$$

Конец цикла  $i$

11. Определить площадь  $S_{ncc}$  поперечного сечения сваи.

12. Определить величины осевых нагрузок  $F[1..l]$  на наголовник сваи, приводящих к формированию установленных величин осевого напряжения  $\sigma^{(ax)} [1..l]$ . Для этого необходимо выполнить нижеследующий цикл:

Цикл  $i = 1$  до  $l$  с шагом 1

$$F[i] \leftarrow 2 \sigma^{(ax)} [i] S_{ncc};$$

Конец цикла  $i$

13. Осуществить вывод величин осевых нагрузок  $F[1..l]$ .

#### **4.9. Программное обеспечение АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов**

Поскольку в рамках рассматриваемой системы отсутствуют основные функциональные задачи, требующие применения IT-решений в сфере искусственного интеллекта, то перейдем к стадиям проектирования архитектуры ПО АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов и ее последующей реализации. Для этого воспользуемся разработанным высокоуровневым программным фреймворком в качестве основы для проектирования и реализации ПО рассматриваемой АСУ ТП. Применяв механизм наследования, добавляя и переопределяя методы доступа к свойствам соответствующих классов, придем к следующей архитектуре ПО АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов (рисунок 114).

Как следует из данной диаграммы, представленная архитектура состоит из пяти подсистем и пакета GUI. Подсистема "Experimental definition of physical properties" реализует функциональную задачу анализа данных. В рамках рассматриваемой АСУ ТП данная функциональная задача направлена на обработку результатов геологических и геофизических данных, используемых в дальнейшем при построении трехмерной модели участка породного массива. К таким данным относятся величины: концентраций минералов в горных породах и флюидсодержащих включений в геоматериалах, пределов прочности зерен.

Подсистема "Experimental definition of physical properties" реализуется классами, наследуемыми от экземпляров пакета "ExpDesignAndDataAnalysis", входящего в состав разработанного ранее программного фреймворка АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности.

Подсистема "Administrative functional maintenance" предназначена для автоматизации административных функциональных задач АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породного массива. К таким задачам относятся: учет материалов и ресурсов; планирование задач и событий; создание отчетов; аутентификация пользователей; резервное копирование и восстановление данных.

Классы-потомки данной подсистемы наследуются от классов пакета "PlanningAndControl".

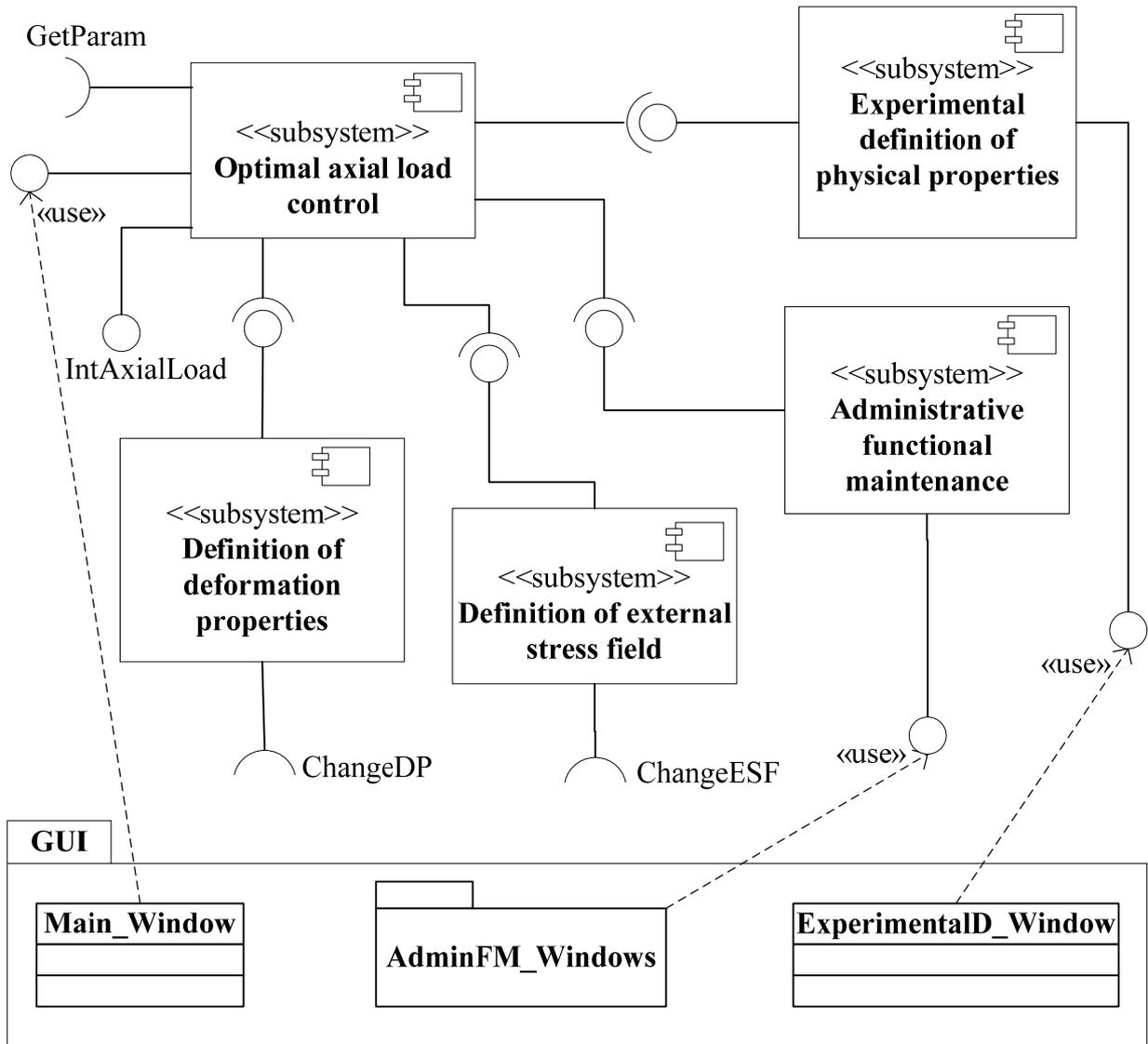


Рисунок 114 – Архитектура ПО АСУ ТП забивки свай в оползнеопасных участках породных массивов

Рассмотрим следующую подсистему – "Definition of deformation properties". Она реализует функциональную задачу определения деформационных свойств геоматериалов, составляющих оползнеопасный участок, на котором производится погружение свай ударным способом. Как и идентичная подсистема из АСНИ физических процессов горного производства "Definition of deformation properties" она направлена на установление значений эффективных тензоров модулей

упругости и упругих податливостей геоматериалов, составляющих рассматриваемый массив. Однако есть и существенные отличия. Так, во-первых, рассматриваемая подсистема в случае использования тензоров в нечетком виде производит их дефаззификацию, что не требовалось при решении функциональной задачи определения деформационных свойств геоматериалов АСНИ физических процессов горного производства. Во-вторых, в "Definition of deformation properties" предусмотрен программный интерфейс "ChangeDP", использование которого позволяет в режиме реального времени изменять значения концентрации флюидных включений в минералах, составляющих оползнеопасный участок. Наличие такого интерфейса позволяет посредством соответствующего геофизического оборудования (например, георадаром) осуществлять технологический процесс забивки свай в условиях изменения деформационных свойств геоматериалов оползнеопасного участка, вызванного выпадением осадков, таянием снега и любым другим воздействием, в том числе и техногенного характера.

Следующая подсистема "Definition of external stress field" отвечает за определение внешнего поля напряжений, действующего на горные породы, составляющие оползнеопасный участок породного массива. Реализация такой подсистемы во многом совпадает с аналогичной подсистемой из программной архитектуры АСНИ физических процессов горного производства, отличаясь только тем, что в ее составе отсутствует класс, отвечающий за свойства пластов породного массива. Как и в случае с "Definition of deformation properties" в рассматриваемой подсистеме предусмотрен дополнительный программный интерфейс. В рамках подсистемы "Definition of external stress field" данный интерфейс – "ChangeESF" – позволяет посредством передачи линейных размеров трещин производить корректировку значений внешних полей напряжений, действующего на горные породы, составляющие оползнеопасный участок.

Заключительной подсистемой является "Optimal axial load control". Данная подсистема предназначена для осуществления операторского контроля и регулирования технологическим процессом забивки свай. При этом

регулирование рассматриваемым процессом сводится к выполнению в режиме реального времени следующей циклической последовательности действий:

- 1) получение значений параметров технологического процесса посредством отправки запроса к встроенной системе управления исполнительными механизмами гидравлического молота (осуществляется посредством интерфейса "GetParam");
- 2) сбор значений величин параметров деформационных свойств геоматериалов и внешних полей напряжений от подсистем "Definition of deformation properties" и "Definition of external stress field";
- 3) определение оптимальной величины осевой нагрузки ударника на наголовник сваи в соответствии с текущим значением глубины ее залегания (осуществляется с помощью разработанной выше математической модели);
- 4) отправка встроенной системе управления запроса на установление оптимальной величины осевой нагрузки в качестве действующего значения.

Детализированную архитектуру вышеописанных подсистем, отражающих схему наследования между классами подсистем и соответствующих пакетов, можно представить в следующем виде (рисунки 115-121).

В результате использования интегрированной среды Embarcadero C++ Builder 10.3 были осуществлены стадии реализации и последующего тестирования полученных подсистем, составляющих рассматриваемую АСУ ТП. При этом как показал анализ, в ходе реализации разработанного ПО АСУ ТП забивки свай было использовано 80% программного кода высокоуровневого фреймворка. Наиболее значимые (с точки зрения научной новизны) части программного кода отражены в свидетельствах о регистрации программ для ЭВМ [126, 128-132].

Графические окна пользователя, реализованные в интегрированной среде разработки Embarcadero C++ Builder 10.3 и вместе составляющие пакет классов графического интерфейса пользователя – "GUI" представлены на рисунках 122-130.

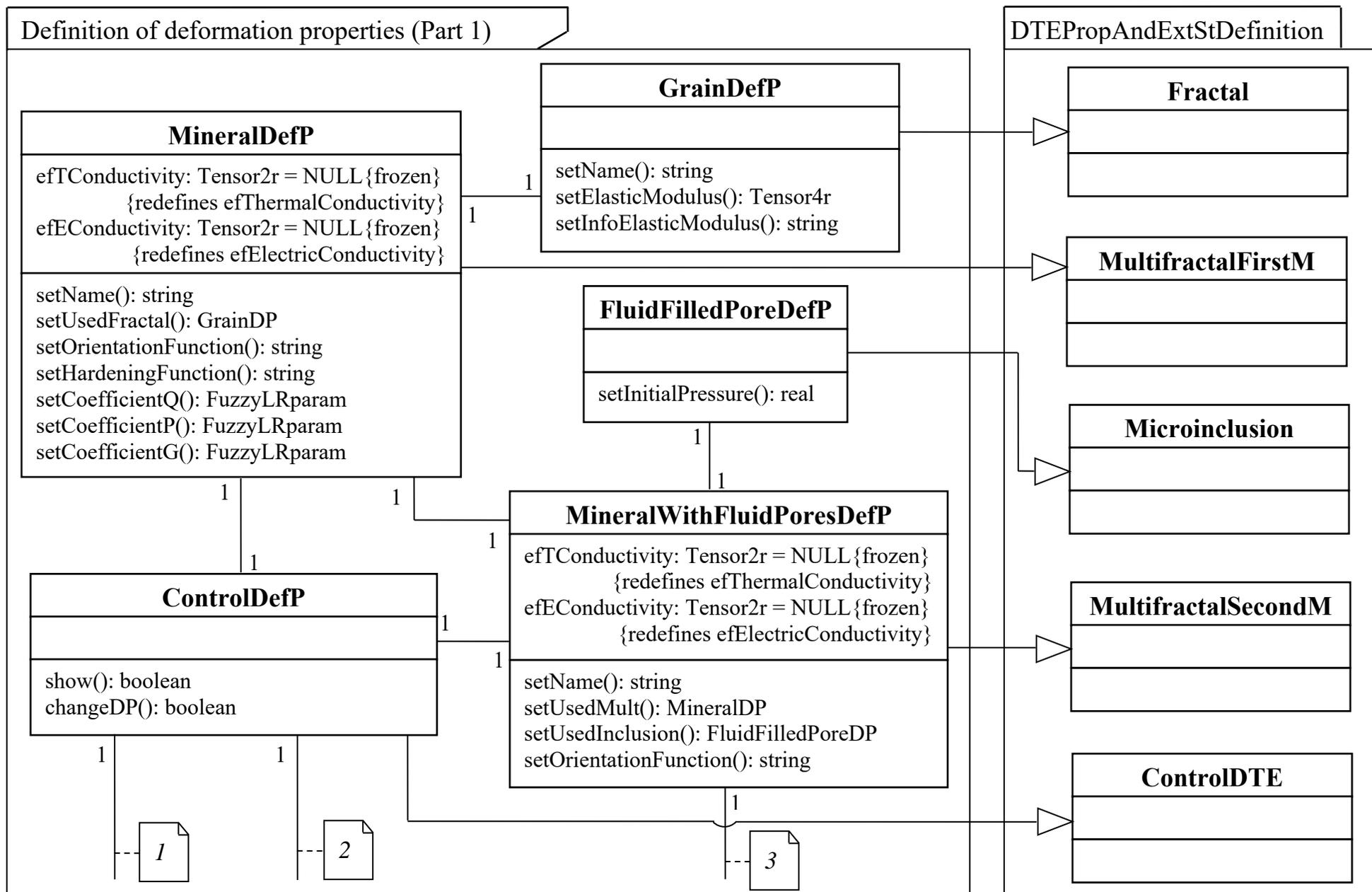


Рисунок 115 – Детализированная архитектура подсистемы "Definition of deformation properties" (Часть 1)

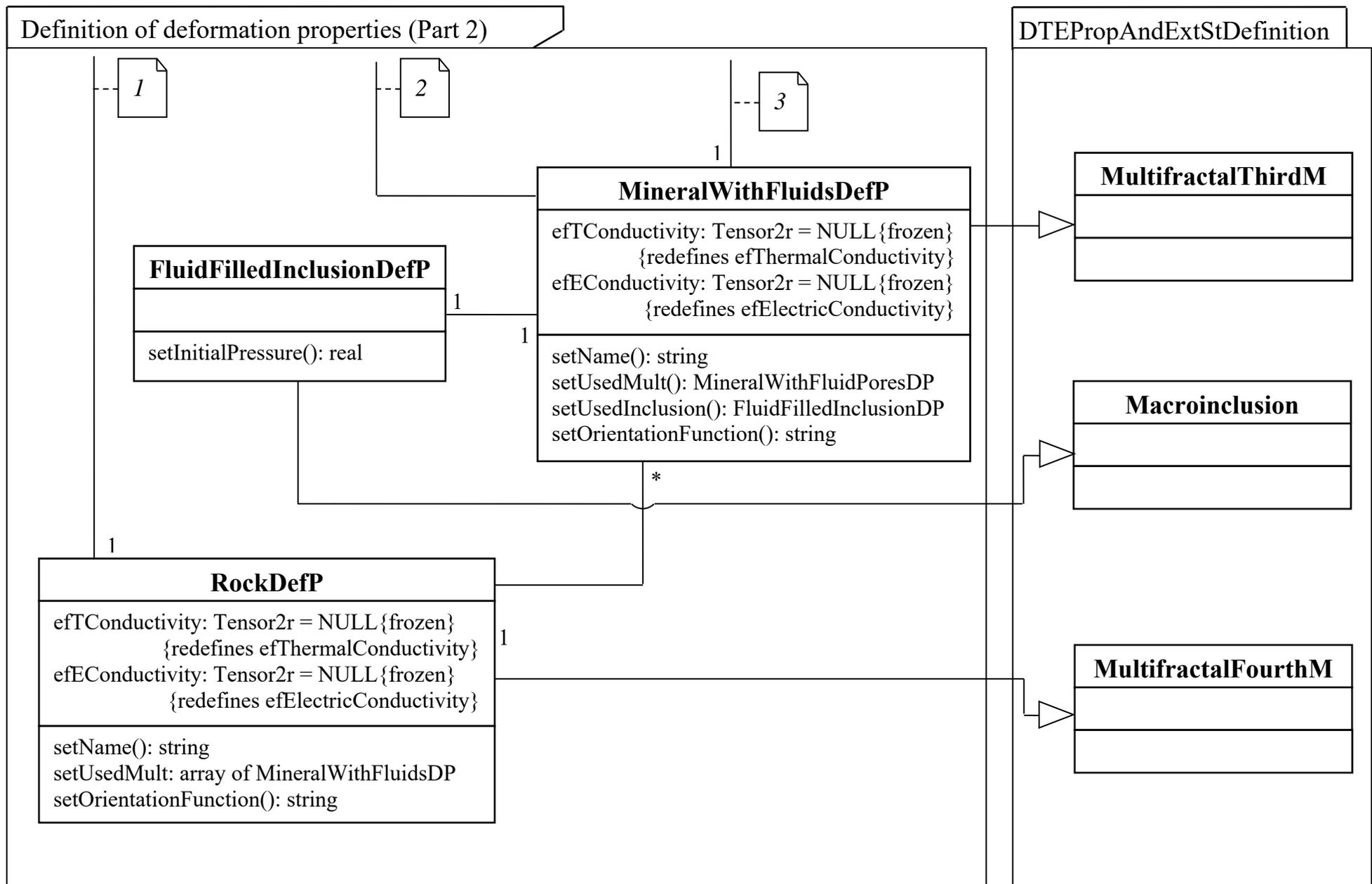


Рисунок 116 – Детализированная архитектура подсистемы "Definition of deformation properties" (Часть 2)

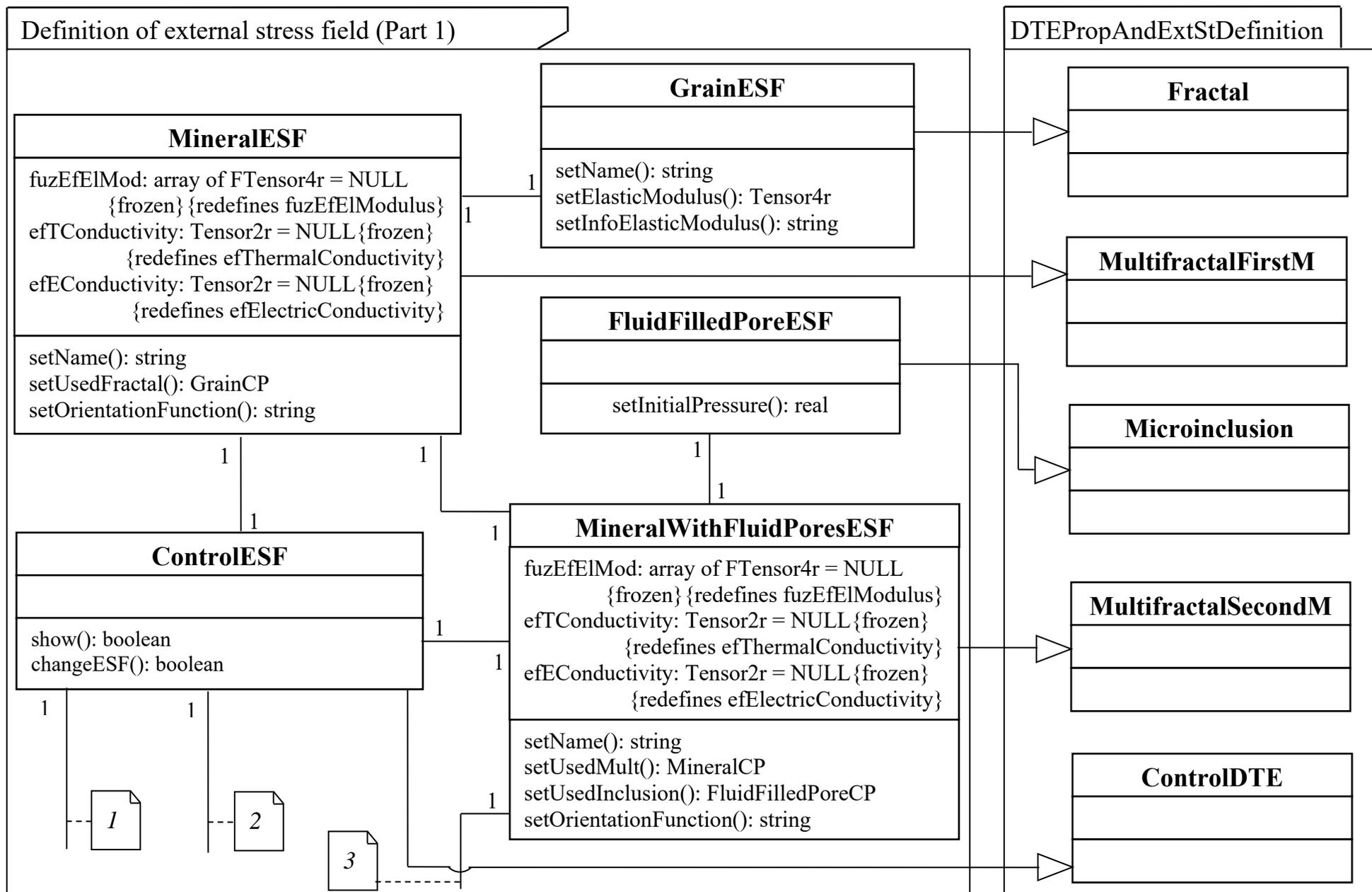


Рисунок 117 – Детализированная архитектура подсистемы "Definition of external stress field" (Часть 1)

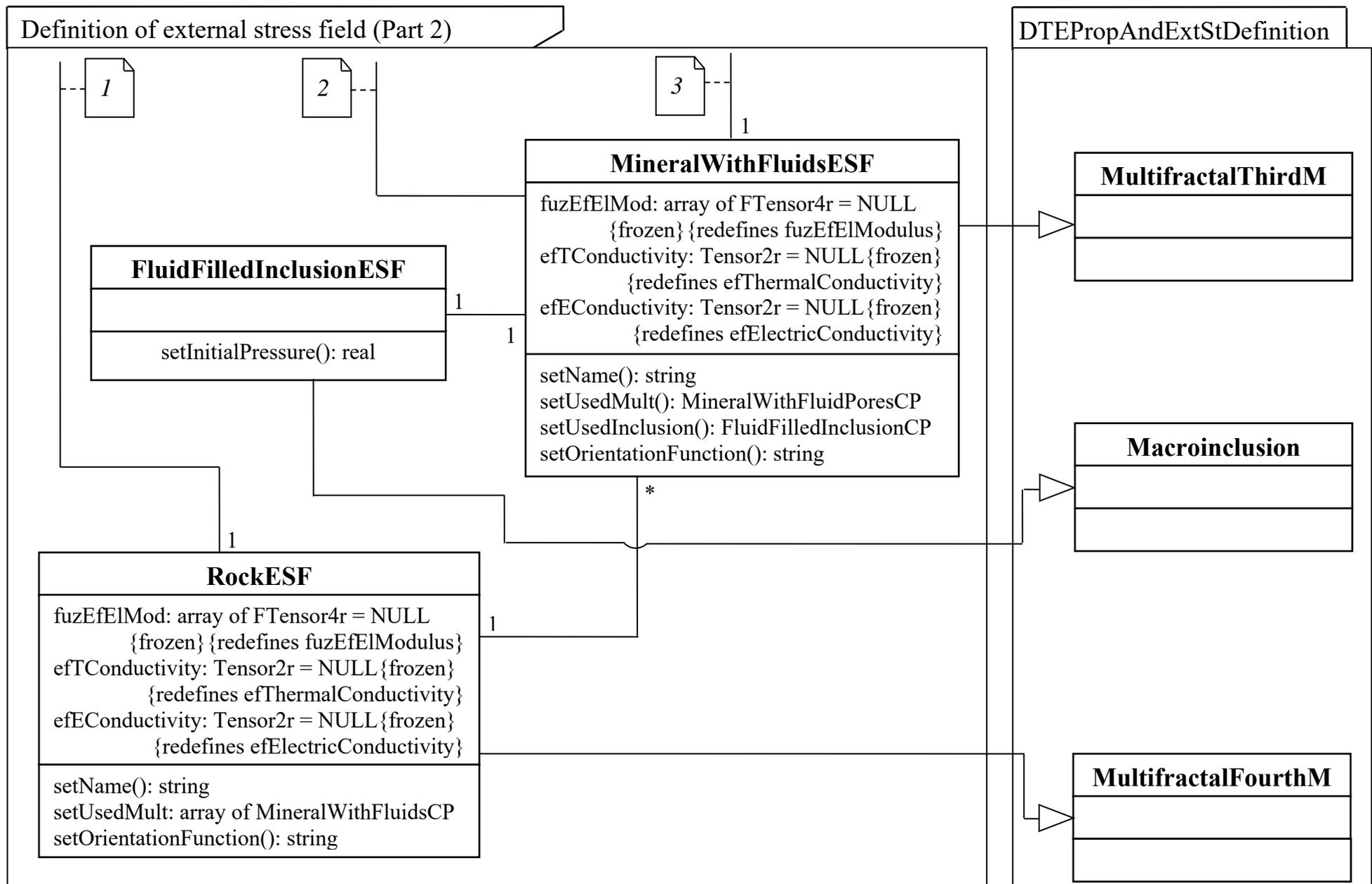


Рисунок 118 – Детализированная архитектура подсистемы "Definition of external stress field" (Часть 2)

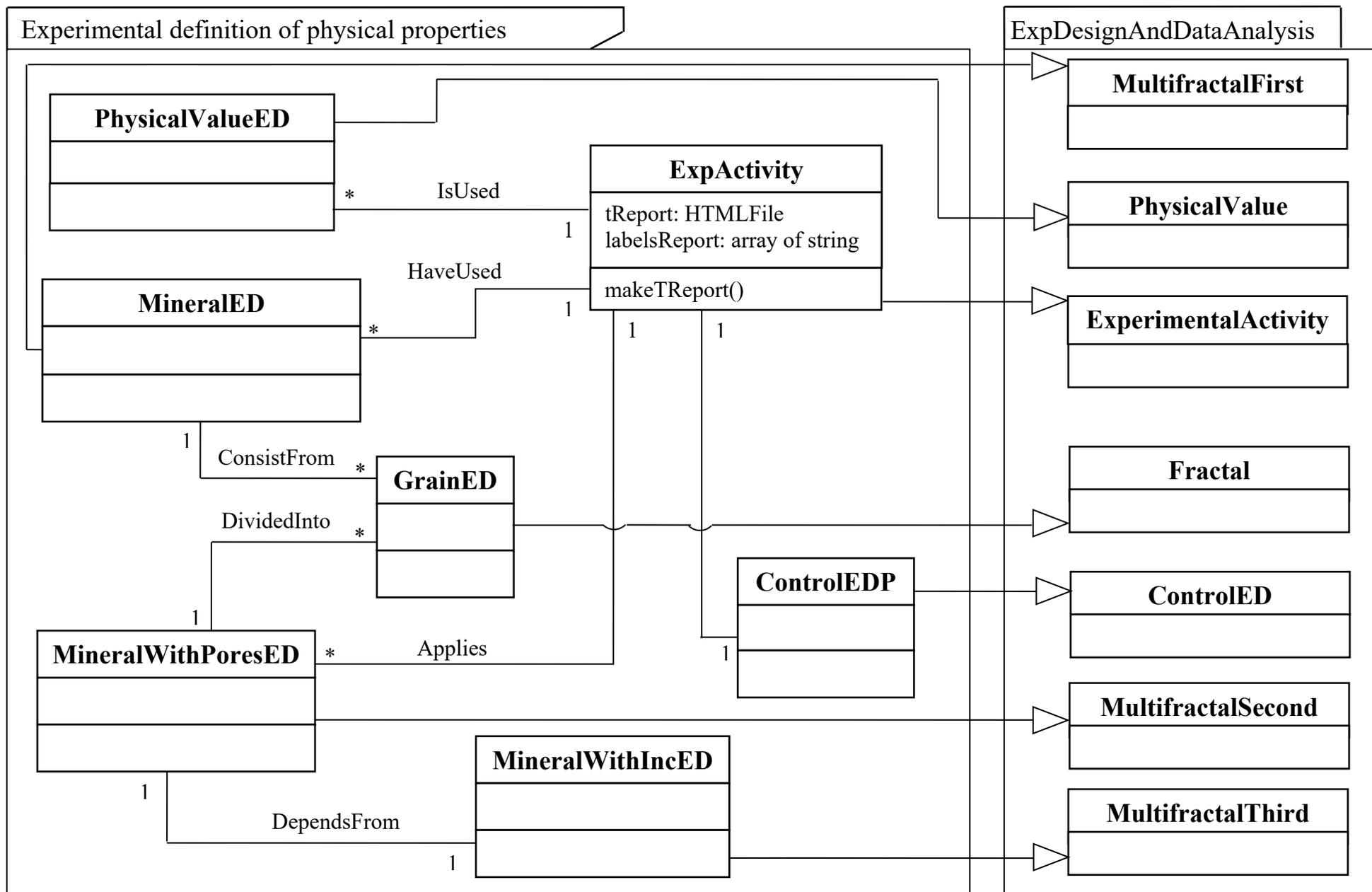


Рисунок 119 – Детализированная архитектура подсистемы "Experimental definition of physical properties"

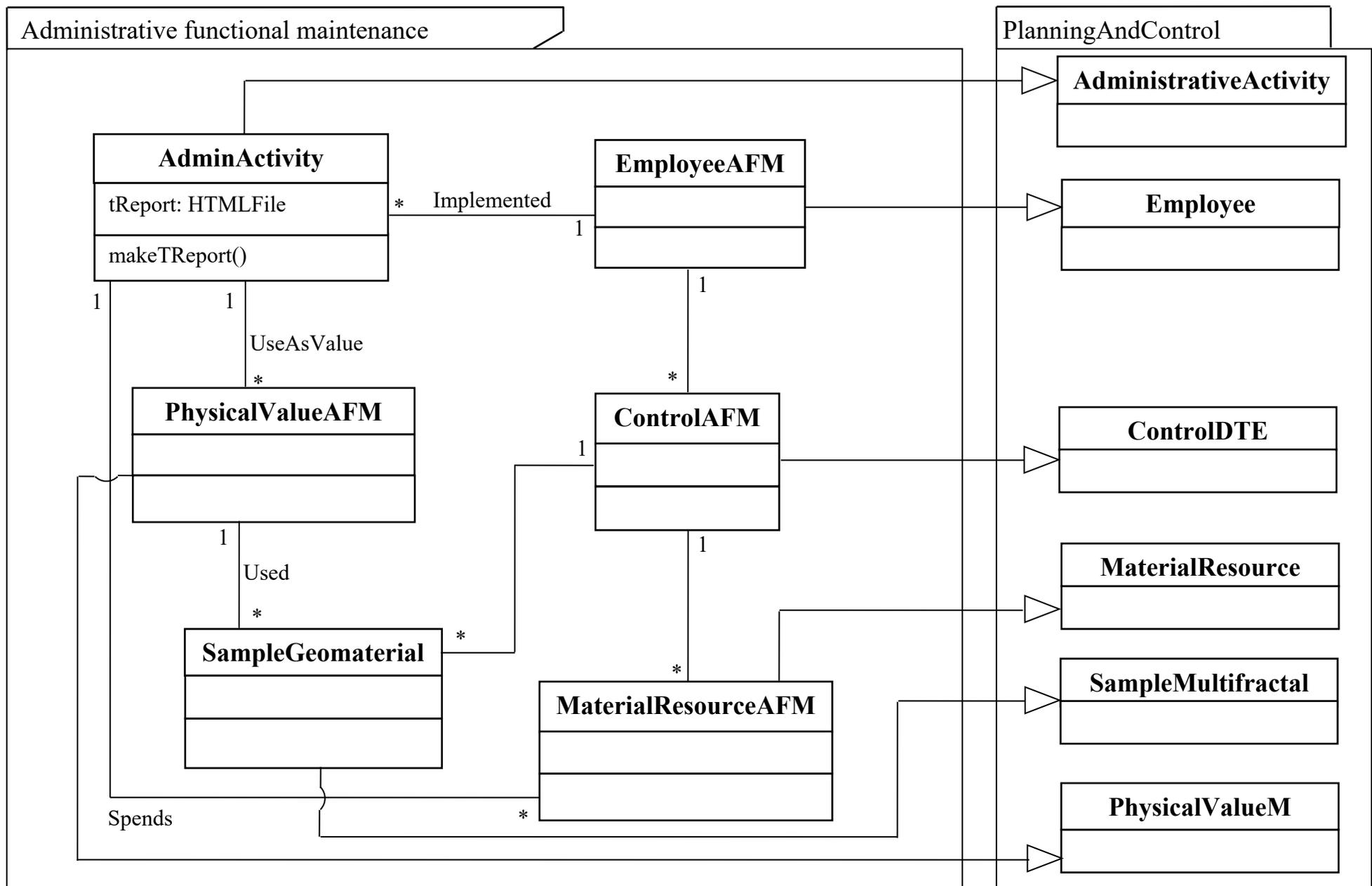


Рисунок 120 – Детализированная архитектура подсистемы "Administrative functional maintenance"

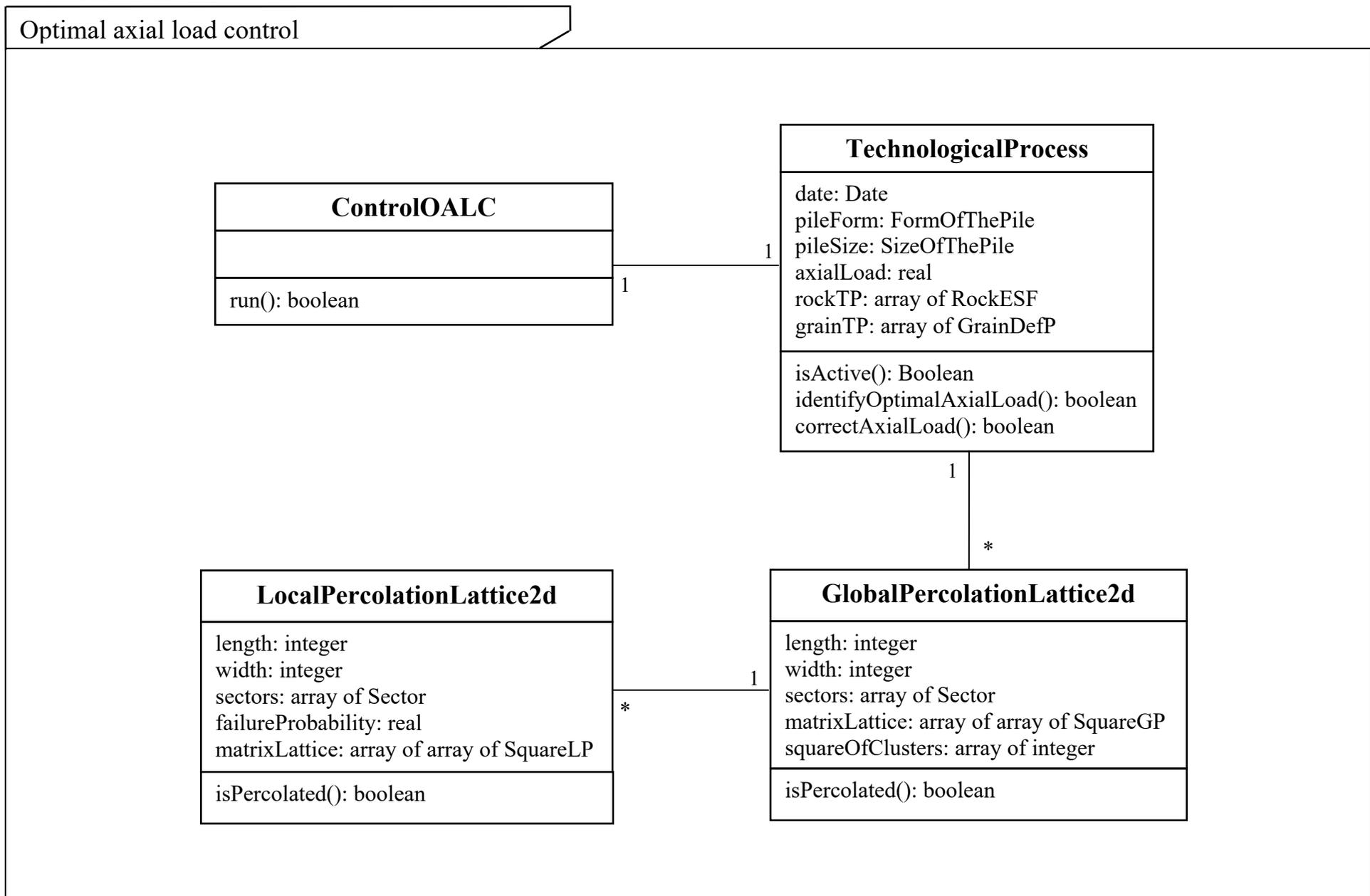


Рисунок 121 – Детализированная архитектура подсистемы "Optimal axial load control"



Рисунок 122 – Графическое окно "MainWindow"

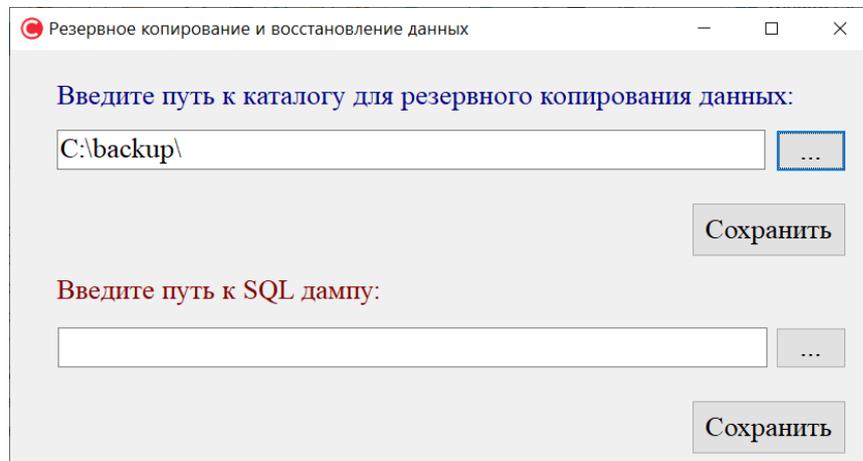


Рисунок 123 – Графическое окно "BackUpAndRestore" пакета "AdminFM\_Windows"

Анализ данных

Введите данные для анализа:

0.813	0.794	0.832	0.842	0.899	0.746	0.539	0.877	0.636	0.783	1.140
0.796	0.929	0.367	0.322	1.103	1.066	0.706	0.430	0.595	0.832	0.524
0.809	0.392	0.742	0.877	1.141	0.984	1.136	0.822	0.977	0.729	0.759
0.783	0.753	1.049	0.871	0.948	0.755	0.929	0.972	1.029	0.921	0.841
0.880	1.020	1.160	0.959	0.926	0.849	0.963	0.900	0.801	0.843	0.854
1.044	1.113	1.012	0.735	0.926	1.023	0.904	0.981	0.868	0.877	0.736
0.856	0.991	0.821	0.984	0.893	0.852	0.833	0.849	0.839	0.900	0.940
0.897	0.852	0.755	0.758	0.921	0.875	0.716	0.769	0.996	0.980	0.782
0.978	0.906	0.979	1.020	0.896	0.782	0.860	0.829	0.857	0.719	0.810
0.771	0.689	0.778	0.835	0.776	0.852	0.774	0.693	0.693		

Осуществить анализ

Рисунок 124 – Графическое окно "ExperimentalD\_Window"

Планирование задач и событий

Ввод новой задачи | Просмотр задач

Февраль 2020

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	1
2	3	4	5	6	7	8

Наименование задачи:

Описание задачи:

Определить ресурсы и материалы

**Время начала выполнения задачи:** 9 : 30

**Предполагаемое время окончания выполнения задачи:** 14 : 30

OK

Рисунок 125 – Графическое окно "PlanTasksAndEvents" пакета "AdminFM\_Windows"

Отчеты

Отчет о выполненной задаче: Выберите наименование задачи

Включить в отчет информацию об использованных материалах и ресурсах

Получить отчет

Рисунок 126 – Графическое окно "CreateReports" пакета "AdminFM\_Windows"

Учет материалов и ресурсов

Образцы **Расходные материалы**

Добавить образец Удалить образец Обновить данные

Наименование образца: Кальцит

Секция хранения: В9

Тип образца: Минерал

Добавить

Рисунок 127 – Графическое окно "Accounting" пакета "AdminFM\_Windows"

Настройка учетных записей

Добавить учетную запись Удалить учетную запись Обновить учетную запись

Введите имя пользователя:

Введите пароль:

Подтверждение пароля:

Добавить

Рисунок 128 – Графическое окно "Authorization" пакета "AdminFM\_Windows"

#### 4.10. Техническое обеспечение АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породных массивов

Перейдем к заключительной стадии разработки – специфицированию технического обеспечения разрабатываемой АСУ ТП. Как и в случае с АСНИ физических процессов горного производства для описания технического обеспечения системы воспользуемся языком UML в части диаграмм развертывания (deployment diagram). В результате получим, следующую диаграмму (рисунок 129), описывающую статическое представление АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породных массивов с точки зрения ее развертывания.

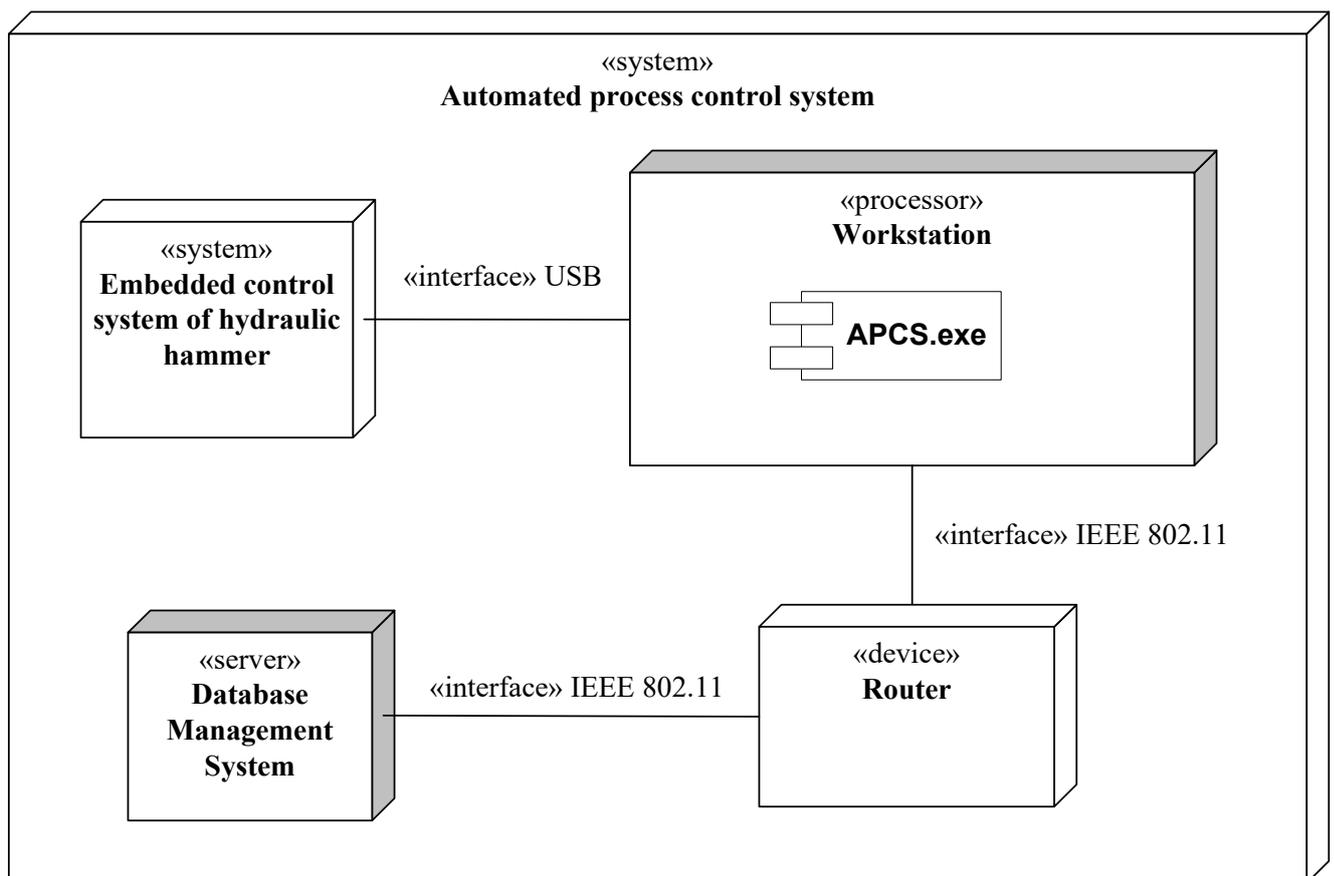


Рисунок 129 – Диаграмма развертывания ТО АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породных массивов

Из представленной диаграммы следует, что топология аппаратных средств,

на которых реализуется техническое обеспечение рассматриваемой АСУ ТП, состоит из четырех узлов.

Первый узел "Embedded control system of hydraulic hammer" представляет собой встроенную систему управления исполнительными механизмами гидравлического молота, осуществляющую сбор данных, контроль и регулирование режимами работы технологического оборудования сваебойной установки в части погружения свай ударным способом. К ограничению, налагаемому на рассматриваемый узел, можно отнести то, что данная встроенная система должна обладать открытым двусторонним программным интерфейсом, позволяющим с одной стороны получать информацию о состоянии технологического оборудования гидравлического молота, а с другой – корректировать режим его работы.

Второй узел "Workstation" указывает на автоматизированное рабочее место оператора сваебойной установки, на котором разворачивается компонент APCs.exe. Данный компонент является реализацией вышеописанной программной архитектуры АСУ ТП забивки свай (рисунок 114). На ЭВМ, используемую в качестве узла "Workstation", накладываются следующие ограничения – оперативная память не менее 12Гб, внешняя память более 2 Гб и тактовая частота CPU не менее 4,7 ГГц.

Следующим узлом рассматриваемой архитектуры технического обеспечения является сервер "Database Management System", на котором в качестве системы управления базами данных используется MySQL. Данный сервер, связанный с автоматизированным рабочим местом посредством узла "Router" (маршрутизатор), предназначен для хранения результатов анализа экспериментальных данных, сведения о доступных материалах и ресурсах, а также другой административной информации, содержащейся в базах данных "БД\_Пользователи" и "БД\_Административное\_Управление". Следует также отметить, что сервер "Database Management System" может быть развернут на узле "Workstation" и функционировать в качестве фонового процесса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе в результате выполненных исследований на основе использования предложенных теоретических основ математического моделирования функциональных задач, методов проектирования экспертных и автоматизированных систем решена крупная научная проблема разработки каркасной мультифрактально-модельной методологии построения АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности, имеющая существенное народно-хозяйственное значение для нашей страны. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [97-125, 133-156], изданные в журналах, входящих в перечень рецензируемых ВАК научных изданий.

К основным результатам диссертации, полученным лично автором, можно отнести следующее:

1. Предложенный в формализованном виде каркасный метод разработки АС, позволяющий реализовывать системы различного класса (АСНИ, АСУ ТП и др.) посредством конфигурации проектных решений, реализуемых на основе построения математических моделей универсального типа. В основе данного метода лежит концепция каркаса, заключающаяся в разработке совокупности взаимосвязанных классов, детализация которых посредством механизмов наследования и (или) агрегирования позволяет получить готовое ПО АС. В отличие от своих неполных аналогов, имеющих вид рекомендаций, разработка каркаса программного обеспечения в рамках предложенного метода осуществляется посредством систематизированной методологии проектирования и реализации математического и информационного обеспечения, являющихся основой для эффективного выполнения функциональных задач АС в различных областях. В результате применения такого подхода впервые появилась возможность разрабатывать программные фреймворки, способные обеспечить выполнение не только служебных, но и основных функциональных задач АС.
2. Разработанные теоретические основы мультифрактального моделирования функциональных задач АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности.

Совокупность математических моделей, составляющих данные теоретические основы, в отличие от своих аналогов, позволяют наиболее адекватно учесть реальную анизотропную неоднородную мультифрактальную структуру геоматериалов различного порядка сложности. Тем самым с наибольшей степенью точности (погрешность менее 5%) определить их деформационные, тепло- и электропроводные свойства, а также установить величину внешнего поля напряжений, действующего на породный массив. При этом существующие способы определения данных свойств и величины внешнего поля напряжений по причинам неудовлетворительного учета масштабного эффекта дают погрешность в 40%–50%.

Достижение наибольшей степени адекватности рассматриваемых моделей во многом стало возможным благодаря разработке мультифрактального метода математического моделирования и комплексного метода самосогласованного поля, а также введению нового научного понятия «нечеткий тензор». Предложенный метод заключается в построении для объекта функциональной задачи (в нашем случае – геоматериала) мультифрактальной модели, представляющей собой совокупность связанных между собой математических моделей фрактальных сред. При этом каждая из данных сред описывает фракталы, входящие в состав моделируемого объекта функциональной задачи.

Применение разработанного комплексного метода самосогласованного поля за счет учета влияния собственного и внешнего полей при проведении процедуры усреднения уравнений позволяет разрешить противоречие между термодинамическим и механическим подходами к решению проблем деформирования объектов мультифрактальной структуры. Проводя исследования в рамках решаемых основных функциональных задач АСНИ, было установлено, что использование данного метода способствует расширению границ адекватности разрабатываемых моделей. Так для полученных мультифрактальных моделей границы адекватности характеризуются интервалом  $0,05 \leq E^{осн} / E^{неод} \leq 20$ , где  $E^{осн}$  – модуль упругости основной среды;  $E^{неод}$  – модуль упругости неоднородности. Аналогичные модели, использующие при

процедуре усреднения уравнений наиболее распространенный в настоящий момент классический метод самосогласованного поля, дают адекватные результаты в существенно меньшем интервале  $0,1 \leq E^{осн} / E^{неод} \leq 10$ .

Введение понятия «нечеткий тензор» в рамках рассматриваемой функциональной задачи позволило разработанным математическим моделям определить деформационные свойства геоматериала не только в упругом, но и упругопластическом состояниях с учетом изменения количества необратимо движущихся дислокаций. В общем же случае применение данного понятия позволяет моделировать многие функциональные задачи АСНИ, АСУ ТП и др., связанные с определением напряженно-деформированного состояния объектов и их структурных составляющих в условиях отсутствия достаточно точных знаний об их нелинейных свойствах.

Кроме того, необходимо отметить, что впервые разработаны математические модели, связывающие величины внешнего (действующего на породный массив) и внутреннего неоднородного поля напряжений, формируемого в его структурных и текстурных неоднородностях. В результате впервые появилась возможность с помощью разработанной перколяционной модели, посредством анализа длин трещин в минералах породного массива методами компьютерного моделирования, определить неоднородную по глубине величину внешнего поля напряжений, учитывающую гравитационную и тектоническую составляющие.

3. Впервые разработанный высокоуровневый каркас ПО (программный фреймворк) АСНИ, АСУ ТП и других систем, связанных с определением напряженно-деформированного состояния, тепло- и электропроводных свойств, а также разрушения различного рода объектов. Данный каркас, разработанный в Embarcadero C++ Builder 10.3, представляет собой расширяемый набор взаимосвязанных классов для реализации административных и специализированных функциональных задач АСНИ и АСУ ТП. К числу административных функций, реализуемых каркасом, следует отнести: анализ данных; учет материалов и ресурсов; планирование задач и событий; создание

отчетов; резервное копирование и восстановление данных. В свою очередь к числу специализированных функций – определение деформационных, тепло- и электропроводных свойств объектов мультифрактальной структуры; установление внешнего поля напряжений, действующего на исследуемый объект.

Отличительной особенностью предлагаемого каркаса является то, что процесс проектирования классов и связанных с ними ассоциаций производится на основе алгоритмов, разработанных посредством обобщения математических моделей геоматериалов на случай исследования объектов мультифрактальной структуры. Это позволяет с максимальной степенью повторного использования кода (величина которой может достигать 80% при реализации АС с идентичной функциональностью), применять разработанный каркас для проектирования и реализации АСНИ и АСУ ТП во многих предметных областях – материаловедении, гидрогеологии, промышленном и гражданском строительстве, и других отраслях, связанных с определением напряженно-деформированного состояния и разрушения различных объектов мультифрактальной структуры.

4. Предложенный новый гибридный метод разработки экспертных систем, заключающийся в следующем. В первую очередь с помощью методов математического моделирования разрабатываются алгоритмы анализа исследуемых объектов, характеризующие факты из рассматриваемой предметной области. Далее, полученные алгоритмы посредством классических методов искусственного интеллекта дополняются эвристическими правилами. В результате получается база знаний, содержащая эвристики и компьютерные реализации алгоритмов. И в заключение разрабатывается механизм логического вывода, отличающийся от своих аналогов моделью формирования рассуждений. Согласно предложенной модели установленные факты из базы знаний сопоставляются вершинам взвешенного ориентированного графа. При этом использование весов ребер обусловлено необходимостью выполнения при формировании логического вывода – процедуры определения приоритетов активизации фактов. В таком случае функционирование механизма логического вывода сводится к формированию в зависимости от ответов пользователей одного

или нескольких путей во взвешенном ориентированном графе. При этом конечная вершина данных путей будет соответствовать решению рассматриваемой прикладной задачи.

Используя предложенный метод, разработана экспертная система поддержки принятия решений в области построения математических моделей разрушения геоматериалов. Данная система впервые позволила автоматизировать не только процесс разработки моделирующих программ (компьютерной реализации математических моделей), но и процесс построения содержательных моделей в части выбора теории, применение которой в рамках решаемой прикладной задачи позволит получить наиболее адекватную математическую модель исследуемого объекта (в рассматриваемом случае – разрушения геоматериалов).

5. Разработанную в рамках каркасного метода АСНИ физических процессов горного производства. Использование данной системы позволяет с высокой степенью точности (погрешность менее 5%) решать научные задачи, связанные с определением физических свойств геоматериалов и величины внешнего поля напряжений, действующего на породный массив; и на этой основе – с помощью встроенной экспертной системы разработать количественно адекватные математические модели разрушения геоматериалов, допускающие интеграцию в математическое и программное виды обеспечения АСУ ТП, АСУП, АСТПП и др. Кроме того, данная система позволяет автоматизировать делопроизводственную деятельность лабораторий, занятых научными исследованиями в области наук о Земле.

6. Разработанную в рамках каркасного метода АСУ ТП забивки свай в оползнеопасные участки породных массивов. В отличие от своих аналогов, данная система позволяет при осуществлении технологического процесса учесть изменение напряженного состояния участков породных массивов, обусловленное возникновением дополнительных динамических нагрузок от погружения свай ударным способом. Это позволяет данной системе в режиме реального времени определять и поддерживать оптимальную величину осевой нагрузки ударника на

наголовник сваи, при которой не наблюдается излишняя динамическая нагрузка на оползнеопасный участок, и тем самым – снижаются риски возникновения схода оползня.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Авчян Г.М. Физические свойства осадочных пород при высоких давлениях и температурах. – М.: Недра, 1972. – 378с.
2. Авчян Г.М., Матвеев А.А., Стефанович З.Б. Петрофизика осадочных в глубинных условиях. – М.: Недра, 1978. – 346с.
3. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568с.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568с.
5. Антосик П. Микусинский Я. Сикорский Р. Теория обобщенных функций. – М.: Мир, 1976. – 311с.
6. Баклашов И.В. Деформирование и разрушение породных массивов. – М.: Недра, 1988. – 271с.
7. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика горных пород. – М.: Недра, 1975. – 350с.
8. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механика подземных сооружений и конструкции крепей. – М.: Недра, 1984. – 250с.
9. Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механические процессы в породных массивах. – М.: Недра, 1986. – 270с.
10. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352с.
11. Беликов Б.А., Александров К.С., Рыжова Т.В. Упругие свойства пороодообразующих минералов и горных пород. – М.: Наука, 1970. – 276с.
12. Боггс У. Боггс М. UML и Rational Rose 2002. – М.: ЛОРИ, 2004. – 509с.
13. Бокштейн Б.С. Атомы блуждают по кристаллу. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 208с.
14. Брауде Э. Технология разработки программного обеспечения. – СПб.: Питер, 2004. – 655с.
15. Буч Г., Максимчук Р.А., Энгл М.У. и др. Объектно-ориентированный анализ и

проектирование с примерами приложений. – М.: Вильямс, 2008. – 720с.

16. Буч Г., Рамбо Д., Якобсон И. Язык UML. Руководство пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 496с.

17. Ветренко М.С. Алгоритмы и модели исследований свойств композитных материалов при подготовке производства: диссертация кандидата технических наук: 05.13.06; – Белгород, 2009. – 156с.

18. Воройский Ф.С. Информатика. Новый систематизированный толковый словарь-справочник (Введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 760с.

19. Волькенштейн М.В. Энтропия и информация. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 191с.

20. Гельфанд И.И., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Добросвет, 2000. – 412с.

21. Глинских В.Н., Нестерова Г.В., Эпов М.И. Моделирование и инверсия данных электромагнитного каротажа с использованием петрофизических моделей электропроводности // Геология и геофизика. 2014. Т. 55. № 5–6. С. 1001–1010.

22. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 278с.

23. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т. Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 264с.

24. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: Постмаркет, 2001. – 184с.

25. Даринский Б.М., Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. О вычислении упругих модулей поликристаллов // ПМТФ. – 1967. – №5. – С. 123–124.

26. Даринский Б.М., Шермергор Т.Д. К теории диффузионной релаксации в поликристаллах // ПМТФ. – 1965. – №5. – С.84–86.

27. Даринский Б.М., Шермергор Т.Д. Межзеренная температурная релаксация в неоднородной изотропной среде // Прикладная механика. – 1966. – Т.2. – №10. – С. 91–93.

28. Даринский Б.М., Шермергор Т.Д. Температурная релаксация в поликристаллах с кубической структурой // ФММ. – 1964. – №5. – С. 145–148.
29. Даринский Б.М., Шермергор Т.Д. Упругие модули поликристаллов кубической структуры // ПМТФ. – 1965. – №4. – С. 121–128.
30. Дахнов В.Н. Интерпретация каротажных диаграмм. – М.: Гостеолтехиздат, 1941. – 496с.
31. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки входных данных. – М.: Мир, 1980. – 510с.
32. Дортман Н.Б. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика). – М.: Недра, 1984. – 455с.
33. Друкер Д. Вариационные принципы в математической теории пластичности // Механика. – 1959. – №6. – С. 71–73.
34. Дьяконов Д.И., Яковлев Б.А. Определение и использование тепловых свойств горных пород и пластовых жидкостей. – М.: Недра, 1969. – 120с.
35. Египко В.М. Автоматизация сложных физических экспериментов и промышленных испытаний с помощью цифровых вычислительных машин // Кибернетика и вычислительная техника, 1964. – № 3. С.53-64.
36. Еникеев Б.Н., Охрименко А.Б., Смирнов О.А. Функциональные (фундаментальные) и статистические взаимосвязи в петрофизике (проблематика сравнения сходных петрофизических взаимосвязей) // Каротажник. 2011. Вып. 205. № 7. С. 102-117.
37. Ермаков Г.А., Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Вычисления границ для эффективных диэлектрических проницаемостей неоднородных диэлектриков // ЖТФ. – 1974. – т.44. – Вып. 2. – С. 249–252.
38. Ермаков Г.А., Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. О вариационном методе вычисления эффективных постоянных упругости неоднородных материалов // Известия АН СССР. – 1975. – МТТ. – №1. – С. 62–65.
39. Жук К.Д., Проценко Н.М., Роде Д.В. Зарубежный опыт автоматизации научного эксперимента // Механизация и автоматизация управления, 1970. №5. – С. 61–62.

40. Канаун С.К. О приближении самосогласованного поля для упругой композитной среды. // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1977. – №2. – С. 160–170.
41. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. – Петрозаводск: Издательство Петрозаводский государственный университет, 1993. – 600с.
42. Канаун С.К., Левин В.М. О построении эффективного волнового оператора для среды с изолированными неоднородностями // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. N5. С. 67-70
43. Картозия Б.А. Исследование механических процессов в породных массивах с искусственной неоднородностью и разработка методов их прогнозирования в подземном строительстве: дис. ... доктора технических наук. – М., 1980. – 394с.
44. Кнут Д. Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы. – М.: Вильямс, 2002. – 720с.
45. Кнут Д. Искусство программирования, том 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Вильямс, 2003. – 832с.
46. Кнут Д. Искусство программирования, том 3. Сортировка и поиск – М.: Вильямс, 2003. – 832с.
47. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Моделирование систем. Динамические и гибридные системы. – СПб: БХВ-Петербург, 2006. – 224с.
48. Комаров В.А. Электроразведка методом вызванной поляризации. – Л.: Недра, 1980. – 273с.
49. Кренер Э. Общая континуальная теория дислокации и собственных напряжений. – М.: Мир, 1965. – 355с.
50. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352с.
51. Кузнецов Г.Н. Механические свойства горных пород. – М.: Углетехиздат. – 1947. – 300с.
52. Кузнецов С.В., Слоним М.Э. Исследования напряженно-деформированного состояния трещиновато-пористого нелинейно-упругого массива горных пород

- около выработки // Материалы 7-й Всесоюзной конференции по механике горных пород. – 1980. – С. 123–175.
53. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Доклады АН СССР. – Т. 199. – №3. – 1971. – С. 127–129.
54. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736с.
55. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М-Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 300с.
56. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. – 1946. – Т.16. – Вып.11. – С. 967–970.
57. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. Поправка к статье "К теории упругих свойств поликристаллов" // ЖЭТФ. – 1951. – Т. 21, – Вып.10. – С. 1184–1193.
58. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1970. – 939с.
59. Макклиток Ф. Аргон А. Деформация и разрушение материалов. – М.: Мир, 1970. – 443с.
60. Мандель А.М. О связи теплопроводности горных пород со структурой порового пространства // Известия высших учебных заведений. Геология и разведка. 1997. №1. С. 96–101.
61. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализа данных. – Л.: Судостроение, 1980. – 384с.
62. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. – М.: Физматлит, 1994. – 192с.
63. Нестерова Г.В. Модели эффективной электропроводности в комплексной интерпретации скважинных измерений // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2010. Т. 2. № 2. С. 57-60.
64. Новик Ф.С., Кожевников И.Ю. Автоматизированная система научных исследований в области материаловедения // Вопросы кибернетики. Автоматизированные системы научных исследований: сб. Научного совета АН СССР. – Москва, 1986. – С. 52-57.

65. Орлов Н.А. Введение в теорию дефектов в кристаллах. – М.: Высшая школа, 1983. – 144с.
66. Партон В.З. Механика разрушения. – М.: Наука, 1990. – 240с.
67. Певзнер М.Я. Деформации горных пород на карьерах. – М.: Недра, 1992. – 235с.
68. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 798с.
69. Петухов И.М., Линьков А.М. Механика горных ударов и выбросов. – М.: Недра, 1983. – 456с.
70. Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения. – М.: Мир, 1993. – 450с.
71. Погосян С.С. Разработка методов и алгоритмов автоматизации исследования многостадийных процессов (на примере сложных химических цепных реакций): диссертация кандидата технических наук: 05.13.06; – Ереван, 1984. – 125с.
72. Поезжалова С.Н. Автоматизированная система научных исследований высоких и критических технологий в авиадвигателестроении: автореферат диссертации кандидата технических наук: 05.13.06; – Уфа, 2012. – 17с.
73. Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 464с.
74. Разрушение. Т.1: Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения: пер. с англ. / под. ред. Либовица Г. – М: Мир, 1973. –620с.
75. Разрушение. Т.2: Математические основы теории разрушения: пер. с англ. / под. ред. Либовица Г. – М: Мир, 1975. –768с.
76. Разрушение. Т.7: Разрушение неметаллов и композитных материалов. Ч.1: Неорганические материалы: пер. с англ. / под. ред. Либовица Г. – М: Мир, 1976. – 636с.
77. Рамбо Дж., Блаха М. UML 2.0. Объектно-ориентированное моделирование и разработка. – Спб.: Питер, 2007. – 544с.
78. Ржевский В.В., Новик Г.Я. Основы физики горных пород. – М.: Недра, 1978. – 390с.

79. Саваторова В.Л., Талонов А.В., Волков-Богородский Д.Б., Власов А.Н. Математическое моделирование процесса теплопроводности в периодической среде с цилиндрическими включениями, отделенными от матрицы тонким слоем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2010. №6. С. 178–185.
80. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 320с.
81. Селиванов С.Г. АСНИ высоких и критических технологий авиадвигателестроения // Вестник УГАТУ, 2013. – Т.17. – №2. – С. 42–49.
82. Сладковский Д.А. Автоматизация научных исследований гидродинамики псевдооживленного слоя: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.06; – Санкт-Петербург, 2012. – 139с.
83. Суворов А.И. Автоматизация мореходных испытаний кораблей ВМФ: диссертация ... кандидата технических наук. – Л., 1983. – 150с.
84. Суворов А.И. Комплексная автоматизированная система научных исследований сложных морских объектов: диссертация доктора технических наук: 05.13.16; – Санкт-Петербург, 1999. – 174с.
85. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 240с.
86. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра, 1977. – 503с.
87. Уотермен Д., Хейес Ротт Ф., Ленат Д. Построение экспертных систем. – М.: Мир, 1987. – 441с.
88. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Влияние ориентации армирующих волокон на упругие модули материалов // МТТ. – 1964. – №2. – С. 93.
89. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. К вычислению упругих модулей гетерогенных сред // ПМТФ. – 1968. – №3. – С. 39–45.
90. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. К определению границ эффективных модулей неоднородных твердых тел // ПМТФ. – 1968. – №4. – С.23–28.
91. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. К расчету упругих модулей неоднородных

материалов // Механика полимеров. – 1968. – №4. – С. 58–62.

92. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Упругие модули текстурированных материалов // МТТ. – 1967. – №1. – С. 129–136.

93. Фомичев Н.И. Автоматизированные системы научных исследований. – Ярославль: Издательство Ярославского государственного университета, 2001. – 112с.

94. Халкечев К.В. Иерархия случайно-фрактальных моделей разрушения конструкционных материалов. // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 409–433.

95. Халкечев К.В. Механика неоднородных горных пород. – Бишкек: Илим, 1991. – 226с.

96. Халкечев К.В. Разработка теории механических процессов в породных массивах с различными уровнями масштабов неоднородности и нарушенности при ведении горных работ: автореф. дисс. д-ра технических наук: 05.15.11. – М., 1994. – 35с.

97. Халкечев К.В., Халкечев Р.К. Математическая модель деформационных свойств нефтенасыщенного пласта // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2014. № 11. С. 354-358.

98. Халкечев К.В., Халкечев Р.К. Математическая модель разрушения поликристаллов при квазистатических и ударных нагрузках // Методы математического моделирования в горной промышленности: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2011. № 12. С. 22-26.

99. Халкечев К.В., Халкечев Р.К. О свойствах математической модели: эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // Методы математического моделирования в горной промышленности: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2011. № 12. С. 18-22.

100. Халкечев Р.К. Алгоритм определения элементарного объема горной породы // Математическое моделирование трудноформализуемых объектов: Горный

информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2012. № 7. С. 12–16.

101. Халкечев Р.К. Алгоритм проверки геоматериалов по требованию к описанию анизотропной сплошной средой // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 7. С. 311-316.

102. Халкечев Р.К. Динамические проявления напряженно-деформированного состояния природных мультифрактальных объектов. Внезапные выбросы горных пород и газа // Прикладная и промышленная математика: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2013. № 9. С. 23-27.

103. Халкечев Р.К. Динамические проявления напряженно-деформированного состояния природных мультифрактальных объектов. Оползни // Прикладная и промышленная математика: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2013. № 9. С. 28-32.

104. Халкечев Р.К. Иерархически-самоподобная математическая модель материала второго порядка сложности (минерала, металла) с наполненной жидкостью (или газом) порами в упругом деформационном состоянии // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 5. С. 348-353.

105. Халкечев Р.К. Иерархически-самоподобные математические модели геоматериалов относительно полей напряжений как основа для перколяционного мультифрактального моделирования объектов управления // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 9. С. 343-350.

106. Халкечев Р.К. Комплекс программ моделирования процессов в геоматериалах как основа для автоматизированной информационно-управляющей системы снижения рисков оползней и внезапных выбросов пород и газа // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 4. С. 353-358.

107. Халкечев Р.К. Масштаб неоднородности газосодержащих породных массивов // Методы математического моделирования в горной промышленности: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2011. № 12. С. 3–7.
108. Халкечев Р.К. Математическая модель неоднородного напряженно-деформированного состояния минерала с газонаполненными порами при постоянной скорости изменения внешнего поля деформаций // Математическое моделирование трудноформализуемых объектов: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2012. № 7. С. 8-12.
109. Халкечев Р.К. Математическая модель проверки материалов различного порядка сложности по требованию к описанию иерархически-самоподобной средой // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 5. С. 360-365.
110. Халкечев Р.К. Математическая модель упругопластического деформирования пористых минералов с учетом изменения количества дислокаций // Методы математического моделирования в горной промышленности: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2011. № 12. С. 12-18.
111. Халкечев Р.К. Математическая модель эффективных упругих свойств газосодержащих породных массивов мультифрактальной структуры // Методы математического моделирования в горной промышленности: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2011. № 12. С. 7-12.
112. Халкечев Р.К. Математическое моделирование стихийных явлений. Теоретико-катастрофическая модель оползней // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып. 6. С. 1138-1139.
113. Халкечев Р.К. Мультикомпонентное моделирование функциональных задач автоматизированной системы управления технологическими процессами горного производства // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-

технический журнал). 2015. № 8. С. 150-157.

114. Халкечев Р.К. Мультифрактальная модель неоднородного поля давлений в газонаполненных порах поликристалла при постоянном внешнем поле // Математическое моделирование трудноформализуемых объектов: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2012. № 7. С. 3-7.

115. Халкечев Р.К. Мультифрактальная модель распространения трещин в поликристаллах при ударных нагрузках // Математическое моделирование трудноформализуемых объектов: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2012. № 7. С. 17-23.

116. Халкечев Р.К. Мультифрактальная модель с масштабом неоднородности эффективных упругих свойств газосодержащих породных массивов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2012. №3. С. 68-70.

117. Халкечев Р.К. Нечеткая динамическая модель изменения количества движущихся дислокаций в структуре материала первого порядка сложности (минерала, металла) при увеличении внешней нагрузки // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 5. С. 354-359.

118. Халкечев Р.К. Нечеткая математическая модель изменения концентрации трещин в минерале под действием внешней нагрузки // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2019. №6. С. 97-105.

119. Халкечев Р.К. Нечеткий тензор как основа для определения деформационных свойств природного мультифрактального объекта в упругопластическом состоянии с упрочнением // Прикладная и промышленная математика: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2013. № 9. С. 16-19.

120. Халкечев Р.К. Об одной распространенной ошибке при математическом моделировании трудноформализуемых объектов мультифрактальной структуры.

Комплексный метод самосогласованного поля при исследовании мультифрактальных сред // Прикладная и промышленная математика: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2013. № 9. С. 20-23.

121. Халкечев Р.К. Об одной распространенной ошибке применения метода конечных элементов при определении напряженно-деформированного состояния геоматериалов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2016. № 1. С. 182-186.

122. Халкечев Р.К. Об одном методе усреднения упругопластических свойств геоматериалов на основе теории мультифрактального моделирования // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2012. № 4. С. 39-43.

123. Халкечев Р.К. Перколяционная мультифрактальная математическая модель разрушения газосодержащего породного массива как основа для прогнозирования внезапного выброса пород и газа // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 4. С. 359-363.

124. Халкечев Р.К. Перколяционная мультифрактальная математическая модель разрушения жидкостьсодержащего породного массива как основа для прогнозирования схода оползней // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 4. С. 364-371.

125. Халкечев Р.К. Применение теории мультифрактального моделирования процессов деформирования и разрушения породных массивов с целью краткосрочного прогнозирования внезапных выбросов угля и газа // Уголь. 2019. №7. С. 48-50.

126. Халкечев Р.К. Программа анализа структуры геоматериала на предмет существования представительного объема. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019666286. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 06 декабря 2019г.

127. Халкечев Р.К. Программа анализа структуры минерала на предмет обнаружения преимущественной ориентации зерен. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019617380. Дата

государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 06 июня 2019г.

128. Халкечев Р.К. Программа вычисления нечетких тензорных функций. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019667117. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 19 декабря 2019г.

129. Халкечев Р.К. Программа определения внешнего поля напряжений, действующего на геоматериалы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019667448. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 24 декабря 2019г.

130. Халкечев Р.К. Программа определения деформационных свойств геоматериалов мультифрактальной структуры. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2019615272. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 апреля 2019г.

131. Халкечев Р.К. Программа определения тепловых и электрических свойств геоматериалов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020610852. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 21 января 2020г.

132. Халкечев Р.К. Программа управления технологическим процессом забивки свай с целью снижения рисков возникновения оползней. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020610372. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 13 января 2020г.

133. Халкечев Р.К. Разработка архитектуры автоматизированной системы научных исследований физических процессов горного производства // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 7. С. 317-323.

134. Халкечев Р.К. Разработка архитектуры комплекса программ определения деформационных свойств газосодержащих породных массивов // Математическое моделирование трудноформализуемых объектов: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2012. № 7. С. 23-27.

135. Халкечев Р.К. Разработка метода усреднения упругих свойств геоматериалов на основе теории мультифрактального моделирования // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2012. № 3. С. 17-21.
136. Халкечев Р.К. Скейлинг газосодержащих породных массивов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2012. №2. С. 102-104.
137. Халкечев Р.К. Стохастический метод определения элементарных объемов кристаллических и композиционных геоматериалов // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2012. № 2. С. 38-41.
138. Халкечев Р.К. Теоретические основы мультифрактального моделирования трудноформализуемых объектов // Прикладная и промышленная математика: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2013. № 9. С. 8–16.
139. Халкечев Р.К. Теоретические основы мультифрактального моделирования функциональных задач автоматизированной системы научных исследований физических процессов горного производства // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 8. С. 136-142.
140. Халкечев Р.К. Теория мультифрактального моделирования процессов деформирования и разрушения породных массивов как основа автоматизации технологии буровзрывных работ на угольных разрезах // Уголь. 2019. №11. С. 32-34.
141. Халкечев Р.К. Функционально-объектный язык визуального моделирования как основа для разработки математического обеспечения автоматизированных систем управления // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 8. С. 143-149.
142. Халкечев Р.К. Экспертная система разработка математических моделей геомеханических процессов в породных массивах // Горный журнал. 2016. № 7. С. 96-98.
143. Халкечев Р.К. Экспертная система управления процессом научных исследований разрушения геоматериалов различных порядков сложности //

Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 9. С. 336-342.

144. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Кластерная модель локализации реологической деформации поликристаллов. Зарождение ледникового оползня // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. Вып. 1. С. 183-184.

145. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование техногенных катастроф. Фрактальная кластерная модель горных ударов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып. 5. С. 939–940.

146. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Случайная фрактальная модель локализации пластической деформации поликристаллов. Зарождение оползней полнокристаллических геоматериалов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т.16. Вып. 1. С. 184-186.

147. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Фрактальные модели напряженно-деформированного состояния породного массива как основа автоматизированной системы управления технологическим процессом шахтной добычи тяжелой нефти // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2017. №8. С. 214-219.

148. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Каркасный подход к разработке автоматизированных систем научных исследований в горной промышленности на основе методов определения механических и тепловых свойств геоматериалов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2017. №10. С. 106-112.

149. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование давления горных пород в массиве с поликристаллическим упругопластическим пластом (обратная задача) // Математическое моделирование трудноформализуемых объектов: Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). Отдельные статьи (специальный выпуск). 2012. № 7. С. 27-31.

150. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование

неоднородного упругого поля напряжений породного массива кристаллической блочной структуры // Горный журнал. 2016. № 3. С. 200-205.

151. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование техногенных катастроф. Фрактальная кластерная модель внезапных выбросов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып. 5. С. 937-939.

152. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование упругого поля контактных напряжений в поликристаллических геоматериалах // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2016. № 1. С. 163-172.

153. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Математическое моделирование эксперимента по деформированию и разрушению поликристаллических геоматериалов в опытах над макрообразцами при одноосном сжатии // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2016. № 1. С. 173-181.

154. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Разработка автоматизированной системы определения внешнего поля напряжений, действующего на породный массив // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2017. №11. С. 220-226.

155. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Разработка математического обеспечения автоматизированных систем определения электрических свойств геоматериалов // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2017. №11. С. 227-232.

156. Халкечев Р.К., Халкечев К.В. Управление селективностью разрушения при дроблении и измельчении геоматериалов на основе методов подобия и размерности в динамике трещин// Горный журнал. 2016. № 6. С. 64-66.

157. Черепанов Г.П. Механика разрушения горных пород в процессе бурения. – М.: Недра, 1987. – 269с.

158. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.– М.: Наука, 1974. – 563с.

159. Черепанов Г.П., Ершов Л.В. Механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1974. – 345с.

160. Чуличков И.А. Математические методы нелинейной динамики. – М.:

ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296с.

161. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 370с.

162. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 575с.

163. Шотин А.Б. Автоматизация научных исследований процессов биосинтеза: диссертация кандидата технических наук: 05.13.06; – Москва, 2010. – 150с.

164. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528с.

165. Элланский М.М. К вопросу о моделировании электропроводности глинистых водоносных и нефтегазоносных пород с межгранулярной пористостью // Геофизика. 2001. №2. С. 54–62.

166. Achour Z., Laidboeur T., Gien O. Sanofi-Synthelabo Chemical Development and the Development of an Electronic Laboratory Notebook // Organic Process Research and Development, 2004. No. 8 (6). pp. 983–997.

167. Archie G.E. The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics // Tran. AIME, 1942. v.146, pp. 54–62.

168. Asaad Y. A study of the thermal conductivity of fluid bearing porous rocks. Phd Dissertation, Univ. of Calif. Berkeley, 1955. –155p.

169. Beran M. Statistical continuum Theories. // Intersc. Publ., 1968. – 342p.

170. Beran M., Molyneux J. Use of classical variations principles to determine bounds for the effective bulk modulus in heterogeneous media // Quart. Appl. Math. – 1966. – Vol. 24. – P. 107.

171. Booch G., Jacobson I., Rumbaugh J. The Unified Modeling Language User Guide. – MA: Addison-Wesley, 1999. – 500p.

172. Booch G., Jacobson I., Rumbaugh J. The Unified Software Development Process. – MA: Addison-Wesley, 1999. – 342p.

173. Booch G.: Object-Oriented Analysis and Design with Applications. – MA: Addison-Wesley, 1998. – 221p.

174. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von

- eterogenen Substanzen, I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen // *Ann. Phys.* 1935. Lpz. 24. pp. 636-679.
175. Bussian A.E. Electrical conductance in a porous medium // *Geophysics*. 1983. Vol. 48. No 9. pp. 1258–1268.
176. Chen Y., Huang W., Zhang D. An open-source Matlab code package for improved rank-reduction 3D seismic data denoising and reconstruction // *Computers & Geosciences*, 2016. Vol. 95. pp. 59–66.
177. Cramer H. *Mathematical methods of statistics*. – Princeton: Princeton University Press, 1999. – 575p.
178. Crook M.J. *Interfacing the real world to LIMS // Advanced LIMS Technology. Case Studies and Business Opportunities*. Surrey: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1995. Ch. 9. pp. 141–164.
179. De Silva T. *LIMS in a forensic laboratory // Advanced LIMS Technology. Case Studies and Business Opportunities*. Surrey: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1995. Ch. 3. pp. 37–53.
180. Garlan D., Shaw M. *Software Architecture: Perspectives on an Emerging Discipline*. – New York: Prentice Hall, 1996. – 196p.
181. Giuliani M., Li Y., Cominola A. A Matlab toolbox for designing Multi-Objective Optimal Operations of water reservoir systems // *Environmental Modelling & Software*, 2016. Vol. 85. pp. 293–298.
182. Gordon J.E. *The New Science of Strong Materials: Or Why You Don't Fall through the Floor*. – Princeton: Princeton University Press, 2018. – 328p.
183. Hahn G.J., Shapiro S.S. *Statistical models in engineering*. – New York: Wiley, 1967. – 367p.
184. Hanai T. Electrical properties of emulsions. In: *Emulsion science*. Chap. 5 (ed. P. Sherman). – London-New York: Academic Press, 1968. – 235p.
185. Hashin Z. Theory of mechanical behavior of heterogeneous media // *Appl. Mech. Rev.* 1964. Vol.17. No.1. – P. 123.
186. Hashin Z. Analyse of composite materials // *J. Appl. Mech.* 1983. No. 50. – P. 481–504.

187. Hashin Z. On the elastic behavior of fiber reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry // *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. No. 13. – P. 119–134.
188. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1963. – No. 11. – P. 127–140.
189. Hashin Z., Shtrikman S. On some variations principles in nisotropic and nonhomogeneous elasticity // *Mech. Phys. Ms.* – 1962. – Vol. 10, – No. 4. – P. 335.
190. Haynam G.E., Govindarajulu Z., Leone F.C. Tables of the cumulative non-central chi-square distribution. – New York: Selected tables in mathematical statistics, 1973. – Vol.1. – 97p.
191. Hill R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1966. – No. 13. – P. 89–101.
192. Hill R. The elastic behavior of a crystalline aggregate // *Proceedings of the Physical Society*. – 1952. – Vol. A65. – No. 389. – P. 349.
193. Horai K., Uyeda S. Studies of the Thermal State of the Earth. The Fifth Paper. Relate on between Thermal Conductivity of Sedimentary Rocks and Water Bull Earthquake // *Res.Inst.*, 1960. No 3. pp. 321–327.
194. Jaeger J.C., Cook N.G.W. *Fundamentals of Rock Mechanics*. – London: Chapman and Hall, 1971. – 456p.
195. Kacprzyk J. Multistage control under fuzziness using genetics algorithms. // *Control and Cybernetics*, 1996. – No. 6. – P. 1181–1216.
196. Kneer G. Die elastischen konstanten quasusotroper vielkristallaggregate // *Phys. Stat. Sol.* – 1963. – No.9. – P. 331–339.
197. Kroner E. Berechnung der elastischen konstanten des ielkristalls aus den konstanten des einkristalls // *Phys.* – 1958. – Vol. 151. – No. 4. – P. 504–512.
198. Kroner E. Elastic module of perfectly disorded composite laterials // *Mech. Phys. Solids*. – 1967. – Vol. 15. – No.4. – P. 319–327.
199. Kroner E. Zur plastischen verformung des vielkristalls // *Acta Materialia*. – 1961. – No.9. – P. 155–161.
200. Lichteneker K., Rother K. Die Herkeitung des logarithmischen Mischungs-gesetzes

- ans allgemeinen Prinzipien des stationären Stroming // Phys. Zeit., 1931. N 32. pp. 255–260.
201. Liebowitz H., Eftis J. On non-linear effects in fracture mechanics. – Engineering Fracture Mechanics, 1971. – vol.3, – P. 267-281.
202. Mahaffey R.R. LIMS: applied information technology for the laboratory. - New York: Van Nostrand Reinhold, 1990. – 260p.
203. McDowall R.D. A model for a comprehensive LIMS // Advanced LIMS Technology. Case Studies and Business Opportunities. Surrey: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1995. Ch. 2. pp. 15–36.
204. McDowall R.D. How can LIMS help ensure data integrity? // LC-GC Europe, 2016. Vol. 29. Issue 6. pp. 310–316.
205. McDowall R.D. The Management of Laboratory Information // Handbook of Environmental Chemistry, 1995. Vol. 2. P. 259-295.
206. Milsted A.J., Hale J.R., Frey J.G. LabTrove: A Lightweight, Web Based, Laboratory "Blog" as a Route towards a Marked Up Record of Work in a Bioscience Research Laboratory // PLoS ONE, 2013. Vol. 8. Issue 7. Article number e67460.
207. Nakagawa A.S. LIMS: Implementation and Management. – Cambridge: The Royal Society of Chemistry, 1994. – 180p.
208. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. // Architecture Rational Mechanical Analysis. – 1958. – No. 2. – P. 197-226.
209. Pooley R., Wilcox P. Applying UML: Advanced Applications. – Waltham.: Butterworth–Heinemann, 2003. – 224p.
210. Popov Yu., Romushkevich R., Bayuk I., Korobkov D.A., Mayr S., Burkhardt H. and Wilhelm H. Physical properties of rocks from the upper part of the Yaxcopoil-1 drill hole, Chicxulub crater // Meteoritics & Planetary Science. 2004. N 39. pp. 799–812.
211. Popov Yu.A., Prinbow D., Sass J., Williams C., Burkhardt H. Characterisation of Rock Thermal Conductivity by High-Resolution Optical Scanning // Geothermics 28, 1999. No. 2. pp. 253–276.
212. Popov Yu.A., Tertychnyi V.V., Romushkevich R.A., Korobkov D.A., and Pohl J.

- Interrelations Between Thermal Conductivity and Other Physical Properties of Rocks: Experimental Data // *Pure and Applied Geophysics*. 2003. N 160. pp. 1137–1161.
213. Reuss A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle z angew // *Math und Mechanics*. – 1929. – Vol. 9. – No.1. – S. 49-62.
214. Reuter B., Aizinger V., Wieland M. FESTUNG: A MATLAB/GNU Octave toolbox for the discontinuous Galerkin method, Part II: Advection operator and slope limiting // *Computers & Mathematics with Applications*, 2016. Vol. 72. Issue 7. pp. 1896–1925.
215. Rubacha M., Rattan A.K., Hosselet S.C. A review of electronic laboratory notebooks available in the market today // *Journal of Laboratory Automation*, 2011. No. 16. pp. 90–98.
216. Rudolphi F., Gooben L. An electronic laboratory journal as open source software // *Nachrichten aus der Chemie*, 2010. No. 58, pp. 548–550.
217. Rudolphi F., Goossen L.J. Electronic laboratory notebook: The academic point of view // *Journal of Chemical Information and Modeling*, 2012. Vol. 52.2. pp. 293–301.
218. Rumbaugh J., Blaha M., Premerlani W., Eddy F. *Object-Oriented Modeling and Design*. – New York: Prentice Hall, Second Edition, 1992. – 290p.
219. Samstag F.J. Induced polarization of shaly sands: Salinity domain modeling by double embedding of the effective medium theory // *Geophysics*. 1991. Vol. 56. pp. 1749–1756.
220. Schumann T.E., Vass V. Heat Flow through Granulated Material // *Bull.*, 1957. No 13. pp. 45–50.
221. Sen P.N., Scala C., and Cohen M.H. Self similar model for sedimentary rocks with application to the dielectric constant of fused glass beads // *Geophysics*. 1981. Vo. 46. pp. 781-795.
222. Sheng P. Consistent modeling of the electrical and elastic properties of sedimentary rocks // *Geophysics*. 1991. Vol. 56. pp. 1236–1243.
223. Sih G.C. Application of the strain energy theory to fundamental fracture problems. – Boston, Proc. of 10th SES Annual Meeting, 1975. – P. 221-234.

224. Sih G.C. Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems. – International Journal of Fracture, 1976. – vol. 10. – №3. – P. 305-321.
225. Stafford J.E.H. LIMS: An automating or informing technology? // Advanced LIMS Technology. Case Studies and Business Opportunities. Surrey: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1995. Ch. 1. P. 1–13.
226. Storr I.R. The promise of client-server LIMS applications // Advanced LIMS Technology. Case Studies and Business Opportunities. Surrey: Springer Science+Business Media Dordrecht, 1995. Ch. 11. pp. 192–205.
227. Taylor J.R. An introduction to error analysis. – Mill Valley, California: University Science Books, 1982. – 298p.
228. Turner C.E. Methods for post-yield fracture safety assessment. – Post-Yield Fracture Mechanics, D.G.H. Latzko (ed.), 1979. pp. 23-210.
229. Vazquez R. A new design for the implementation of isogeometric analysis in Octave and Matlab: GeoPDEs 3.0 // Computers & Mathematics with Applications, 2016. Vol. 72. Issue 3. pp. 523–554.
230. Victoria M., Querin O.M., Diaz C. liteITD a MATLAB Graphical User Interface (GUI) program for topology design of continuum structures // Advances in Engineering Software, 2016. Vol. 100. pp. 126–147.
231. Voigt W. Lehrbuch der kristallphysik . – Berlin: Fenbner. – 1928. – 962S.
232. Waxman M.H., Smits L.J.M. Electrical conduction in oil-bearing sands // Society of Petroleum Engineers Journal. 1968. No 8. pp. 107–122.
233. Yager R., Filev D. Essentials of fuzzy modeling and control. – New York: John Wiley and Sons, 1994. – 210p.
234. Zadeh L.A. Fuzzy sets and information granularity. In advances in Fuzzy Set Theory and Applications. – Amsterdam: North-Holland, 1979. pp. 3-18.
235. Zadeh L.A. Fuzzy sets. // Information and Control. 1965. Vol. 8. – pp. 338-353.
236. Zhang C.Y. Design of laboratory management system based on web // Applied Mechanics and Materials, 2014. Vol. 608-609. pp. 367-370.
237. Zhang Z.M. Implementation of laboratory management system based on LAMP // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 513-517. pp. 2261–2263.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Российская Федерация  
 Карачаево-Черкесская Республика  
 ЗАКРЫТОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО  
**«ИЗВЕСТНЯК» - ДЖЕГОНАССКИЙ КАРЬЕР**

369300, Карачаево-Черкесская Республика,  
 район Усть-Джегутинский, город Усть-Джегута,  
 участок Джегонасский карьер  
 Факс7-01-30 (878-75),тел7-11-91

ИНН 0909000671  
 КПП 090901001

<http://www.izvest.org> E-mail: [mail@izvest.org](mailto:mail@izvest.org)



Генеральный директор ЗАО «Известняк»

Джегонасский карьер

/Борлаков Ш.М./

«13» января 2020 г.

**АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**  
 Халкечева Руслана Кемаловича на тему «Разработка каркасной мультифрактально-  
 модельной методологии построения АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности»  
 на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности  
 05.13.06 – Автоматизация и управление технологическими процессами и производ-  
 ствами (промышленность)

Комиссия в составе начальника ПТО Якушева А.П., начальника горно-  
 перерабатывающего цеха Корбанкова С.Л., и.о. начальника ОТК Рябцева Ю.А. со-  
 ставили настоящий акт о том, что в деятельности Закрытого акционерного общества  
 «Известняк» используются нижеследующие результаты диссертационной работы  
 соискателя:

- АСНИ физических процессов горных работ при решении задач проектирования  
 открытых горных работ и управления технологическими процессами дробления и  
 измельчения известняков;
- АСУ ТП забивки свай при проведении горно-строительных работ на карьере.

В результате использования данных систем появилась возможность увеличить  
 производительность технологических процессов и проектных работ на Джего-  
 насском карьере.

Начальник ПТО

Якушев А.П.

Начальник ГПЦ

Корбанков С.Л.

И.о. начальника ОТК

Рябцев Ю.А.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ И МОНИТОРИНГУ  
ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ  
(Росгидромет)

**Федеральное государственное  
бюджетное учреждение  
«ВЫСОКОГОРНЫЙ  
ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»  
(ФГБУ «ВГИ»)**

пр. Ленина, 2, Нальчик, КБР, 360030  
Тел/Факс: (866-2) 40-24-84, E-mail: vgi@yandex.ru  
ОКПО 02572841, ОГРН 1020700755426,  
ИНН/КПП 0711017410/072501001

21.01.2020 № 12-02-16/45  
На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

**Утверждаю»**

Директор ФГБУ «Высокогорный  
геофизический институт» Росгидромета



Беккиев М.Ю.

\_\_\_\_\_ 2020 г.

### АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Халкечева Руслана Кемаловича на тему «Разработка каркасной мультифрактально-модельной методологии построения АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности» на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.06 – Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами (промышленность)

Комиссия в составе заведующего отделом Аджиева А.Х. и старшего научного сотрудника Болгова Ю.В. составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Халкечева Руслана Кемаловича в части методов и моделей определения напряженно-деформированного состояния геоматериалов различного порядка структурной сложности, в частности селе- и лавиноопасных снежных пластов, а также технического и программного обеспечения автоматизированной системы научных исследований физических процессов горного производства, используются в Федеральном государственном бюджетном учреждении «Высокогорный геофизический институт» Росгидромета при разработке математических моделей склоновых процессов с целью прогнозирования стихийных явлений в виде оползней, селей и снежных лавин.

Полученные таким образом математические модели обладают большей степенью адекватности по сравнению с ранее используемыми в институте, что позволяет производить более качественную экспертизу объектов народного хозяйства на предмет безопасности от таких стихийных явлений, как оползни, сели и лавины.

Заведующий отдела стихийных явлений,  
д.ф.-м. наук, профессор

Аджиев А.Х.

СНС отдела стихийных явлений  
к.ф.-м. наук

Болгов Ю.В.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ «ЮГЭНЕРГОРЕМОНТ»

Пер. Глухой, 2, г. Пятигорск, Ставропольский край, 357500  
(8793)40-57-26, факс (8793) 40-57-02, [pto111@mail.ru](mailto:pto111@mail.ru)

«25» 02 2020 г.

УТВЕРЖДАЮ:  
Генеральный директор ООО «ЮГЭНЕРГОРЕМОНТ»  
Байрамуков Б.И. /  
«25» февраля 2020 г.



#### АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Халкечева Руслана Кемаловича на тему

*«Разработка каркасной мультифрактально-модельной методологии  
построения АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности»*

на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности  
05.13.06 – Автоматизация и управление технологическими процессами и  
производствами (промышленность)

Комиссия в составе главного инженера Батдыев С.П. и производителя работ Тамбиева И.М. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Халкечева Р.К. в виде автоматизированной системы управления технологическим процессом забивки свай используются в деятельности ООО «ЮГЭНЕРГОРЕМОНТ» при проведении ремонтно-строительных работ.

Применение данной системы позволило повысить устойчивость строений, возведенных на свайных фундаментах в условиях плотной городской застройки.

Главный инженер

Батдыев С.П.

Производитель работ

Тамбиев И.М.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г



Общество с ограниченной ответственностью «СНАБ» (ООО «СНАБ»)  
 121357, город Москва, улица Генерала Дорохова, дом 2, этаж 3,  
 помещение I, комната 29  
 ИНН 7724341738, КПП 772901001, ОГРН 5157746057211  
 тел. +7-925-550-29-34; e-mail: snab2015.m@mail.ru

УТВЕРЖДАЮ

Генеральный директор ООО «СНАБ»

/ А.В. Кондратов /

« 14 » 02 2020 г.

**АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ  
 ХАЛКЕЧЕВА РУСЛАНА КЕМАЛОВИЧА**

на тему «Разработка каркасной мультифрактально-модельной методологии построения  
 АСНИ и АСУ ТП в горной промышленности»

на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности  
 05.13.06 – Автоматизация и управление технологическими процессами и производствами  
 (промышленность)

Комиссия в составе начальника Капустина Д.А., главного инженера Рокотянского Д.В. и мастера строительно-монтажных работ Анохина С.А. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Халкечева Р.К. в виде автоматизированной системы управления технологическим процессом забивки свай используются в деятельности ООО «СНАБ» при строительстве фундаментов зданий и сооружений.

Применение принципиально новых математических моделей, составляющих основу разработанной автоматизированной системы управления, позволяет в зависимости от напряженно-деформированного состояния породного массива, глубины залегания и поперечного сечения свай, определять оптимальную величину осевой нагрузки гидравлического молота на сваю, при которой отсутствует опасное вибрационное воздействие на близлежащие здания и сооружения.

Начальник участка

Капустин Д.А.

Главный инженер

Рокотянский Д.В.

Мастер СМР

Анохин С.А.

Генеральный директор

А.В. Кондратов

