Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

На правах рукописи

Сеидов Сеидали Сахиб оглы

Макроскопические квантовые явления в системах джозефсоновских контактов взаимодействующих с электромагнитным полем

01.04.07 Физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Мухин Сергей Иванович
Научный консультант: к. ф.-м. н., с.н.с. Фистуль Михаил Викторович

Москва, 2021

Оглавление

Введение

Объект и предмет исследования. В работе рассмотрены две задачи о взаимодействии системы джозефсоновских контактов с электромагнитным полем. В первой задаче ансамбль джозефсоновских контактов помещён в одномодовую микроволновую полость. В приближении большой зарядовой энергии джозефсоновских контактов гамильтониан системы сводится к гамильтониану расширенной модели Дике, в которой взаимодействие между двухуровневыми системами осуществляется через их связь с фотонной модой в резонаторе. Вторая задача посвящена макроскопической квантовой динамике флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Наличие последней приводит к замене классической динамики флюксона на макроскопическую квантовую динамику. Система описывается с помощью модели Френкеля–Конторовой и квантовая динамика флюксона происходит в периодическом потенциале Пайерлса–Набаро.

В работе исследована расширенная модель Дике с произвольным знаком взаимодействия между двухуровневыми системами. В зависимости от знака происходит фазовый переход в разные фазы — сверхизлучательную или субизлучательную. С помощью метода некоммутирующих пределов были исследованы свойства фазового перехода при различном типе взаимодействия между двухуровневыми системами и была уточнена фазовая диаграмма в области больших констант связи. Показано, что в случае отсутствия прямого взаимодействия, то есть при взаимодействии двухуровневых систем только через взаимодействие с резонатором, происходит переход в сверхизлучательную фазу. Также были найдены решения квазиклассических уравнений движения для обыкновенной модели Дике.

Параллельные массивы квантовых джозефсоновских контактов являются удобной системой для исследования динамики магнитных флюксонов — кинков джозефсоновской фазы. В работе показано, что включение в ячейки массива большого количества дополнительных джозефсоновских контактов с малой зарядовой энергией позволяет добиться высокой кинетической индуктивности массива. Тогда размер флюксона сжимается до размера одной ячейки, то есть на масштабе одной ячейки происходит изменение джозефсоновской фазы. За счёт этого удаётся добиться квантовой, а не классической, динамики флюксона. В работе исследована макроскопическая квантовая динамика флюксона в двух конфигурациях параллельного массива джозефсоновских контактов: длинной линейной и короткой кольцевой. Показано существование квантовых эффектов в динамике, а именно: блоховских осцилляций и эффекта Ааронова–Кашера.

Цель работы. В работе преследовались две цели. Первая цель — исследование квантового фазового перехода в расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами, а также исследование динамики обыкновенной модели Дике. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Найти энергию основного состояния расширенной модели Дике и его волновую функцию в пределе большой константы связи и при наличии малого внешнего нарушающего симметрию возмущения

2. Применить метод некоммутирующих пределов к волновой функции основного состояния и получить выражения для границ фаз на фазовой диаграмме

3. Построить фазовую диаграмму расширенной модели Дике численно и сравнить с полученными аналитическими результатами

4. Исследовать фазовую диаграмму с помощью функций Хусими системы в различных фазах

5. Записать и решить квазиклассические уравнения движения обыкновенной модели Дике

Вторая цель — исследование макроскопической квантовой динамики одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. Для этого были поставлены задачи:

1. Из общего вида потенциальной энергии параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов получить потенциальную энергию массива с одиночным захваченным магнитным флюксоном

2. Описать туннелирование флюксона между соседними ячейками параллельного массива как квантовую динамику в периодическом потенциале (Пайерлса–Набарро)

3. Исследовать макроскопическую квантовую динамику флюксона в длинном линейном параллельном массиве джозефсоновских контактов в присутствии слабой диссипации и в коротком кольцевом массиве

Разработанность темы. В работах по расширенной модели Дике случай отсутствующего прямого взаимодействия между двухуровневыми системами не рассматривался, были исследованы только случаи с ненулевым прямым взаимодействием. Существование фазового перехода при отсутствии прямого взаимодействия между двухуровневыми системами считалось спорным, так как была сформулирована no-go theorem, запрещавшая переход. В работах по динамике обыкновенной модели Дике было показано, что в сверхизлучательной фазе существуют две устойчивые стационарные точки, а движение системы есть колебания между ними. Уравнения движения в квазиклассическом приближении, допускающие аналитическое решение, получены не были.

Флюксоны рассматривались только в параллельных массивах квантовых джозефсоновских контактов с низкой кинетической индуктивностью. Последнее приводило к размазыванию флюксона вдоль массива, вследствие чего его размер превышал размер одной ячейки массива и динамика была классической. Квантовая динамика одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов не исследовалась.

Актуальность работы. К расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами сводится задача о взаимодействии электромагнитного поля в резонаторе с ансамблем джозефсоновских контактов. Характер их связи с полем — через калибровочно–инвариантный сдвиг сверхпроводящей фазы — приводит к рассматриваемой модели, которая также отражает калибровочно–инвариантную природу взаимодействия. В работе уточнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике, впервые продемонстрирован переход в сверхизлучательную фазу при отсутствующем прямом взаимодействии между двухуровневыми системами.

Аналитическое решение квазиклассических уравнений движения в обыкновенной модели Дике получено впервые. Полученные результаты полезны для дальнейшего исследования динамических свойств модели Дике, таких как хаос, интегрируемость, бифуркации и так далее.

Впервые изучена когерентная макроскопическая квантовая динамика одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Предсказаны измеримые эффекты, демонстрирующие наличие именно квантовой, а не классической динамики.

Методы исследования. Ключевым методом исследования фазового перехода в расширенной модели Дике в работе является метод некоммутирующих пределов большой константы связи и малого внешнего возмущения. Он позволяет исследовать неустойчивость симметричной фазы и спонтанное нарушение симметрии, которое и является причиной фазового перехода. Фазовая диаграмма расширенной модели Дике исследована с помощью функций Хусими, которые были построены в её точках, соответствующих разным фазам.

Квантовая динамика флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов сведена к квантовой динамике в периодическом потенциале Пайерлса–Набарро. Последний возникает при описании параллельного массива джозефсоновских контактов в рамках модели Френкеля–Конторовой.

Научная новизна. Показано, что в расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами происходит квантовый фазовый переход. Примечательно, что фазовый переход происходит вследствие спонтанного нарушения симметрии, то есть не в связи с явным нарушением симметрии гамильтониана, а в связи с неустойчивостью симметричного состояния при константе связи выше критической. Исследована и уточнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике.

Найдено аналитическое решение квазиклассических уравнений движения обыкновенной модели Дике в сверхизлучательной фазе вблизи перехода. Динамика представляет собой периодические биения между двумя устойчивыми стационарными точками. Образуется так называемое состояние ”связанной светимости”, в котором происходит перекачка энергии между электромагнитной волной в резонаторе и двухуровневыми системами.

Исследована когерентная квантовая динамика одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Обнаружены блоховские осцилляции в длинном линейном массиве и эффект Ааронова–Кашера в коротком кольцевом.

Научная и практическая значимость. Полученные результаты отвечают на вопрос о возможности фазового перехода в расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами. Исследованы свойства системы на границе перехода между двумя фазами. Уточнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике.

Квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике описана дифференциальными уравнениями, имеющими аналитическое решение в функциях Якоби. Описано явление ”связанной светимости”.

Впервые показано, что высокая кинетическая индуктивность параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов, приводящая к сжатию флюксона до размера одной ячейки, позволяет добиться его квантовой, а не классической динамики. Описаны вызванные квантовой динамикой эффекты, позволяющие её обнаружить экспериментально.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В расширенной модели Дике без прямого взаимодействия между двухуровневыми системами происходит квантовый фазовый переход в сверхизлучательное состояние по константе связи электромагнитного поля с двухуровневыми системами.

2. Переход вызван спонтанным нарушением симметрии основного состояния, которое возникает при появлении сверхизлучательной фазы. Найдена минимальная величина внешнего возмущения, необходимого для такого перехода, как функция от константы связи электромагнитного поля в полости и двухуровневых систем. На фазовой диаграмме отмечена область неустойчивости.

3. Квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике в сверхизлучательной фазе представляет собой периодические биения суммарного дипольного момента двухуровневых систем и напряжённости электрического поля в полости, образуется состояние ”связанной светимости”. Биения происходят между двумя симметричными вырожденными сверхизлучательными состояниями.

4. Показано, что внедрение большого числа дополнительных джозефсоновских контактов в ячейки параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов позволяет добиться высокой кинетической индуктивности массива. Последнее, за счёт сжатия размера захваченного в массиве одиночного флюксона до размера одной ячейки массива, приводит к возникновению квантовой, а не классической динамики.

Степень достоверности. Достоверность полученных результатов основана на использовании современных теоретических методов их получения, положительной апробации работы в виде докладов на международных конференциях, публикациями результатов в реферируемых журналах по физике.

Личный вклад. Автор исследовал волновые функции основного состояния расширенной модели Дике при большой и малой константе связи. Им был описан механизм спонтанного нарушения симметрии и применён метод некоммутирующих пределов. Автор произвёл численные расчёты фазовой диаграммы расширенной модели Дике и функций Хусими. Также им была продемонстрирована связь решений квазиклассических уравнений движения, полученных в двух приближениях.

Автор получил потенциал Пайерлса–Набарро при описании когерентной квантовой динамики одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Им была получена вольт–амперная характеристика длинного линейного массива и зависимость от времени колебаний напряжения в нём, свидетельствующие о существовании блоховских осцилляций. В коротком кольцевом массиве автором был описан возникающий эффект Ааронова–Кашера.

Вклад соавторов. Работа была проведена под руководством профессора, д.ф.-м.н. Мухина С.И. Им был предложен метод повёрнутого преобразования Гольштейна–Примакова, с помощью которого задача была решена аналитически в термодинамическом пределе и впервые был обнаружен фазовый переход. Также им была вычислена энергия основного состояния расширенной модели Дике во втором порядке теории возмущений для конечного полного спина и были получены решения квазиклассических уравнений движения, описывающих состояние "связанной светимости".

Фистуль М.В. предложил метод повышения кинетической индуктивности параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов за счёт включения большого числа дополнительных джозефсоновских контактов в ячейки массива. Также, им было предложено описание задачи о движении одиночного флюксона в параллельном массиве джозефсоновских контактов как задачи о движении в потенциале Пайерлса–Набарро с помощью модели Френкеля–Конторовой.

Публикации. Основные результаты по теме диссертационной работы представлены в 3 печатных изданиях [1–3], рекомендованных ВАК (см. список литературы).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. S. S. Seidov, S. I. Mukhin. Numerical study of Dicke model with infinitely coordinated frustrating interaction // Winter school on Quantum Condensed-matter Physics, Черноголовка, Московская область, Россия, 2017.

2. S. S. Seidov, S. I. Mukhin, Suppression of chaos in a frustrated Dicke model // BASIS Foundation Summer School "Many body theory meets quantum information", Солнечногорск, Московская область, Россия, 2018.

3. S. S. Seidov, S. I. Mukhin, Spontaneous symmetry breaking in extended Dicke model // V International Conference on Quantum Technologies, Москва, Россия, 2019.

4. S. S. Seidov, S. I. Mukhin, Spontaneous symmetry breaking in extended Dicke model // XVIII

школа-конференция молодых учёных ”Проблемы физики твердого тела и высоких давлений”, Сочи, Россия, 2019.

5. С. С. Сеидов, М. В. Фистуль, Квантовая динамика флюксона в цепочке параллельных джозефсоновских контактов // Вторая Международная Конференция ”Физика конденсированных состояний” ФКС-2021, Черноголовка, Московская область, Россия, 2021.

6. S. S. Seidov, M. V. Fistul, Quantum dynamics of a single fluxon in Josephson junctions parallel arrays with large kinetic inductances // VI International Conference on Quantum Technologies, онлайн, 2021.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, основного материала, изложенного в четырёх главах, списка защищаемых положений, двух приложений и списка литературы. Диссертация изложена на 80 страницах, содержит 29 рисунков. Список используемой литературы включает 77 наименований.

Глава 1

Литературный обзор

1.1. Спонтаное нарушение симметрии

Рассмотрим систему с гамильтонианом $\hat{H}$, коммутирующим с некоторым оператором $\hat{\Lambda}$, тогда гамильтониан имеет соответствующую симметрию (например трансляционную, если $\hat{\Lambda}$ — оператор импульса). Пусть $|\psi\rangle$ некоторое состояние с нарушенной симметрией, то есть не являющееся собственным состоянием оператора $\hat{\Lambda}$. Тогда существует набор вырожденных состояний с той же энергией, что и у состояния $|\psi\rangle$. В самом деле,

$$\langle\psi|\hat{\Lambda}^{\dagger}\hat{H}\hat{\Lambda}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \,, \tag{1.1}$$

так как $[\hat{H}, \hat{\Lambda}] = 0$. То есть, новые вырожденные состояния можно получать последовательно действуя оператором $\hat{\Lambda}$: $|\psi_n\rangle = \hat{\Lambda}\,|\psi_{n-1}\rangle = \hat{\Lambda}^n\,|\psi_0\rangle$. Теперь можно определить оператор параметра порядка $\hat{O}$, для которого состояния из набора являются собственными, но при этом имеют различные собственные значения o_n:

$$\hat{O} = \sum_n o_n\,|\psi_n\rangle\!\langle\psi_n| \,. \tag{1.2}$$

Из того, что состояния с нарушенной симметрией не являются собственными состояниями коммутирующего с гамильтонианом оператора, следует, что они не могут быть собственными состояниями гамильтониана. Но тогда возникает противоречие с наблюдаемой реальностью: в природе объекты имеют симметрию меньшую, чем описывающие их законы. Например, гамильтониан свободного тела имеет трансляционную инвариантность, хотя само тело находится в определённой области пространства. Гамильтониан ферромагнетика инвариантен относительно направления оси намагничивания, но сам ферромагнетик намагничен вдоль какой-то выделенной оси. Противоречие разрешается тем, что симметричное состояние становится неустойчивым и система случайным образом "сваливается" в одно из состояний с нарушенной симметрией $|\psi_n\rangle$. Значение параметра порядка при этом позволяет различить между собой вырожденные состояния. Возвращаясь к приведённым выше примерам, для тела параметром порядка является координата, а для ферромагнетика намагниченность.

1.1.1. Спонтанное нарушение симметрии в термодинамическом пределе

Хотя обычно параметр порядка не коммутирует с гамильтонианом, в термодинамическом пределе стремления размера системы N к бесконечности зачастую $[\hat{H}, \hat{O}] \sim 1/N \to 0$. Это значит, что вырожденные состояния $|\psi_k\rangle$ становятся собственными состояниями гамильтониана $\hat{H}$.

Качественно это можно понять из следующих соображений: симметричное состояние в термодинамическом пределе является сильно делокализованным и, как следствие, неустойчивым. В то же время состояния $|\psi_k\rangle$ становятся практически ортогональными, так как $\langle\psi_k|\psi_l\rangle \sim e^{-N} \to 0$. То есть, в случае попадания системы в одно из состояний $|\psi_k\rangle$, вероятность туннелирования в состояние $|\psi_l\rangle$ экспоненциально мала. Само же состояние крайне локализовано и поэтому устойчиво к внешним возмущениям. В итоге, если энергия состояний $|\psi_k\rangle$ была близка к энергии симметричного основного состояния гамильтониана, в термодинамическом пределе состояния $|\psi_k\rangle$, во-первых, будут собственными состояниями гамильтониана (так как $[\hat{H}, \hat{O}] \to 0$) и, во-вторых, будут устойчивы.

1.1.2. Некоммутируюшие пределы

Пусть состояние системы зависит от параметра g, а внешние флуктуации пропорциональны параметру α. Тогда, если пределы стремления параметра к его критическому значению g_c и стремления внешних флуктуаций к нулю не коммутируют, то есть

$$\lim_{g\to g_c}\lim_{\alpha\to 0} f(\text{состояние системы}) \neq \lim_{\alpha\to 0}\lim_{g\to g_c} f(\text{состояние системы}), \tag{1.3}$$

в системе наблюдается спонтанное нарушение симметрии [4, 5].

Выражение (1.3) является математической записью того факта, что, выведенная из симметричного состояния сколь угодно малым внешним возмущением, система не вернётся к нему после снятия возмущения. То есть, при достижении параметром g критического значения g_c симметричное состояние становится неустойчивым.

1.1.3. Спонтанное нарушение симметрии в двухъямном потенциале

Рассмотрим частицу в потенциале

$$V(\hat{x}) = (\hat{x}^2 - a^2)^2. \tag{1.4}$$

Потенциал изображён на рис. 1.1. Благодаря туннелированию между ямами, произойдёт расщепление основного состояния частицы на симметричную и антисимметричную суперпозицию волновых функций в каждой из ям:

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_L\rangle \pm |\psi_R\rangle), \tag{1.5}$$

где $|\psi_L\rangle$ и $|\psi_R\rangle$ волновые функции частицы в левой и правой яме соответственно. Симметрия волновых функций частицы отражает симметрию потенциала относительно отражения $\hat{x} \to -\hat{x}$.

Среднее значение оператора $\hat{x}$ по этим состояниями равно нулю:

$$\langle \psi_\pm | \hat{x} | \psi_\pm \rangle = 0. \tag{1.6}$$

Добавим к потенциалу нарушающий симметрию член:

$$V_\alpha(\hat{x}) = V(\hat{x}) + \alpha \hat{x} = (\hat{x}^2 - a^2)^2 + \alpha \hat{x}. \tag{1.7}$$

Так как потенциал более не симметричен, то и симметричные волновые функции (1.5) не являются

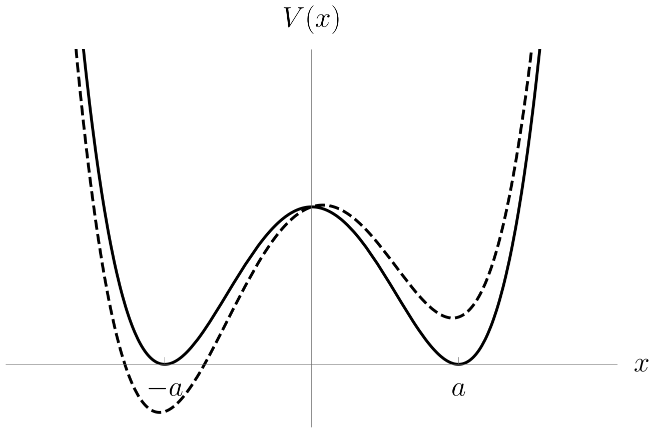


Рис. 1.1: Сплошная линия — симметричный двухъямный потенциал $V(x)$, штриховая — потенциал $V_\alpha(x)$ с нарушенной симметрией.

волновыми функциями расщеплённого основного состояния. Представим основное состояние в виде суперпозиции

$$|\psi_\alpha\rangle = c_L |\psi_L\rangle + c_R |\psi_R\rangle . \tag{1.8}$$

Так как потенциал наклонился влево ($\alpha > 0$), $c_L > c_R$ и частица локализована в левой яме. Применим теперь метод некоммутирующих пределов. Сначала зафиксируем конечное расстояние между ямами $2a$ и устремим α к нулю. Тогда симметричная суперпозиция должна восстановиться, то есть

$$\lim_{a\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} |\psi_\alpha\rangle = |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_L\rangle + |\psi_R\rangle) \tag{1.9}$$

и при изменении расстояния между ямами симметрия будет сохраняться. Теперь зафиксируем конечное α и устремим расстояние между ямами к бесконечности. При положительном α частица будет локализована в левой яме. Так как перекрытие волновых функций в разных ямах убывает экспоненциально с расстоянием между ними, при устремлении α к нулю суперпозиция не восстановится — ямы слишком далеко друг от друга. Следовательно

$$\lim_{\alpha\to 0} \lim_{a\to\infty} |\psi_\alpha\rangle = |\psi_L\rangle . \tag{1.10}$$

Как видно, пределы не коммутируют, то есть симметричное состояние при критическом параметре $a_c = \infty$ неустойчиво — сколь угодно малое внешнее возмущение нарушит симметрию. В состоянии с нарушенной симметрией

$$\langle \psi_L | \hat{x} | \psi_L \rangle = -a, \tag{1.11}$$

то есть появилось ненулевое квантовомеханическое среднее.

Параметр порядка и набор вырожденных состояний

Проиллюстрируем также в модели двухъямного потенциала идею вырожденных основных состояний и параметра порядка. Гамильтониан коммутирует с оператором чётности $\hat{\Pi}$, отражающим $\hat{x}$ в $-\hat{x}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}\,|\psi_R\rangle &= |\psi_L\rangle \\ \hat{\Pi}\,|\psi_L\rangle &= |\psi_R\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Расщеплённые волновые функции тогда имеют разную чётность и являются собственными функциями $\hat{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}\,|\psi_+\rangle &= |\psi_+\rangle \\ \hat{\Pi}\,|\psi_-\rangle &= -\,|\psi_-\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Состояния $|\psi_{L,R}\rangle$ образуют набор вырожденных состояний с нарушенной симметрией, о которых шла речь в начале главы. Их два, так как $\hat{\Pi}^2 = 1$. А параметром порядка является оператор координаты $\hat{x}$, который не коммутирует с гамильтонианом (так как в него входит оператор импульса).

Щель между энергетическими уровнями, соответствующим симметричной и антисимметричной суперпозиции, экспоненциально зависит от расстояния между ямами:

$$\Delta E \sim \exp\left[-\int\limits_{-x_0}^{x_0}\sqrt{2m(E_0 - V(x))}\mathrm{d}x\right], \tag{1.14}$$

где $\pm x_0$ — точки поворота, соответствующие энергии E_0, находятся вблизи точек минимума потенциала $\pm a$. То есть, с ростом параметра a снятие вырождения между состояниями с разной чётностью становится всё меньше, а значит они всё с большей точностью приближают симметричное основное состояние. Их смешение запрещено симметрией гамильтониана, однако экспоненциально малая щель приводит к неустойчивости симметричной волновой функции. Как видно из (1.12), волновые функции несимметричного состояния собственными функциями оператора $\hat{\Pi}$ не являются.

1.2. Модель Дике

Предложенная Дике модель [6–8] описывает взаимодействие электромагнитной волны с ансамблем двухуровневых систем в одномодовом резонаторе. Единственная мода электромагнитной волны представлена как квантовый гармонический осциллятор, который связан с каждой из двухуровневых систем через его координату (или импульс). Двухуровневые системы описываются спиновыми операторами $\hat{\sigma}_i^{x,y,z}$, а мода электромагнитной волны бозонными операторами $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$. Гамильтониан модели есть

$$\hat{H}_D = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + ig\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^y - \omega_0\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_i^z, \tag{1.15}$$

где ω — частота электромагнитной волны, ω_0 — расстояние между уровнями энергии двухуровневой системы, g — константа связи. Вводя операторы суперспина

$$\hat{S}_{x,y,z} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^{x,y,z} \tag{1.16}$$

и операторы координаты и импульса фотонного осциллятора

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

получим гамильтониан в форме

$$\hat{H}_D = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y - \omega_0\hat{S}_z. \tag{1.18}$$

Гамильтониан описывает квантовый осциллятор, связанный со спином S. Связь реализуется через произведение импульса осциллятора на проекцию спина на одну из осей (в наших обозначениях на ось y). При нулевой константе связи член $-\omega_0\hat{S}_z$ стремится развернуть спин вдоль оси z. С ростом константы связи осциллятор всё сильнее "вытягивает" спин вдоль оси y. Конкуренция двух вкладов приводит к возникновению двух фаз и квантового фазового перехода между ними.

В работе [8] обнаружен фазовый переход в модели Дике в сверхизлучательное состояние в термодинамическом пределе. В работе [9] показано, что фазовый переход сопровождается возникновением квантового хаоса. Это выражается в статистике собственных значений энергии и виде волновой функции основного состояния. Также, в работе [10] обнаружен квантовый фазовый переход возбуждённых состояний, связанный с возникновением хаоса. Сверхизлучательная фаза характеризуется ненулевыми средними значениями квантовомеханических наблюдаемых в основном состоянии. В частности, среднее значение импульса осциллятора становится пропорционально полному спину ансамбля двухуровневых систем.

В работе [11] предложена реализация модели Дике с использованием ридберговских атомов, помещённых в микроволновую полость. В данной системе наблюдались коллективные эффекты [12, 13], однако проблема в том, что в эксперименте число атомов не сохранялось, так как существовал их постоянный поток в систему и из неё. Позднее эксперименты с ридберговскими атомами были улучшены, так как удалось с помощью ионных ловушек зафиксировать положения атомов [14–18]. Альтернативно модель Дике можно реализовать с помощью методов квантовой электродинамики электрических цепей [19–23]. Последнее позволяет значительно улучшить качество производимых система и контроль за их свойствами, а также достичь сильной связи электромагнитного поля и двухуровневых систем.

1.2.1. Чётность

Гамильтониан $\hat{H}_D$ коммутирует с оператором чётности

$$\hat{\Pi} = \exp\left\{i(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{S} - \hat{S}_z)\right\}. \tag{1.19}$$

В показателе экспоненты стоит оператор числа возбуждений

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{S} - \hat{S}_z. \tag{1.20}$$

Если в некотором состоянии число возбуждений, то есть сумма номера уровня фотонного осциллятора и разности между полным спином и его проекцией на ось z, чётно, то собственное значение оператора $\hat{\Pi}$ равно 1. Если же нечётно, то -1.

Операторы $\hat{p}$ и $\hat{S}_y$ увеличивают число возбуждений на 1, то есть

$$\begin{aligned} &\hat{q}\left|n\right\rangle \propto \left|n+1\right\rangle + \left|n-1\right\rangle \\ &i\hat{p}\left|n\right\rangle \propto \left|n-1\right\rangle - \left|n+1\right\rangle \\ &i\hat{S}_y\left|\sigma_z\right\rangle \propto \left|s_z-1\right\rangle - \left|s_z+1\right\rangle. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь $|n\rangle$ — собственное состояние фотонного осциллятора номер n, $|s_z\rangle$ — собственное состояние оператора $\hat{S}_z$. Так как в гамильтониан $\hat{H}_D$ операторы $\hat{p}$, $\hat{q}$ и $\hat{S}_y$ входят либо квадратично либо в виде произведения $g\hat{p}\hat{S}_y$, соответствующие члены изменяют число возбуждения на 2 и сохраняют чётность состояния, то есть коммутируют с $\hat{\Pi}$. Оператор $\hat{S}_z$ также коммутирует с $\hat{\Pi}$. Таким образом, $[\hat{H}_D, \hat{\Pi}] = 0$ и чётность является сохраняющейся величиной.

Также оператор $\hat{\Pi}$ отражает импульс фотона и проекцию спина на ось y:

$$\begin{aligned} &\hat{\Pi}^\dagger\hat{p}\hat{\Pi} = -\hat{p} \\ &\hat{\Pi}^\dagger\hat{S}_y\hat{\Pi} = -\hat{S}_y, \end{aligned} \tag{1.22}$$

откуда опять следует, что $\hat{\Pi}^\dagger\hat{H}_D\hat{\Pi} = \hat{H}_D$. Так как $[\hat{H}_D, \hat{\Pi}] = 0$ при любых параметрах задачи (в особенности нас интересует константа связи), симметрия всегда сохраняется. Однако, как будет показано далее, в модели Дике возможен фазовый переход в силу спонтанного нарушения симметрии.

1.2.2. Фазовый переход в термодинамическом пределе

Нормальная фаза

В термодинамическом пределе $N \to \infty$ задача может быть решена аналитически [9]. Для этого перейдём от спиновых операторов $\hat{S}_i$ к бозонным операторам $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ с помощью преобразования Гольштейна–Примакова [24]:

$$\begin{aligned} &\hat{S}_z = \hat{S} - \hat{b}^\dagger\hat{b} \\ &\hat{S}_x = \sqrt{\frac{S}{2}}\left(\hat{b}^\dagger\sqrt{1-\frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}} + \sqrt{1-\frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}}\,\hat{b}\right) \approx \sqrt{\frac{S}{2}}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \\ &\hat{S}_y = i\sqrt{\frac{S}{2}}\left(\hat{b}^\dagger\sqrt{1-\frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}} - \sqrt{1-\frac{\hat{b}^\dagger\hat{b}}{2S}}\,\hat{b}\right) \approx i\sqrt{\frac{S}{2}}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Операторы $\hat{b}$, $\hat{b}^\dagger$ имеют бозонную статистику, то есть $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ и после разложения корня в термодинамическом пределе спин также представляется в виде квантового осциллятора. Оператор $\hat{S}_z$ приобретает смысл числа возбуждений осциллятора, а операторы $\hat{S}_x$ и $\hat{S}_y$ его координаты и импульса соответственно.

Тогда гамильтониан модели Дике сведётся к гамильтониану двух связанных осцилляторов:

$$\hat{H}_{\mathrm{D}}^{S\to\infty} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{g}{2}\sqrt{\omega S}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(\hat{b}^\dagger - \hat{b}) + \omega_0\hat{b}^\dagger\hat{b}. \tag{1.24}$$

Преобразованием Боголюбова его можно привести к гамильтониану двух независимых осцилляторов с частотами

$$\epsilon_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 8g^2\omega^2\omega_0 N}\right), \tag{1.25}$$

то есть к виду

$$\hat{H}_{\mathrm{D}}^{S\to\infty} = \epsilon_1\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1 + \epsilon_2\hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2 + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \omega_0\left(S + \frac{1}{2}\right), \tag{1.26}$$

где $\hat{c}_{1,2}$ — операторы "расцепленных" осцилляторов, полученных после преобразования Боголюбова. В основном состоянии гамильтониана $\langle\hat{p}\rangle = \langle\hat{S}_y\rangle = 0$, $\langle\hat{S}_z\rangle = S$, это нормальная фаза с ненарушенной симметрией. Частота ϵ_2 вещественна при

$$g < g_c = \sqrt{\frac{\omega_0}{2N}}, \tag{1.27}$$

что задаёт критическую константу связи, после которой нормальная фаза перестаёт существовать. Зависимость энергии ϵ_2 от константы связи представлена на рис. 1.2.

Сверхизлучательная фаза

В сверхизлучательной фазе импульс осциллятора и проекция спина на ось y имеют ненулевые средние значения в основном состоянии. Чтобы это описать сделаем сдвиг

$$\begin{aligned} \hat{a} &\to \hat{a} \pm i\sqrt{\alpha} \\ \hat{b} &\to \hat{b} \mp i\sqrt{\beta}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Два варианта выбора знака обусловлены чётностью задачи. Однако, фиксация знака приведёт к нарушению чётности. Таким образом, существуют два сверхизлучательных состояния, отличающихся друг от друга отражением знака средних значений импульса и проекции спина, см. уравнение (1.22).

После подстановки сдвинутых операторов в гамильтониан в нём возникнут линейные по α и β члены. Они равны нулю если

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} &= \pm gS\sqrt{\frac{2}{\omega}}\sqrt{1 - \frac{g_c^4}{g^4}} \\ \sqrt{\beta} &= \mp\sqrt{S\left(1 - \frac{g_c^4}{g^4}\right)}, \end{aligned} \tag{1.29}$$

что соответствует сверхизлучательной фазе, либо при $\alpha = \beta = 0$, что описывает нормальную фазу. Подставляя (1.29) в сдвиг (1.28) и определение $\hat{p}$ и $\hat{S}_y$ получим в сверхизлучательной фазе

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle &= gS\sqrt{1 - \frac{g_c^4}{g_4}} \\ \langle \hat{S}_y \rangle &= S\sqrt{1 - \frac{g_c^4}{g_4}}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Аналогично предыдущему параграфу, проводя преобразование Боголюбова, получим частоты осцилляторов

$$\tilde{\epsilon}_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \frac{g^4\omega_0^2}{g_c^4} \pm \sqrt{\left(\frac{g^4\omega_0^2}{g_c^4} - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\omega_0^2}\right). \tag{1.31}$$

Частота $\tilde{\epsilon}_2$ вещественна при $g > g_c$, а при $g = g_c$ равна ϵ_2: $\epsilon_2(g_c) = \tilde{\epsilon}_2(g_c) = 0$, см. рис. 1.2.

Фазовый переход

Таким образом, получено описание модели Дике в термодинамическом пределе в двух фазах. В нормальной фазе при константе связи ниже критической средние значения квантовых наблюдаемых равны нулю. Это согласуется с требованием чётности основного состояния, то есть его симметрии относительно отражения (1.22).

При константе связи выше критической, возникают два вырожденных основных состояния. В отдельно взятом основном состоянии симметрия нарушена, однако сами они симметричны друг относительно друга в смысле отражения (1.22), что сохраняет общую симметрию задачи. Отдельное основное состояние является сверхизлучательным, так как в нём возникают ненулевые средние значения операторов $\hat{p}$ и $\hat{S}_y$. В силу неустойчивости нормальной фазы, происходит спонтанное нарушение симметрии и система случайным образом выбирает одно из новых основных состояний. При этом в термодинамическом пределе сверхизлучательные состояния с нарушенной симметрией являются точно собственными состояниями гамильтониана.

Во время фазового перехода энергия осциллятора ϵ_2, полученная после преобразования Боголюбова, стремится к нулю и обращается в нуль при $g = g_c$. Затем возникает новая ветвь $\tilde{\epsilon}_2$ осциллятора сверхизлучательной фазы, см. рис. 1.2.

Сверхизлучательная фаза характеризуется возникновением макроскопического фотонного конденсата (отсюда и название). Его образование следует из уравнения (1.30): среднее значение импульса фотонного осциллятора пропорционально полному спину S и стремится к бесконечности в термодинамическом пределе. В свою очередь, среднее число фотонов в основном состоянии $\langle \hat{n} \rangle \sim \langle \hat{p} \rangle^2$, то есть также стремится к бесконечности.

Критическая константа связи (1.27) обратно пропорциональна полному спину S, то есть $g \to \infty$ в термодинамическом пределе пределе $S \to \infty$.

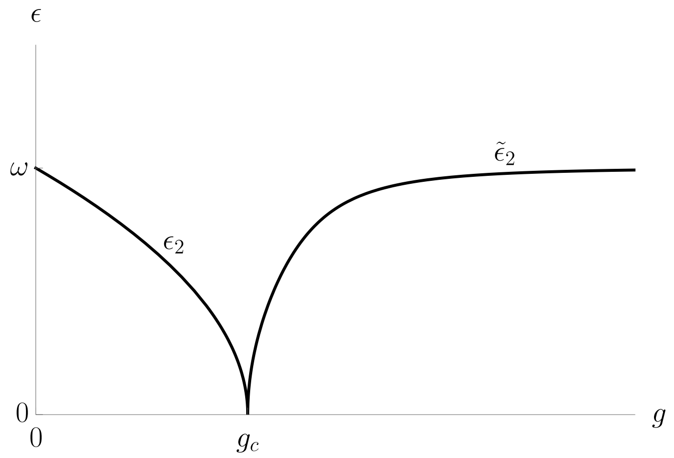


Рис. 1.2: Энергия боголюбовского осциллятора, полученного при диагонализации модели Дике в термодинамическом пределе, как функция от константы связи. Ветвь ϵ_2 обращается в нуль в точке $g = g_c$ и возникает новая сверхизлучательная ветвь $\tilde{\epsilon}_2$. График построен при $\omega = \omega_0$.

1.2.3. Динамика модели Дике

В работе [25] исследовалась квазиклассическая и квантовая динамика модели Дике. Авторы рассматривали различные значения полного спина S, сравнивая квантовую и классическую динамику для возрастающих значений полного спина. В квазиклассическом случае была исследована устойчивость системы квазиклассических уравнений движения. При константе связи меньше критической существует одна устойчивая стационарная точка, соответствующая нормальной фазе модели Дике. В сверхизлучательной фазе, когда константа связи становится больше критической, возникают две новые устойчивые стационарные точки, а предыдущая устойчивая точка превращается в неустойчивую. Квантовая динамика, как и решение квазиклассических уравнений движения, была получена численно. Сравнение показало, что при низких энергиях квантовые и квазиклассические траектории сходятся друг к другу, начиная с $S \sim 200$. При более высоких энергия такого совпадения нет, однако динамика функций Хусими продолжает напоминать квазиклассkическую динамику квантовых наблюдаемых.

В работе [26] рассматривалась квазиклассическая динамика открытой разбалансированной модели Дике, в которой константа связи различная для ковращающихся и контрвращающихся членов в гамильтониане. Авторами получены бифуркационные диаграммы и фазовые портреты для системы квазиклассических уравнений движения. Как и в предыдущей работе, показано, что в нормальной фазе система имеет одну устойчивую стационарную точку, а в сверхизлучательной — две устойчивые и одну неустойчивую.

1.3. Расширенная модель Дике

Расширенная модель Дике обобщает модель Дике на различные типы взаимодействия двухуровневых систем между собой [27–29]. В расширенной модели Дике к гамильтониану добавляется квадратичный по проекции полного спина член $\sim (1+\varepsilon)\hat{S}_y^2$. Гамильтониан модели есть

$$\hat{H}_{\text{ExD}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + ig\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^y + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^y\right)^2 - \omega_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^z. \tag{1.32}$$

Коэффициент ε в дополнительном члене описывает межспиновое взаимодействие, а знак коэффициента отвечает за тип взаимодействия. При $\varepsilon < 0$ взаимодействие притягивающее, при $\varepsilon > 0$ — отталкивающее. Если $\varepsilon = 0$ прямого взаимодействия между спинами нет и они взаимодействуют только через связь с резонатором. Сама же модель Дике описывает ферромагнитный тип взаимодействия с $\varepsilon = -1$.

Вновь вводя операторы суперспина и координаты, импульса фотона получим гамильтониан в форме

$$\hat{H}_{\text{ExD}} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}\hat{S}_y^2 - \omega_0 \hat{S}_z. \tag{1.33}$$

Гамильтониан $\hat{H}_{\text{ExD}}$ также коммутирует с оператором чётности (1.19), так как дополнительный член квадратичен по $\hat{S}_y$ и тоже увеличивает число возбуждений на 2.

Небходимость в расширенной модели Дике возникает при более аккуратном рассмотрении квантовой электродинамики в полости. В частности, если проквантовать задачу об ансамбле диполей, связанных с LC–резонатором, то в гамильтониане возникнет член [29]

$$\sim \sum_{ij} (1 + \mathcal{D}_{ij})\hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_j^x. \tag{1.34}$$

Здесь $\mathcal{D}_{ij}$ — коэффициент, отвечающий за характер взаимодействия между диполями, $\hat{\sigma}_i^x$ отвечает за переброс между двумя состояниями i–го диполя в приближении двухуровневой системы. Тогда расширенная модель Дике получается, если взаимодействие между диполями не зависит от номера диполя, то есть $\mathcal{D}_{ij} \sim \varepsilon$.

Интерес представляет случай $\varepsilon = 0$, то есть с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами, при котором проекция полного спина играет роль калибровочного сдвига импульса фотона. Связано это с калибровочным взаимодействием электромагнитного поля с двухуровневыми системами. Например, данная модель возникает при рассмотрении ансамбля джозефсоновских контактов в полости, которые связаны с полем через калибровочно–инвариантный сдвиг сверхпроводящей фазы [30]. Вопрос о существовании фазового перехода при $\varepsilon = 0$ был спорным [31–34], а в работах [27–29] данный случай не рассматривался. Кроме того, чётность гамильтониана сохраняется при всех значениях параметров для конечного полного спина [35–39], а значит существует закон сохранения, запрещающий, на первый взгляд, фазовый переход.

В работе [30] было показано существование фазового перехода в сверхизлучательное состояние при $\varepsilon = 0$ в термодинамическом пределе. Для этого было использовано повёрнутое представление Гольштейна–Примакова. Показано, что при малых значениях константы связи электромагнитного поля с двухуровневыми системами сверхизлучательная фаза метастабильна, а затем она становится стабильной при константе связи больше критической.

1.3.1. Критическая константа связи в термодинамическом пределе при $\varepsilon = 0$

Гамильтониан расширенной модели Дике при $\varepsilon = 0$ также может быть диагонализован в термодинамическом пределе [30]. Как и в главе 1.2.2 сделаем преобразование Гольштейна–Примакова (1.23), а затем преобразование Боголюбова. Получим гамильтониан двух несвязанных осцилляторов

$$\hat{H}_{\text{ExD}}^{S\to\infty} = -\omega_0\left(S + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_1\hat{c}_1^\dagger\hat{c} + \epsilon_2\hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2 \tag{1.35}$$

с частотами

$$\epsilon_{1,2}^2 = \omega^2 + \omega_0(\omega_0 + g^2S) \pm \sqrt{(\omega_0(\omega_0 + g^2S) - \omega^2)^2 + 4\omega^2g^2\omega_0S}. \tag{1.36}$$

Здесь $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ — операторы Боголюбова. В отличие от модели Дике, частоты осцилляторов вещественны при всех значениях константы связи g. Энергия основного состояния есть

$$E_0 = -\omega_0\left(S + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \approx -\omega_0\left(S + \frac{1}{2}\right) + \frac{g}{2}\sqrt{\omega_0S}. \tag{1.37}$$

Основное состояние устойчиво, пока его энергия имеет минимум при $S = N/2$ на отрезке $S \in [0, N/2]$. Решая уравнение $E_0(S = N/2) = E_0(S = 0) = \omega/2$ получим значение константы связи

$$\tilde{g} \approx 2\sqrt{\omega_0\frac{N}{2}} + (\omega_0 + \omega)\sqrt{\frac{2}{\omega_0N}}, \tag{1.38}$$

при которой минимум энергии переходит от $S = N/2$ к $S = 0$. Оно определяет область устойчивости нормальной фазы.

Чтобы описать сверхизлучательную фазу, в дополнение к сдвигу фотонному сдвигу $\hat{a} \to \hat{a} \pm i\sqrt{\alpha}$ сделаем поворот

$$\begin{aligned}\hat{S}_z &\to \hat{S}_z\cos\theta - \hat{S}_y\sin\theta\\ \hat{S}_y &\to \hat{S}_y\cos\theta + \hat{S}_z\sin\theta.\end{aligned} \tag{1.39}$$

В отличие от (1.28), спиновые операторы не сдвигаются подобно фотонным, а поворачиваются на угол θ в плоскости z–y. После подстановки сдвинутых фотонных операторов и повёрнутых спиновых в гамильтониан, в нём возникнут линейные по $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ и $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ члены. Из условия их равенства нулю получим

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{2\omega_0}{g^2}\\ \sqrt{\alpha} &= -\frac{gS}{\sqrt{\omega}}\sin\theta = -\frac{gS}{\sqrt{2\omega}}\sqrt{1 - \frac{4\omega_0^2}{g^4}}.\end{aligned} \tag{1.40}$$

Поворот спина приводит к возникновению фотонного конденсата $\langle\hat{p}\rangle \sim \sqrt{\alpha}$. Гамильтониан после преобразования Боголюбова:

$$\hat{\tilde{H}}_{\text{ExD}}^{S\to\infty} = -\frac{g^2\cos^2\theta}{2}\left(S + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2) + \tilde{\epsilon}_1\hat{d}_1^\dagger\hat{d}_1 + \tilde{\epsilon}_2\hat{d}_2^\dagger\hat{d}_2, \tag{1.41}$$

и частоты "расцепленных" осцилляторов:

$$\begin{aligned}2\tilde{\epsilon}_{1,2}^2 = \frac{g^4\cos^4\theta}{2}\left(S + \frac{1}{2}\right) + \omega^2 \pm\\ \pm\sqrt{\left[\frac{g^4\cos^4\theta}{2}\left(S + \frac{1}{2}\right) - \omega^2\right]^2 + 2S\omega^2g^4\cos^4\theta}.\end{aligned} \tag{1.42}$$

Энергия основного состояния в пределе большой константы связи:

$$E_0^{\text{sr}} = -\frac{g^2\cos^2\theta}{2}\left(S+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_1+\tilde{\epsilon}_2) \approx \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega_0^2}{g^2}\left(S+\frac{1}{2}\right). \tag{1.43}$$

Критическая константа связи находится из условия равенства энергии нормальной фазы E_0 и энергии сверхизлучательной фазы E_0^{sr}:

$$E_0(g_c) = E_0^{\text{sr}}(g_c) \Rightarrow g_c \approx 2\sqrt{\omega_0 S} + \frac{\omega}{\sqrt{\omega_0 S}}. \tag{1.44}$$

При $g > g_c$ энергия нормальной фазы становится выше энергии сверхизлучательной и происходит фазовый переход. Следует обратить внимание, что $g_c \sim \sqrt{S}$, а не $1/\sqrt{S}$, как для модели Дике. То есть, в термодинамическом пределе критическая константа связи стремится к бесконечности, а не к нулю.

Повёрнутое преобразование Гольштейна–Примакова в обыкновенной модели Дике

С помощью повёрнутого преобразования Гольштейна–Примакова можно найти фазовый переход в термодинамическом пределе и в обыкновенной модели Дике. Тогда в (1.29) корни будут равняться синусу угла сверхизлучательного поворота:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\frac{g_c^4}{g^4}}. \tag{1.45}$$

Этот же угол поворота возникнет при исследовании квазиклассической динамики модели Дике в главе 3.

1.3.2. Фазовый переход в термодинамическом пределе при $\varepsilon = 0$

Из вычислений в предыдущем параграфе следует, что в системе происходит сверхизлучательный фазовый переход первого рода. При константе связи $g < \tilde{g}$ существует только нормальная фаза с энергией E_0. Сверхизлучательная фаза возникает при $g > \sqrt{2\omega_0}$ (корень в (1.40) становится вещественным), но она метастабильна, так как её энергия больше энергии нормальной фазы. Фазовый переход происходит при g_c таком, что энергия нормальной фазы становится больше энергии сверхизлучательной. Зависимости энергии двух фаз от константы связи изображены на рис. 1.3.

Как и в обыкновенной модели Дике без квадратичного члена, в сверхизлучательной фазе происходит упорядочение двухуровневых систем, что выражается в росте связанной с импульсом фотонного осциллятора проекции суперспина на ось y. В свою очередь, это приводит к возникновению ненулевого среднего фотонного осциллятора, то есть возникновению макроскопического фотонного конденсата в полости, так как среднее число фотонов $\langle\hat{n}\rangle \sim \langle\hat{p}\rangle^2$.

Ключевых отличий от фазового перехода в обыкновенной модели Дике два: фазовый переход первого рода, а не второго, и критическая константа связи пропорциональна полному спину, а не обратно пропорциональна. Первое следует из того, что в момент фазового перехода уже существует метастабильная сверхизлучательная фаза.

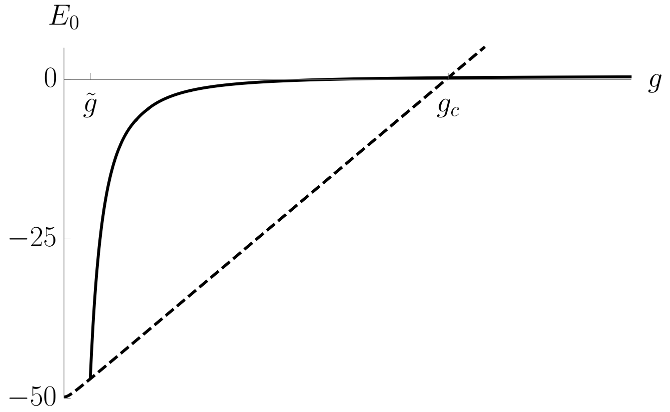


Рис. 1.3: Энергии сверхизлучательной (сплошная линия) и нормальной (пунктирная линия) фаз. Сверхизлучательная фаза возникает при $g = \tilde{g}$ и её энергия становится меньше энергии нормальной фазы при $g = g_c$. График построен при $\omega = \omega_0 = 1$, $S = 50$.

1.4. Расширенная модель Дике с $\varepsilon = 0$ при описании ансамбля джозефсоновских контактов в микроволновой полости

1.4.1. Гамильтониан джозефсоновского контакта в полости

Энергия джозефсоновского контакта складывается из ёмкостной энергии и туннельной энергии куперовских пар:

$$\hat{H}_{\text{JJ}} = E_C \hat{n}^2 + E_J \cos\hat{\phi}, \tag{1.46}$$

где E_C и E_J — зарядовая и туннельная энергии соответственно, $\hat{n}$ — оператор разности числа куперовских пар на берегах контакта, $\hat{\phi}$ — сверхпроводящая фаза контакта, $[\hat{\phi}, \hat{n}] = i$.

Взаимодействие с электромагнитной волной в полости осуществляется через калибровочно–инвариантный сдвиг фазы [40]. Представив векторный потенциал поля в виде $\hat{\mathbf{A}} = g\hat{q}$, где

$$g \sim \frac{l|e|}{\sqrt{V}}, \tag{1.47}$$

l – длина контакта, e — заряд электрона, V — объём полости, получим полный гамильтониан вместе с фотонным членом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2}{2} + E_C \hat{n}^2 + E_J \cos\left(\hat{\phi}_i - g\hat{q}\right). \tag{1.48}$$

1.4.2. Гамильтониан ансамбля джозефсоновских контактов в приближении $E_C > E_J$

Предполагая электромагнитное поле одинаковым для всех джозефсоновских контактов в ансамбле, что достигается либо при большой длине волны, либо при малом размере джозефсоновской подсистемы, гамильтониан N джозефсоновских контактов можно записать как [30]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2}{2} + E_C \sum_{i=1}^{N} \hat{n}_i^2 - E_J \sum_{i=1}^{N} \cos\left(\hat{\phi}_i - g\hat{q}\right). \tag{1.49}$$

Каноническим преобразованием

$$
\begin{aligned}
&\hat{\phi}_i \to \hat{\phi}_i - g\hat{q} \\
&\hat{p} \to \hat{p} + g\sum_{i=1}^{N} \hat{n}_i
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

его можно привести к виду

$$
\hat{H} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} - g\hat{p}\sum_{i=1}^{N} \hat{n}_i + \frac{g^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \hat{n}_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}(E_C \hat{n}_i^2 - E_J \cos\hat{\phi}_i). \tag{1.51}
$$

Если зарядовая энергия контактов больше туннельной, то можно ограничиться рассмотрением двух нижних энергетических состояний оператора $\hat{n}$ — $|n_i = \pm 1/2\rangle$ [41]. Тогда в этом базисе

$$
\begin{aligned}
\hat{n}_i &= \hat{\sigma}_i^z \\
\cos\hat{\phi}_i &= \hat{\sigma}_i^x
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

и гамильтониан есть

$$
\hat{H}_{E_C > E_J} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} - gp\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^z + \frac{g^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}^z\right)^2 - E_J \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^x. \tag{1.53}
$$

Член $\sim \hat{n}_i^2$ отброшен, как постоянная добавка к энергии. Чтобы прийти к нотации, используемой в работе, сделаем унитарное преобразование:

$$
\begin{aligned}
&\hat{U}^\dagger \hat{\sigma}^z \hat{U} = -\hat{\sigma}_y \\
&\hat{U}^\dagger \hat{\sigma}^y \hat{U} = -\hat{\sigma}_x \\
&\hat{U}^\dagger \hat{\sigma}^x \hat{U} = \hat{\sigma}_z \\
&\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

Тогда гамильтониан запишется в виде

$$
\hat{H}_{\text{ExD}}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\omega^2 \hat{q}^2}{2} + \frac{1}{2}(\hat{p} + g\hat{S}_y)^2 - E_J \hat{S}_z. \tag{1.55}
$$

Это и есть гамильтониан расширенной модели Дике с $\varepsilon = 0$ и $\omega_0 = E_J$. Примечательно, что в нём сохранилась калибровочная инвариантность исходной задачи. При $\omega_0 = 0$ энергия основного состояния не зависит от проекции спина на ось y, которая играет роль калибровочного сдвига импульса.

1.5. Когерентные состояния и функция Хусими

Для визуализации свойств основного состояния расширенной модели Дике в работе будут использоваться функции Хусими — квазираспределения вероятности положения системы в некотором фазовом пространстве. Функция Хусими квантового состояния в точке фазового пространства пропорциональна квадрату его интеграла перекрытия с когерентным состоянием в этой точке.

1.5.1. Когерентные состояния

Когерентными называются квантовые состояния, максимально приближённые к классическим. Это значит, что в когерентном состоянии минимальна неопределённость, то есть

$$\begin{gathered}\left\langle(\Delta\hat{x})^2\right\rangle\left\langle(\Delta\hat{p})^2\right\rangle=\frac{1}{4}\\(\Delta\hat{A})^2=\langle\hat{A}^2\rangle-\langle\hat{A}\rangle^2\end{gathered}\tag{1.56}$$

и квантовая динамика состояния приближена к соответствующей классической динамике.

Оператор сдвига

Покажем, что

$$e^{\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}f(x)=f(x+\alpha).\tag{1.57}$$

Для этого разложим в ряд экспоненту, а в качестве функции $f(x)$ возьмём степенную функцию x^m:

$$\begin{aligned}e^{\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}f(x)&=\sum_n\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^m=\\&=\sum_n\frac{m!}{(n-m)!n!}\alpha^nx^{m-n}=(x+\alpha)^m.\end{aligned}\tag{1.58}$$

Здесь была вычислена n–ая производная x^m и использовано биномиальное разложение скобки $(x+\alpha)^m$. Теперь для произвольной функции $f(x)$, представленной в виде ряда, получим

$$\begin{aligned}e^{\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}f(x)&=e^{\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}\sum_n c_nx^n=\\&=\sum_n c_n(x+\alpha)^n=f(x+\alpha).\end{aligned}\tag{1.59}$$

Оператор сдвига осциллятора

Оператор сдвига волновой функции $|n\rangle$ квантового осциллятора есть

$$\hat{D}_\alpha=e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}},\tag{1.60}$$

где α — комплексное число. Его смысл более ясен при записи через операторы координаты и импульса

$$\begin{aligned}\hat{q}&=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}^\dagger+\hat{a})\\\hat{p}&=i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger-\hat{a}).\end{aligned}\tag{1.61}$$

Тогда

$$\hat{D}_\alpha=\exp\left\{i\sqrt{2\omega}\hat{q}\,\mathrm{Im}\,\alpha-i\sqrt{\frac{2}{\omega}}\hat{p}\,\mathrm{Re}\,\alpha\right\}.\tag{1.62}$$

Операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ являются дифференциальными, то есть для волновой функции $\psi(q,p)$

$$\begin{aligned} \hat{q}\psi(q,p) &= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\psi(q,p) \\ \hat{p}\psi(q,p) &= -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\psi(q,p). \end{aligned} \tag{1.63}$$

После подстановки в (1.62) и с учётом предыдущего параграфа видно, что оператор сдвигает импульс осциллятора на $\sqrt{2\omega}\,\mathrm{Im}\,\alpha$, а координату на $\sqrt{2/\omega}\,\mathrm{Re}\,\alpha$.

Когерентное состояние осциллятора

Когерентное состояние квантового осциллятора $|\alpha\rangle$ [42] это состояние с минимальной квантовой неопределённостью. Одним из таких состояний является основное состояние $|0\rangle$, но не единственным. Минимальность неопределённости следует из того, что $\hat{a}\,|0\rangle = 0\,|0\rangle$, то есть из того, что $|0\rangle$ — собственное состояние оператора $\hat{a}$. Чтобы увидеть это вычислим дисперсию координаты и импульса осциллятора в состоянии $|n\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{p}^2|n\rangle &= -\frac{\omega}{2}\,\langle n|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2|n\rangle = \\ &= -\frac{\omega}{2}\,\langle n|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n\rangle = -\frac{\omega}{2}(2n+1) \\ \langle n|\hat{q}^2|n\rangle &= \frac{1}{2\omega}\,\langle n|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2|n\rangle = \\ &= \frac{1}{2\omega}\,\langle n|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n\rangle = \frac{1}{2\omega}(2n+1) \\ \langle n|\hat{p}|n\rangle &= \langle n|\hat{q}|n\rangle = 0. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Отсюда следует, что для состояния $|n\rangle$ квантовая неопределённость есть $\langle(\Delta\hat{q}^2)\rangle\,\langle(\Delta\hat{p}^2)\rangle = (2n+1)/4$ и только при $n=0$ неопределённость принимает минимальное значение равное $1/4$. Последнее напрямую связано с тем, что $\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$, что в свою очередь следует из $\hat{a}\,|0\rangle = 0\,|0\rangle$.

Будем тогда искать когерентные состояния как собственные вектора $\hat{a}$:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,. \tag{1.65}$$

Когерентные состояния можно получать, действуя оператором сдвига на основное состояние осциллятора, то есть

$$|\alpha\rangle = \hat{D}_\alpha\,|0\rangle\,. \tag{1.66}$$

Покажем это, разложив когерентное состояние в базисе собственных состояний осциллятора:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n c_n(\alpha)\,|n\rangle \\ \hat{a}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\,|n\rangle &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\,|n\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.67}$$

В левой части уравнения подействуем оператором уничтожения на состояние $|n\rangle$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha)\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1}\,|n\rangle = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)\,|n\rangle\,. \tag{1.68}$$

Приравнивая коэффициенты в сумме получим рекуррентное уравнение

$$c_{n+1}(\alpha)\sqrt{n+1} = \alpha c_n(\alpha). \tag{1.69}$$

Его решение

$$c_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0(\alpha). \tag{1.70}$$

Из условия нормировки выберем начальное условие

$$c_0(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}, \tag{1.71}$$

тогда получим окончательно

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} |0\rangle . \tag{1.72}$$

Средние значения координаты и импульса в когерентном состоянии есть

$$\begin{aligned} \langle \hat{q} \rangle &= \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha \\ \langle \hat{p} \rangle &= \sqrt{2m\omega} \operatorname{Im} \alpha. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Оператор поворота и когерентное состояние спина

По аналогии с осциллятором можно ввести когерентные состояние спина [43, 44]. Если когерентное состояние осциллятора это сдвинутое основное состояние, то когерентное состояния спина — повёрнутое. Для спиновых операторов $\hat{S}_{x,y,z}$ можно ввести операторы рождения и уничтожения, действующие на собственные состояния $|s_z\rangle$ оператора $\hat{S}_z$:

$$\begin{aligned} &\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm \hat{S}_y \\ &\hat{S}_\pm |s_z\rangle = \sqrt{S(S+1) - s_z(s_z \pm 1)}\, |s_z \pm 1\rangle . \end{aligned} \tag{1.74}$$

Роль основного состояния осциллятора играет состояние $|s_z = S\rangle$, а роль оператора сдвига оператор поворота

$$\begin{aligned} &\hat{R}(\theta, \phi) = e^{\zeta \hat{S}_+ + \zeta^* \hat{S}_-} \\ &\zeta = -\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Здесь θ и ϕ азимутальный и полярный угол соответственно. Оператор поворота можно записать в виде

$$\hat{R}(\theta, \phi) = \exp\left\{ i\theta(\hat{S}_x \sin\phi - \hat{S}_y \cos\phi) \right\}. \tag{1.76}$$

Когерентное состояние спина получается его действием на состояние $|s_z = S\rangle$:

$$|\theta, \phi\rangle = \hat{R}(\theta, \phi)\, |s_z = S\rangle . \tag{1.77}$$

Запись оператора в виде (1.76) имеет прозрачный физический смысл. Подобно тому, как импульс является генератором трансляций в реальном пространстве, а координата — генератором трансляций в импульсном пространстве, спиновые операторы являются генераторами поворота вокруг соответствующих осей. То есть, оператор описывает поворот на полярный угол ϕ и азимутальный угол θ.

1.5.2. Функция Хусими

Состояние квантовой системы можно описывать с помощью различных квазираспределений. В отличие от распределения вероятности, для квазираспределения не выполняются определённые аксиомы теории вероятности: квазираспределение может принимать отрицательные значения и не пересекающиеся участки области определения не соответствуют взаимоисключающим состояниям.

В работе мы будем пользоваться квазираспределением Хусими [45], которое для системы в состоянии $|\psi\rangle$ определяется как

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}|\langle\alpha|\psi\rangle|^2, \tag{1.78}$$

где $|\alpha\rangle$ — когерентное состояние. Функция Хусими $Q(\alpha)$ является неотрицательной и нормированной, то есть

$$\int Q(\alpha)\mathrm{d}\alpha^2 = 1. \tag{1.79}$$

Однако, в силу неортогональности когерентных состояний, не выполняется аксиома о взаимоисключающих состояниях. Если при интегрировании функции Хусими по области V в фазовом пространстве была получена некоторая "вероятность" P нахождения системы в V, то вероятность нахождения системы вне V не равняется $1 - P$.

Из определения видно, что функция Хусими $Q(\alpha)$ состояния $|\psi\rangle$ пропорциональна квадрату интеграла перекрытия состояния с когерентным $|\alpha\rangle$. Если система находится в смешанном состоянии и описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, то

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\left\langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\right\rangle. \tag{1.80}$$

Функция Хусими когерентного состояния осциллятора в координатах q, p это гауссиана, смещённая на $\langle\hat{q}\rangle$ и $\langle\hat{p}\rangle$:

$$Q(q,p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(p-\langle\hat{p}\rangle)^2}{4\omega}}e^{-\frac{\omega(q-\langle\hat{q}\rangle)^2}{2}}. \tag{1.81}$$

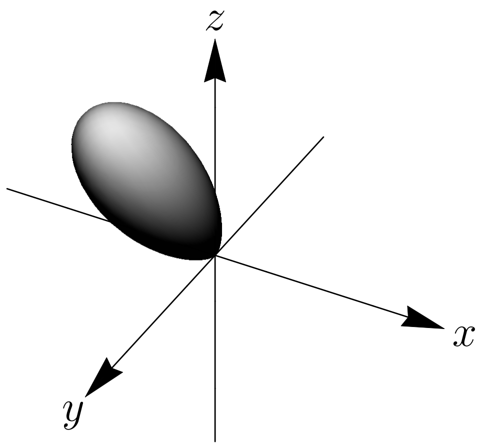
Для когерентного состояния спина $|\theta,\phi\rangle$ функция Хусими даётся выражением

$$Q(\theta',\phi') = \frac{1}{\pi}|\langle\theta',\phi'|\theta,\phi\rangle|^2 = \frac{1}{\pi}\left|\left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{i(\phi'-\phi)}\right)^{2S}\right|^2. \tag{1.82}$$

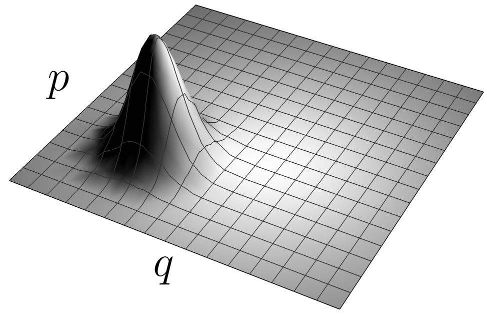
В осях x, y, z функция $Q(\theta',\phi')$ представляет собой узкую (чем больше полный спин S, тем уже) фигуру, ориентированную вдоль направления $\{\theta,\phi\}$. Графики функций Хусими когерентных состояний спина и фотона построены на рис. 1.4.

1.5.3. Вычисление функций Хусими в расширенной модели Дике

В расширенной модели Дике существуют две подсистемы: спиновая и фотонная. Математически это значит, что фотонные операторы принадлежат одному гильбертову пространству (будем называть его фотонным), а спиновые — другому (спиновому): $\{\hat{q},\hat{p}\} \in \mathcal{H}_{\mathrm{Ph}}$, $\{\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z\} \in \mathcal{H}_{\mathrm{S}}$. Для вычисления функций Хусими удобно перейти от описания квантового состояния волновой



а)



б)

Рис. 1.4: Функции Хусими когерентного состояния спина (а) и осциллятора (б)

функцией к описанию матрицей плотности. Если система находится в состоянии $|\psi\rangle$, то его матрица плотности есть $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Она принадлежит пространству $\mathcal{H}_{\mathrm{Ph}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{S}}$, то есть гильбертовому произведению фотонного и спинового пространств. Чтобы построить функцию Хусими одной из подсистем необходимо взять частичный след по пространству второй, тогда получим редуцированные матрицы плотности

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\mathrm{Ph}} &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}\, \hat{\rho} = \sum_{s_z=-S}^{S} \langle s_z|\hat{\rho}|s_z\rangle \\ \hat{\rho}_{\mathrm{S}} &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ph}}\, \hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\hat{\rho}|n\rangle\,. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Вычисление частичного следа происходит следующим образом: при записи матриц будем нумеровать столбцы и строки в соответствии базисным состояниям $|0,-S\rangle\,, \ldots, |0,S\rangle$, $|1,-S\rangle\,, \ldots, |1,S\rangle\,, \ldots$, тогда матрица будет разбита на блоки размером $2S+1$. Диагональные блоки соответствуют различным состояниям спина при фиксированном состоянии фотона, а внедиагональные — переходам между ними. Вычисление частичного следа по фотонной подсистеме в таком случае означает суммирование диагональных блоков, в результате чего получится матрица размера $2S+1$. А частичный след по спиновой подсистеме сведётся к замене каждого блока его следом, что даст матрицу размера $\mathcal{N} \to \infty$ (размерности пространства $\mathcal{H}_{\mathrm{Ph}}$):

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}\, \hat{\rho} &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}} \begin{pmatrix} [\rho^{00}]_{-S\ldots S} & [\rho^{01}]_{-S\ldots S} & \cdots \\ [\rho^{01}]_{-S\ldots S} & [\rho^{11}]_{-S\ldots S} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}[\rho^{00}]_{-S\ldots S} & \mathrm{Tr}[\rho^{01}]_{-S\ldots S} & \cdots \\ \mathrm{Tr}[\rho^{01}]_{-S\ldots S} & \mathrm{Tr}[\rho^{11}]_{-S\ldots S} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ph}}\, \hat{\rho} &= [\rho^{00}]_{-S\ldots S} + [\rho^{11}]_{-S\ldots S} + \ldots + [\rho^{\mathcal{N}\mathcal{N}}]_{-S\ldots S}. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Зная редуцированные матрицы плотности можно вычислить функции Хусими каждой подсистемы согласно формуле (1.80), взяв в качестве когерентных состояний $|\alpha\rangle$ когерентные состояния фотонного осциллятора или спина.

1.6. Флюксоны в цепочках параллельных джозефсоновских контактов

Магнитные флюксоны являются одним из видов топологических солитонов [46]. Флюксоны возникают в низкоразмерных сверхпроводящих системах, например в длинных джозефсоновских контактах и двумерных массивах джозефсоновских контактов [47, 48], и представляют собой вихри сверхпроводящего тока, содержащие один квант магнитного потока Φ_0. Солитоны это стабильные пространственные структуры в нелинейных средах [49]. Они возникают в различных оптических, твердотельных, химических и биологических системах [50, 51].

В ряде работ были предсказаны теоретически и исследованы экспериментально магнитные флюксоны в массивах параллельных джозефсоновских контактов: вызванные постоянным током резонансы [47], релятивистская динамика флюксона [48], группировка флюксонов [52], излучение движущимся флюксоном излучения Черенкова [53], вызванные переменным током динамичные метастабильные состояния [54].

Макроскопическая квантовая динамика была исследована теоретически в работе [55] и экспериментально в работе [56]. Также, в работах [57–60] теоретически исследовали макроскопическое квантовое туннелирование и квантование уровней одиночного магнитного флюксона. В работе [61] эти эффекты наблюдались экспериментально. Однако, во всех перечисленных статьях размер флюксона значительно превышал размер ячейки массива. Когерентная квантовая динамика, возможная при сжатии флюксона до размера ячейки джозефсоновского массива, ранее не изучалась.

1.7. Модель Френкеля–Конторовой

Модель Френкеля–Конторовой [62] встречается при описании нелинейных явлений в физике, например распространении волн зарядовой плотности, движении доменных стенок в магнитных структурах, дислокаций и т.д. В диссертации модель Френкеля–Конторовой будет использована применительно ко флюксону в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов.

Модель описывает классическую цепочку атомов, которые находятся в периодическом потенциале и при этом взаимодействие в цепочке происходит между ближайшими соседями. Гамильтониан записывается как

$$H_{\text{FK}} = \sum_n \frac{m\dot{x}_n^2}{2} + \frac{U}{2}\sum_n \left[1 - \cos\frac{2\pi x_n}{a}\right] + \frac{g}{2}\sum_n (x_{n+1} - x_n - a_0)^2, \tag{1.85}$$

где x_n — координата n–го атома, U — амплитуда периодического потенциала, a — период периодического потенциала, a_0 — равновесное расстояние между соседними атомами в цепочке, g — константа связи между атомами. Далее будем рассматривать случай $a_0 = a$, то есть периоды потенциала и цепочки совпадают, в каждом минимуме потенциала находится один атом. Удобно записать гамильтониан, обезразмерив переменные, то есть сделав преобразование

$$\begin{aligned} x_n &\to \frac{2\pi}{a}x_n \\ t &\to \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{U}{2m}}t \\ g &\to \frac{\pi^2 a^2}{2U}g. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Тогда гамильтониан преобразуется как

$$H_{\text{FK}} \to \sum_n \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} + (1 - \cos x_n) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n - a)^2 \right\}. \tag{1.87}$$

Отсюда получим уравнения движения:

$$\ddot{x}_n + \sin x_n - g(x_{n+1} - x_{n-1} - 2x_n) = 0. \tag{1.88}$$

1.7.1. Непрерывный предел

В работе [63] предложен метод перехода от дискретных уравнений движения к непрерывным. Для этого уравнения движения запишем в общем виде

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_i = F_{\text{int}}(u_n - u_{n-1} + a) - F_{\text{int}}(u_{n+1} - u_n + a) + F_{\text{p}}(u_n) \\ &F_{\text{int}}(u) = -\frac{\mathrm{d}U_{\text{int}}(u)}{\mathrm{d}u} \\ &F_{\text{p}}(u) = -\frac{\mathrm{d}U_{\text{p}}(u)}{\mathrm{d}u}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Здесь u_n — смещение n–го атома, то есть $x_n = na + u_n$, $U_{\text{p}}(u)$ — периодический потенциал (произвольный) и $U_{\text{int}}(u)$ — потенциал взаимодействия между атомами (тоже произвольный). Теперь введём относительные длины связей $v_n = (x_n - x_{n-1})/a$, тогда

$$\begin{aligned} a\ddot{v}_n = &-F_{\text{int}}(a + av_{n+1}) - F_{\text{int}}(a + av_{n-1}) + 2F_{\text{int}}(a + av_n) + \\ &+ F_{\text{sub}}(v_n) - F_{\text{sub}}(v_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.90}$$

Рассматривая v_n как непрерывные функции n и раскладывая функцию v_{n+1} в окрестности v_n получим уравнение синус–Гордона с правой частью (потенциалы U_{int} и U_{p} необходимо подставить соответствующие модели Френкеля–Конторовой):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\sqrt{g}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = \frac{a^2}{12}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x \partial^2 t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sin u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos u\right]. \tag{1.91}$$

Кинки в непрерывном пределе

Правая часть уравнения (1.91) возникает при учёте дискретности задачи. Если ей пренебречь полностью, то получим невозмущённое уравнение синус–Гордона (также перенормируем $x \to x/(a\sqrt{g})$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0. \tag{1.92}$$

Оно хорошо исследовано и известны различные солитонные решения. Нас интересует одиночный солитон – кинк. Это решение, связывающее два вырожденных минимума периодического потенциала:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctan}\,\mathrm{exp}\left(-\frac{\sigma(x-vt)}{1-v^2/c^2}\right), \tag{1.93}$$

где v — скорость движения кинка, c — предельная скорость движения кинка (возникает благодаря Лоренц–инвариантности уравнения), $\sigma = \pm 1$ — топологический заряд кинка. Кинк с $\sigma = -1$ называется антикинком. На рис. 1.5 изображены кинк и антикинк с $v = 0$.

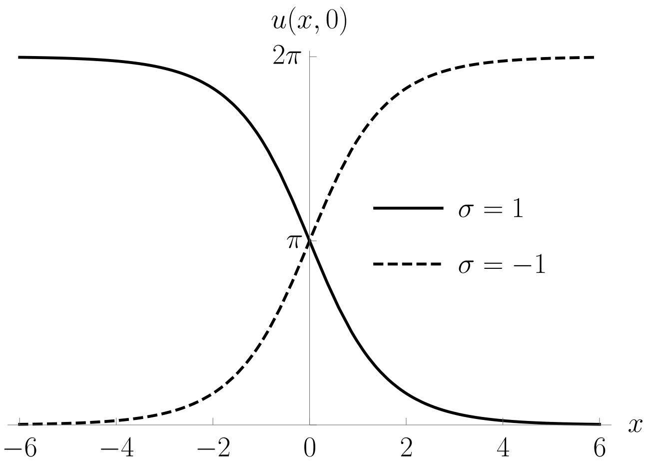


Рис. 1.5: Кинк (сплошная линия) и антикинк (пунктирная линия) с нулевой скоростью v в начальный момент времени $t = 0$.

1.7.2. Кинк в дискретной модели

Дискретность модели вносит поправки в солитонное решение. Кинк в непрерывном пределе может перемещаться вдоль цепочки "бесплатно", то есть ему не нужно преодолевать потенциальный барьер. Это связано с трансляционной инвариантностью задачи. В дискретной же модели трансляционная инвариантность нарушена, существует только инвариантность относительно трансляций на период потенциала a. Как следствие, движение кинка можно представить как движение в эффективном периодическом потенциале — потенциале Пайерлса–Набарро. Высота потенциального барьера называется энергией Пайерлса–Набарро. В диссертации будет получен потенциал Пайерлса–Набарро для флюксона в параллельном массиве джозефсоновских контактов и будет исследована квантовая динамика в нём.

Глава 2

Исследование расширенной модели Дике

2.1. Эффективный потенциал

Для исследования гамильтониана (1.33) будем использовать метод эффективного потенциала в адиабатическом приближении Борна–Оппенгеймера [29,64,65]. Рассмотрим приближение быстрой и медленной подсистем, считая фотонную подсистему медленной, а спиновую быстрой. Тогда спиновую часть гамильтониана можно диагонализовать, считая оператор $\hat{p}$ числом. После этого подставим нижний уровень энергии, как функцию от p, в исходный гамильтониан. Гамильтониан тогда сведётся к гамильтониану частицы в потенциале, образованном нижним уровнем энергии его спиновой части. Конфигурация локальных минимумов эффективного потенциала при различных значениях параметров задачи отражает свойства основного состояния системы.

2.1.1. Предел $g = 0$

При нулевой константе связи гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_{\text{ExD}} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} - \omega_0 \hat{S}_z. \tag{2.1}$$

Собственные значения его спиновой части меняются от $-S$ до S. Энергия спиновой части минимальна при $\langle \hat{S}_z \rangle = S$ и эффективный гамильтониан это просто гамильтониан осциллятора с потенциальной энергией, смещённой на $-\omega_0 S$:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} - \omega_0 S. \tag{2.2}$$

В основном состоянии $\langle \hat{p} \rangle = 0$ и $\langle \hat{S}_y \rangle = 0$, система находится в нормальной фазе с нулевыми квантовомеханическими средними. Эффективный потенциал $p^2/2 - \omega_0 S$ имеет единственный минимум в нуле. С ростом константы связи потенциал будет деформироваться, отклоняясь от параболической формы, и, как показано в следующем параграфе, образуются новые минимумы.

2.1.2. Предел большой константы связи

В пределе большой константы связи член $-\omega_0\hat{S}_z$ является возмущением к гамильтониану

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}\hat{S}_y^2. \tag{2.3}$$

Оператор $\hat{S}_y$ сохраняется, поэтому можно заменить его собственным значением s_y таким, что $\hat{S}_y\left|s_y\right\rangle = s_y\left|s_y\right\rangle$. Если считать член $\sim q^2$ кинетический энергией, то гамильтониан описывает движение частицы в параболическом потенциале

$$\begin{aligned} U(p)_{s_y} &= \frac{p^2}{2} + gps_y + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}s_y^2 = \\ &= \frac{1}{2}(p+gs_y)^2 + \varepsilon\frac{g^2}{2}s_y^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Два соседних потенциала $U(p)_{s_y}$ и $U(p)_{s_y\pm1}$ равны при $p = \pm gs_y/2$. Так как возмущение $-\omega_0\hat{S}_z$ имеет матричный элемент между состояниями $\left|s_y\right\rangle$ и $\left|s_y\pm1\right\rangle$, вырождение будет снято и спектр приобретёт зонную структуру, см. рис. 2.1.

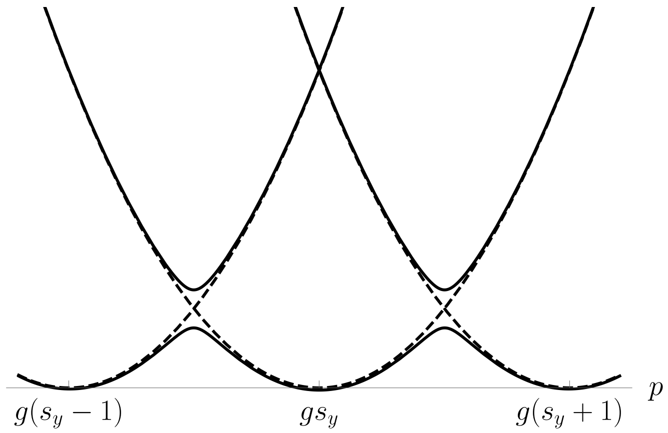
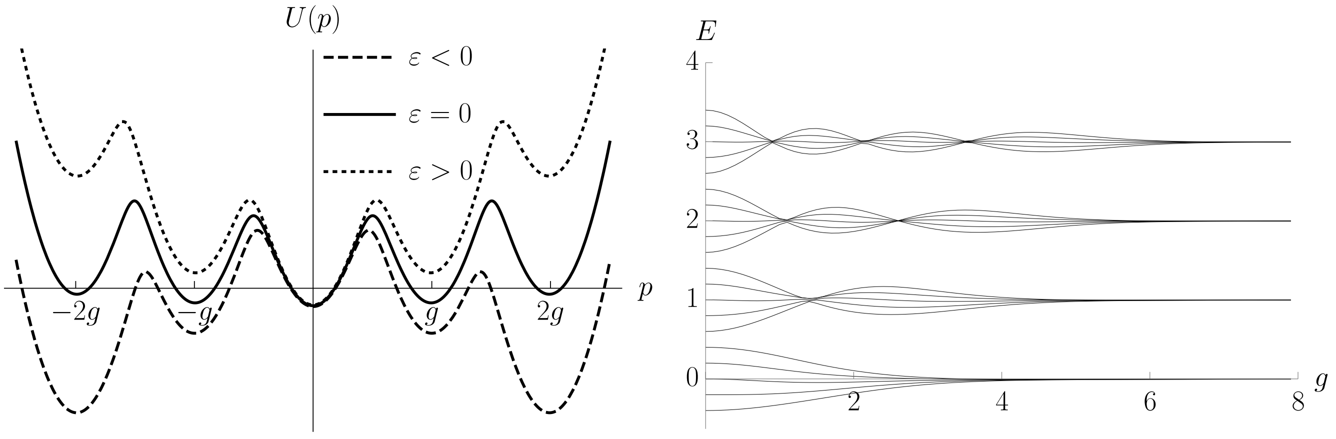


Рис. 2.1: Образование зонной структуры (сплошные линии) в результате снятия вырождения между невозмущёнными потенциалами $U(p)_{s_y}$ и $U(p)_{s_y\pm1}$ (пунктирные линии)

Минимум потенциала $U(p)_{s_y}$ находится при $p = gs_y$ и s_y принимает $2S+1$ значений от $-S$ до S. Таким образом сформируется многоямный потенциал с $2S+1$ ямами и минимумами при $p = gs_y$. Высота минимума, как функция от s_y, зависит от ω_0 и знака ε. Член $-\omega_0\hat{S}_z$ понижает энергию состояний с малыми значениями s_y, так как они соответствуют большим проекциям спина на ось z. Поэтому при $\varepsilon = 0$, хотя и положение минимума $U(p)_{s_y}$ не зависит от s_y, центральные минимумы будут ниже крайних. Эффективный потенциал при больших g для $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon = 0$ построен на рис. 2.2.

С помощью полученного эффективного потенциала удобно описывать состояния системы, как положения частицы в нём. Наглядно видна связь между проекцией спина на ось y и импульсом осциллятора: значение s_y выбирает минимум потенциала, а импульс осциллятора тогда равен gs_y. Также, структура эффективного потенциала соответствует симметрии гамильтониана, а именно, потенциал является чётной функцией p и отражение $s_y \to -s_y$ приводит к отражению знака p.



а) б)

Рис. 2.2: а) Эффективный потенциал при большой константе связи $g \gg \sqrt{\omega_0}$. б) Спектр расширенной модели Дике при $\varepsilon = 0$, как функция от константы связи g. Уровни энергии сгруппированы в косы, содержащие $2S + 1$ уровней (график построен при $S = 2$, так что в одной косе 5 уровней). Уровни в косе соответствуют уровням энергии в ямах эффективного потенциала, т.е. первая коса состоит из уровня $n = 0$ в каждой яме, вторая — уровня $n = 1$ и т.д. С ростом константы связи ямы выравниваются и уровни энергии в косе сближаются.

2.2. Спонтанное нарушение симметрии в пределе бесконечной константы связи

В пределе бесконечной константы связи достаточно просто описать фазовый переход вследствие спонтанного нарушения симметрии. Далее в работе будет исследован фазовый переход с учётом члена $-\omega_0 \hat{S}_z$, а пока в пределе $g \to \infty$ пренебрежём им и добавим к гамильтониану малый нарушающий симметрию член $\alpha\hat{p}$:

$$\hat{H}^{\alpha}_{\text{ExD}} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}\hat{S}_y^2 + \alpha\hat{p}. \tag{2.5}$$

2.2.1. Волновые функции в пределе бесконечной константы связи

Собственные функции и собственные значения гамильтониана $\hat{H}^{\alpha}_{\text{ExD}}$ с нарушенной симметрией есть

$$\begin{gathered} \left|\psi^{\alpha}_{n,s_y}\right\rangle = \left|n_{gs_y+\alpha}, s_y\right\rangle \\ E^{\alpha}_{n,s_y} = \omega n - g\alpha s_y + \frac{\varepsilon g^2}{2} s_y^2 - \frac{\alpha^2}{2}, \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\left|n_{gs_y+\alpha}\right\rangle$ обозначает n–ое состояние осциллятора, сдвинутое на $gs_y + \alpha$ вдоль оси p.

Чтобы это увидеть, выделим в гамильтониане полный квадрат и запишем его как

$$\hat{H}^{\alpha}_{\text{ExD}} = \frac{\omega^2\hat{q}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\hat{p} + g\hat{S}_y + \alpha\right)^2 + \varepsilon\frac{g^2}{2}\hat{S}_y^2 - \frac{\alpha^2}{2}. \tag{2.7}$$

Так как гамильтониан коммутирует с оператором $\hat{S}_y$ заменим его собственным значением s_y. В результате получим гамильтониан квантового осциллятора в потенциале, сдвинутом на $gs_y + \alpha$ и с добавкой $(\varepsilon g^2 s_y^2 - \alpha^2)/2$. Отсюда следует (2.6). В картине эффективного потенциала волновые функции $\left|\psi_{n,s_y}^{\alpha}\right\rangle$ соответствуют n–ому уровню энергии осциллятора в яме под номером s_y.

При равенстве параметра α нулю волновые функции $\left|\psi_{n,s_y}^{\alpha}\right\rangle$ также должны быть собственными функциями оператора чётности $\hat{\Pi}$, так как гамильтониан $\hat{H}_{\text{ExD}}^{0} = \hat{H}_{\text{ExD}}$ имеет соответствующую симметрию. Однако

$$\hat{\Pi}\left|\psi_{n,s_y}^{\alpha}\right\rangle = (-1)^n \left|\psi_{n,-s_y}^{-\alpha}\right\rangle, \tag{2.8}$$

то есть оператор чётности перебрасывает из ямы s_y в яму $-s_y$. Поэтому правильной симметричной волновой функцией будет [66]

$$\left|\psi_{n,s_y}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{s_y,0})}}\left(\left|n_{gs_y}, s_y\right\rangle + (-1)^n \left|n_{-gs_y}, -s_y\right\rangle\right). \tag{2.9}$$

Эта волновая функция является суперпозицией состояний в симметричных ямах $\pm s_y$ и, как легко проверить, является также собственной функцией оператора $\hat{\Pi}$.

2.2.2. Основное состояние в пределе бесконечной константы связи

Основное состояние гамильтониана определяется минимизацией энергии (2.6) по n и s_y. Первое даёт $n = 0$ в основном состоянии, остаётся минимизировать функцию

$$E_{0,s_y} = -g\alpha s_y + \frac{\varepsilon g^2}{2} s_y^2 - \frac{\alpha^2}{2}. \tag{2.10}$$

Она имеет экстремум при

$$s_y^{ex} = \frac{\alpha}{g\varepsilon}, \tag{2.11}$$

который является минимумом при $\varepsilon > 0$ (эффективный потенциал изогнут вверх) и максимумом при $\varepsilon < 0$ (эффективный потенциал изогнут вниз). В последнем случае энергия минимальна при $s_y = S$. Если $\varepsilon = 0$, то E_{0,s_y} линейно зависит от s_y и минимум достигается также при $s_y = S$.

Таким образом, при $\varepsilon \leqslant 0$ основное состояние гамильтониана $\hat{H}_{\text{ExD}}^{\alpha}$ есть $|\psi_{0,S}^{\alpha}\rangle$. Так как α полагается малым, а s_y принимает дискретные значения, значение s_y^{ex} следует округлить до минимально возможной проекции спина на ось y. Это 0 для целого спина и $1/2$ для полуцелого, тогда при $\varepsilon > 0$ основное состояния — $\left|\psi_{0,0}^{\alpha}\right\rangle$ или $|\psi_{0,\frac{1}{2}}^{\alpha}\rangle$ в зависимости от чётности спина. Симметричные волновые функции $|\psi_{0,S}\rangle$ и $|\psi_{0,0}\rangle\,/|\psi_{0,\frac{1}{2}}\rangle$ при $\alpha = 0$ конструируются как описано в предыдущем параграфе, уравнение (2.6).

Сверхизлучательное состояние

В сверхизлучательном состоянии модуль проекции спина на ось y максимален, то есть $\left|\langle\hat{S}_y\rangle\right| = S$, модуль среднего значения импульса фотонного осциллятора при этом есть $|\langle\hat{p}\rangle| = gS$. То есть, система находится в одной из крайних ям эффективного потенциала и волновая функция основного состояния есть $\left|\psi_{0,S}^{\alpha}\right\rangle = |0_{gS}, S\rangle$. Как следует из предыдущего параграфа, сверхизлучательная фаза возникает при $\varepsilon \leqslant 0$.

Субизлучательное состояние

В субизлучательном состоянии, напротив, проекция спина на ось y минимальна и равна $1/2$ для полуцелого спина или 0 для целого. Соответственно, $\langle \hat{p} \rangle = 0$ в первом случае и $\langle \hat{p} \rangle = g/2$ во втором. Возникает субизлучательная фаза при $\varepsilon > 0$.

2.2.3. Некоммутирующие пределы

Рассмотрим пределы стремления константы связи к бесконечности и внешнего возмущения к нулю, последовательно применённые к основному состоянию $|\phi\rangle$ в разном порядке.

Если внешнее возмущение отсутствует, то волновая функция должна сохранять симметрию при любых значениях константы связи, то есть

$$\lim_{g\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}|\phi\rangle = \begin{cases} |\psi_{0,S}\rangle\,, & \varepsilon \leqslant 0 \\ |\psi_{0,0}\rangle\,/|\psi_{0,\frac{1}{2}}\rangle, & \varepsilon > 0 \end{cases}. \tag{2.12}$$

Если же симметрия нарушена, то

$$\lim_{g\to\infty}|\phi\rangle = \begin{cases} \left|\psi^{\alpha}_{0,S}\right\rangle, & \varepsilon \leqslant 0 \\ \left|\psi^{\alpha}_{0,0}\right\rangle/|\psi^{\alpha}_{0,\frac{1}{2}}\rangle, & \varepsilon > 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

Теперь при стремлении возмущения к нулю симметричное состояние может быть восстановлено за счёт туннелирования между ямами эффективного потенциала. Вероятность туннелирования зависит от формы потенциала, в частности, она экспоненциально убывает с расстоянием между ямами. Так как симметричные минимумы находятся при $p = \pm g s_y$, при бесконечной константе связи расстояние между ними также бесконечно. Тогда

$$\lim_{\alpha\to 0}\lim_{g\to\infty}|\phi\rangle = \begin{cases} \left|\psi^{\alpha}_{0,S}\right\rangle, & \varepsilon \leqslant 0 \\ \left|\psi^{\alpha}_{0,0}\right\rangle/|\psi^{\alpha}_{0,\frac{1}{2}}\rangle, & \varepsilon > 0 \end{cases}. \tag{2.14}$$

То есть, симметричная суперпозиция не восстанавливается в силу невозможности туннелирования в находящуюся бесконечно далеко симметричную яму.

Таким образом, пределы не коммутируют:

$$\lim_{g\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}|\phi\rangle \neq \lim_{\alpha\to 0}\lim_{g\to\infty}|\phi\rangle \tag{2.15}$$

и симметричная фаза неустойчива при стремящейся к бесконечности константе связи.

2.3. Энергия основного состояния при малых ω_0 и некоммутирующие пределы

2.3.1. Энергия основного состояния

При малых ω_0 энергию основного состояния можно найти с помощью теории возмущений [1]. Выберем в качестве гамильтониана нулевого приближения гамильтониан с добавленным к нему нарушающим симметрию членом:

$$\hat{H}^0 = \frac{\omega^2\hat{q}^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\hat{p} + g\hat{S}_y\right)^2 + \alpha\hat{p}, \tag{2.16}$$

а в качестве возмущения Зеемановский член $-\omega_0\hat{S}_z$. Энергия основного состояния $\hat{H}^0$, как функция от проекции спина s_y на ось y, есть

$$E_0^{(0)} = -\frac{\alpha^2}{2} - g\alpha s_y. \tag{2.17}$$

Поправка первого порядка равна нулю, так как оператор $\hat{S}_z$ не имеет диагональных матричных элементов в базисе $\left|n_{gs_y}, s_y\right\rangle$. Во втором порядке и пределе $g^2 > \omega$ получим

$$E_0^{(2)} = \frac{\omega_0^2}{2g^2}\left(s_y^2 - S(S+1)\right). \tag{2.18}$$

И окончательно энергия основного состояния:

$$E_0 = -\frac{\alpha^2}{2} - g\alpha s_y + \frac{\omega_0^2}{2g^2}\left(s_y^2 - S(S+1)\right). \tag{2.19}$$

Здесь также работает метод некоммутирующих пределов. Устремим сначала α к нулю, тогда энергия основного состояния, как функция s_y, это парабола, смотрящая вверх. Она имеет минимум при $s_y = 0$. Теперь будем считать α конечным и найдём такое, при котором достигается минимум энергии:

$$\frac{\partial E_0}{\partial s_y} = 0 \Rightarrow \alpha_m = \frac{\omega_0^2 s_y}{g^3}. \tag{2.20}$$

Подставляя в E_0 получим

$$E_0\bigg|_{\alpha_m} = -\frac{\omega_0^2}{2g^2}\left(s_y^2 - S(S+1)\right) \tag{2.21}$$

и теперь парабола смотрит вниз, то есть энергия минимальна при $s_y = \pm S$. Так как $\alpha_m \to 0$ при $g \to \infty$ делаем вывод, что критическая константа связи $g_c \to \infty$. Таким образом

$$\lim_{\alpha\to 0}\lim_{g\to\infty} E_0 = -\lim_{g\to\infty}\lim_{\alpha\to 0} E_0 \tag{2.22}$$

и пределы не коммутируют.

2.3.2. Волновая функция основного состояния

Повторим более детально рассуждения в параграфе 2.2.1 применительно к случаю $\varepsilon = 0$. Как показано в предыдущем параграфе, если сначала положить $\alpha = 0$ энергия основного состояния будет минимальна при $s_y = 0$. Для полуцелого спина проекция $s_y = 0$ невозможна, так что минимум будет достигаться при $s_y = \pm 1/2$. При этом волновая функция основного состояния должна быть симметричной волновой функцией (2.9):

$$|\phi_0\rangle = \begin{cases} |0_0, 0\rangle, & \text{целый спин} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0_{g\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|0_{-g\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\right\rangle\right), & \text{полуцелый спин} \end{cases}. \tag{2.23}$$

Теперь устремим g к бесконечности. Тогда член $\sim \omega_0^2/g^2$ устремится к нулю и энергия основного состояния есть

$$E_0\Big|_{g\to\infty} = -\frac{\alpha^2}{2} - g\alpha s_y. \tag{2.24}$$

В зависимости от знака α энергия минимальна при $s_y = \pm S$ и в основном состоянии волновая функция есть $|0_{\pm gS}, \pm S\rangle$, система локализована в одной из крайних ям эффективного потенциала. Если теперь выровнять потенциал, устремив возмущение к нулю, то симметричная волновая функция (2.9) не восстановится, так как в пределе $g \to \infty$ крайние ямы потенциала находятся бесконечно далеко друг от друга. Следовательно

$$\lim_{g\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}|\phi_0\rangle = |0_{\pm gS}, \pm S\rangle \tag{2.25}$$

и система оказывается в сверхизлучательном состоянии с $\left|\langle\hat{S}_y\rangle\right| = S$, $|\langle\hat{p}\rangle| = gS$

2.4. Метод пробной функции

Для исследования расширенной модели Дике при $\varepsilon = 0$ также был использован метод пробной функции. Будем искать основное состояние гамильтониана в виде

$$|\psi(a,b)\rangle = \sum_{\sigma_y=-S}^{S}\sum_{n=0}^{\mathcal{N}}\left(\frac{a}{(n^2+s_y^2+1)^2} + \frac{b}{(n^2+(s_y-S)^2+1)^2}\right)\left|n_{gs_y}, s_y\right\rangle. \tag{2.26}$$

Условие нормировки

$$\sum_{s_y=-S}^{S}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{(n^2+s_y^2+1)^2} + \frac{b}{(n^2+(s_y-S)^2+1)^2}\right)^2 = 1 \tag{2.27}$$

позволяет выразить коэффициент b через a, что даёт волновую функцию $|\psi(a)\rangle$ только одного аргумента a. Энергия основного состояния тогда есть

$$\begin{aligned}E(a) = \langle\psi(a)|\hat{H}_{\text{ExD}}|\psi(a)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s_y=-S}^{S} c_{n,s_y}^2\omega n - \\ -\frac{E_J}{2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{s_y=-S}^{S} c_{n,s_y}\Big(c_{m,s_y+1}\Omega_{n,m}^{s_y,s_y+1}\sqrt{S(S+1)-s_y(s_y+1)} + \\ + c_{m,s_y-1}\Omega_{n,m}^{s_y,s_y-1}\sqrt{S(S+1)-s_y(s_y-1)}\Big),\end{aligned} \tag{2.28}$$

где $\Omega_{n,m}^{s_y,s'_y} = \left\langle n_{gs_y}\middle|m_{gs'_y}\right\rangle$ интеграл перекрытия сдвинутых состояний фотонного осциллятора [67]. Будем численно искать её минимум при различных значениях константы связи g. До достижения некоторого значения g энергия основного состояния минимальна при $a \approx 0.9$. Это значит, что доминирует первый член в сумме и $\langle\hat{S}_y\rangle = 0$. При дальнейшем увеличении константы связи минимум сместится к $a = 0$, то есть вклад в волновую функцию будет давать второй член и $\langle\hat{S}_y\rangle = S$. Зависимости $E(a)$ при возрастающих значениях константы связи g для целого и полуцелого спина

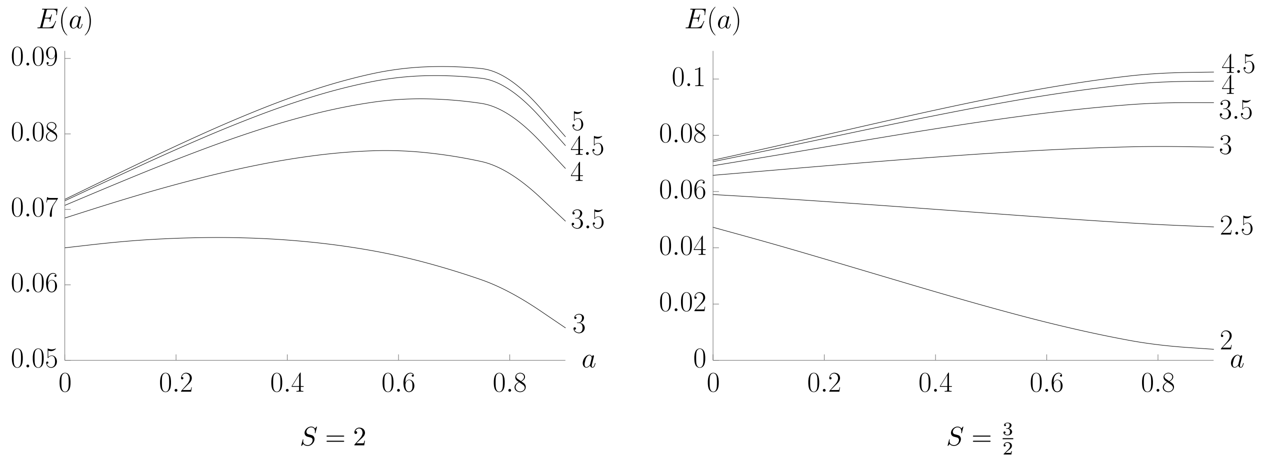


Рис. 2.3: Энергия основного состояния, как функция от a при различных g (подпись рядом с линией). При некотором g минимум кривой переходит от $a \approx 0.9$ к $a = 0$.

представлены на рис. 2.3. Возникновение ненулевой проекции спина на ось y также приведёт к появлению ненулевого среднего значения импульса. Для полуцелого спина, у которого запрещена нулевая проекция спина на ось y, произойдёт изменение угла наклона прямой $\langle \hat{p}(g) \rangle$ с $1/2$ на S. Зависимость $p(g)$ построена на рис. 2.4.

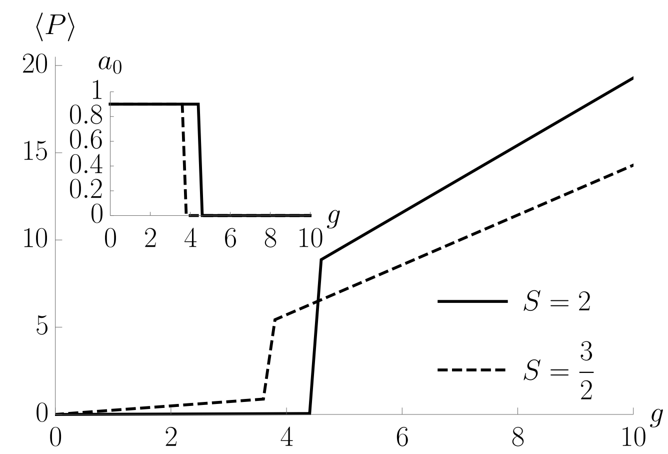


Рис. 2.4: Зависимость среднего значения импульса от константы связи. После возникновения ненулевой проекции спина на ось y при критической константе связи происходит скачок.

Таким образом, при $\varepsilon = 0$ и $g \to \infty$ в системе происходит сверхизлучательный переход независимо от того целый полный спин или полуцелый. Это также согласуется с представленными ранее результатами.

2.5. Фазовая диаграмма расширенной модели Дике в осях g^2–ε

2.5.1. Аналитическое исследование

Повторим рассуждения из параграфа 2.3.1 для случая $\varepsilon \neq 0$, то есть для гамильтониана

$$\hat{H}_{\text{ExD}} = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}\hat{S}_y^2 - \omega_0 \hat{S}_z + \alpha \hat{p}. \tag{2.29}$$

Тогда энергия основного состояния при больших g (малых ω_0) во втором порядке теории возмущений равна

$$E_0 = -\frac{\alpha^2}{2} - g\alpha s_y + \frac{\omega_0^2}{2g^2}\big(s_y^2 - S(S+1)\big) + \frac{\varepsilon g^2}{2} s_y^2. \tag{2.30}$$

Рассмотрим сначала положительные ε. Минимизируя при конечном α получим зависимость энергии основного состояния от s_y:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_0}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \alpha_m = \left(\frac{\omega_0^2}{g^3} + \varepsilon g\right) s_y \\ &E_0\bigg|_{\alpha_m} = -\frac{\omega_0^2}{2g^2}\big(s_y^2 + S(S+1)\big) - \frac{\varepsilon g^2}{2} s_y^2 + O\left(\frac{\omega_0^4}{g^6}\right). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Как и в главе 2.3.1 парабола $E_0(s_y)$ перевернулась и теперь смотрит вниз. Для взятия пределов в последовательности $\lim\limits_{\alpha\to 0}\lim\limits_{g\to\infty}$ необходимо, чтобы α_m убывало с g, то есть

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial g} < 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < \frac{3\omega_0^2}{g^4}. \tag{2.32}$$

Аналогично, при отрицательных ε

$$E_0 = -\frac{\alpha^2}{2} - g\alpha s_y + \frac{\omega_0^2}{2g^2}\big(s_y^2 - S(S+1)\big) + \frac{|\varepsilon| g^2}{2} s_y^2. \tag{2.33}$$

Энергия основного состояния, как функция от s_y, является обращённой вниз параболой при

$$-\frac{\omega_0^2}{g^4} < \varepsilon < 0. \tag{2.34}$$

Данное неравенство разделяет сверхизлучательную и нормальную фазы при больших g, а также гарантирует выполнение равенства $\lim\limits_{g\to\infty} \alpha_m = 0$ при $\varepsilon < 0$.

В итоге область на фазовой диаграмме, заключённая между линиями, определяемыми неравенствами (2.32) и (2.34), отвечает нормальной фазе, неустойчивой для внешнего возмущения величиной α_m. Примечательно, что возмущение приводит к переходу в сверхизлучательную фазу даже при $\varepsilon > 0$.

2.5.2. Численные результаты

В предыдущем параграфе фазовая диаграмма исследована в пределе большой константы связи g. Получить её полностью можно численно, находя конфигурацию системы для различных комбинаций значений $\{\varepsilon, g\}$. Необходимо только найти способ численно отличить фазы друг от друга.

Известно, что энтропия спиновой подсистемы

$$\mathcal{S} = -\operatorname{Tr}\left(\hat{\rho}_{\mathrm{S}} \ln \hat{\rho}_{\mathrm{S}}\right) \tag{2.35}$$

имеет максимум в точке перехода [29], см. рис. 2.5. Здесь $\hat{\rho}_S$ — матрица плотности спиновой подсистемы в основном состоянии.

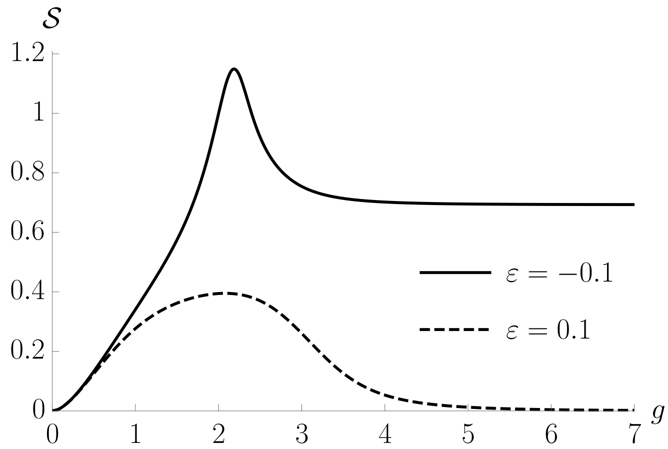


Рис. 2.5: Характерный вид зависимости энтропии спиновой подсистемы от константы связи. График построен при $S = 2$.

Таким образом, алгоритм заключается в том, чтобы при заданном ε найти точку экстремума полученной численно зависимости $\mathcal{S}(g)$. После этого на фазовой диаграмме ставится точка с координатами (g^2, ε). Методы численного нахождения основного состояния и его матрицы плотности описаны в приложении B. Полученная таким способом фазовая диаграмма изображена на рис. 2.6, также пунктиром отмечены найденные аналитически границы фаз (2.32) и (2.34).

2.6. Функции Хусими основного состояния модели Дике в разных фазах

Функции Хусими позволяют наглядно визуализировать конфигурацию спиновой и фотонной подсистем, а также отследить их изменения с параметрами задачи:

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{Ph}}(q,p) &= \frac{1}{\pi}\langle q,p|\hat{\rho}_{\mathrm{Ph}}|q,p\rangle \\ Q_{\mathrm{S}}(\theta,\phi) &= \frac{1}{\pi}\langle \theta,\phi|\hat{\rho}_{\mathrm{S}}|\theta,\phi\rangle\,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

где $|q,p\rangle$ и $|\theta,\phi\rangle$ — когерентные состояния спина и фотона соответственно, $\hat{\rho}_{\mathrm{Ph}}$ — редуцированная матрица плотности фотонов, $\hat{\rho}_{\mathrm{S}}$ — редуцированная матрица плотности спина. В данном параграфе построены функции Хусими для точек, лежащих на трёх траекториях на фазовой диаграмме, рис. 2.6. Траектории обозначены чёрными точками, подписанными номером траектории и соединёнными стрелками.

Все три траектории начинаются в области фазовой диаграммы, соответствующей нормальной фазе. В нормальной фазе спин направлен вдоль оси z, что отражается на виде функции Хусими, которая также ориентирована вдоль оси z. Фотонная функция Хусими имеет максимум в точке $q = 0$, $p = 0$, то есть макроскопический фотонный конденсат отсутствует. Функции Хусими в нормальной фазе при $g^2 = 0$ изображены на рисунках 2.7 — 2.9.

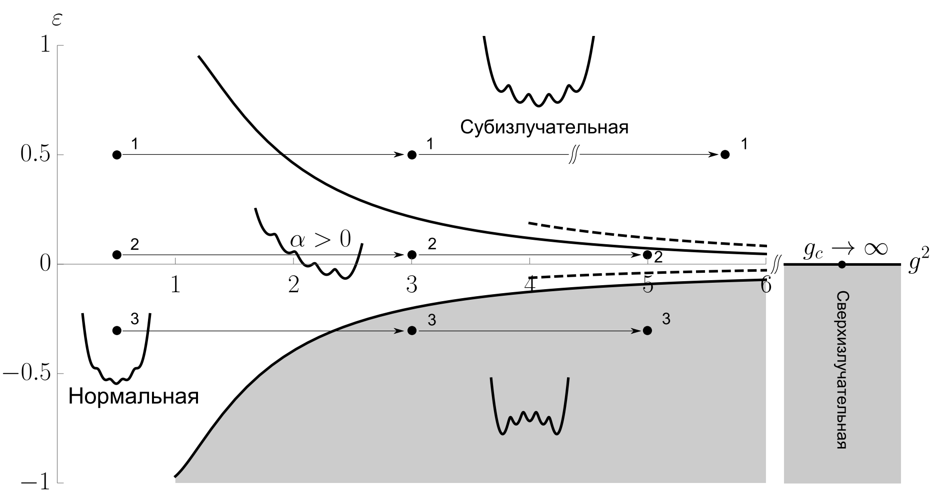
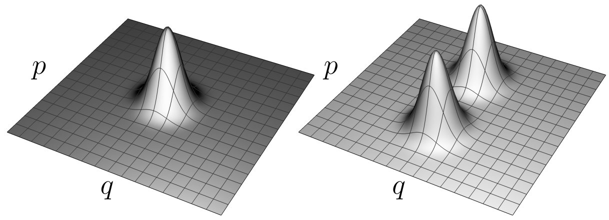


Рис. 2.6: Фазовая диаграмма расширенной модели Дике при конечном полном спине S. Сплошные линии — полученные численно границы раздела фаз, пунктирные линии — область неустойчивости нормальной фазы при больших константах связи, описываемая уравнениями (2.32) и (2.34). При $\varepsilon = 0$ критическая константа связи стремится к бесконечности, что схематически отмечено соответствующей точкой на диаграмме. Стрелки соединяют точки на трёх траекториях, соответствующих рисункам 2.7, 2.8 и 2.9.

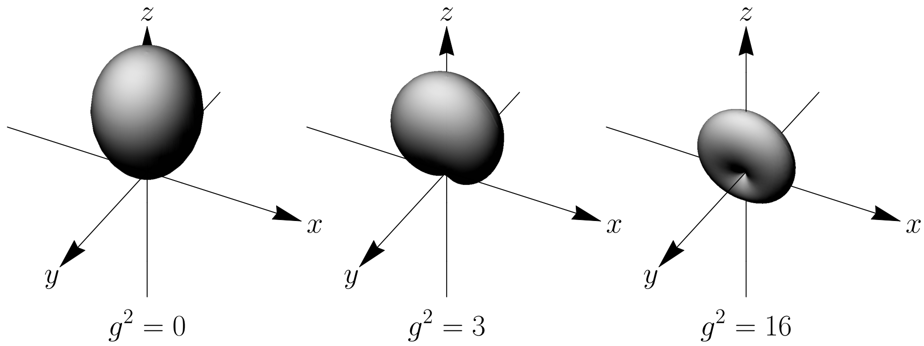
2.6.1. Переход в субизлучательную фазу при $\varepsilon > 0$, траектория 1

В субизлучательной фазе проекция спина на ось y минимальна, а член $-\omega_0 S_z$ мал по сравнению с членами $\sim g$, в силу чего симметрия спиновой функции Хусими не может быть сильно нарушена вдоль оси z. Поэтому в фазовом пространстве спина она представляет собой диск, немного смещённый вдоль положительного направления оси z благодаря члену $-\omega_0 S_z$ и утончающийся к центру. Изменение спиновой функции Хусими при переходе в субизлучательную фазу с ростом константы связи (траектория 1 на рис. 2.6) изображено на рис. 2.7б.

Характер фотонной функции Хусими легко понять, анализируя эффективный потенциал, описанный в параграфе 2.1 и изображённый на рис. 2.2а. Эффективный потенциал имеет минимумы при $p = \pm g/2$, если полный спин полуцелый, и при $p = 0$, если полный спин целый. Следовательно, у фотонной функции Хусими либо два максимума при $q = 0, p = \pm g/2$, либо один при $q = 0, p = 0$. На рисунке 2.7а изображены фотонные функции Хусими для целого полного спина (одиночный пик) и полуцелого (два пика).



а)



б)

Рис. 2.7: а) Функции Хусими фотонов в субизлучательной фазе: одиночный пик — целый полный спин S, два пика — полуцелый полный спин S. б) Функции Хусими спиновой подсистемы в субизлучательной фазе при возрастающей константе связи g, траектория 1 на фазовой диаграмме, рис. 2.6.

2.6.2. Переход в сверхизлучательную фазу при конечном внешнем возмущении $\alpha\hat{p}$, траектория 2

Нарушающее симметрию внешнее возмущение $\alpha\hat{p}$ приводит к переходу в сверхизлучательную фазу, если система находится в области неустойчивости нормальной фазы на фазовой диаграмме (траектория 2 на фазовой диаграмме, рис. 2.6). Примечательно, что с ростом константы связи происходит поворот спина в плоскости y–z и он разворачивается от оси z к оси y. Функции Хусими спиновой и фотонной подсистем при возрастающей константе связи и наличии внешнего возмущения изображены рисунке 2.8.

Именно этот эффект был обнаружен с помощью повёрнутого преобразования Гольштейна–Примакова при исследовании модели Дике в термодинамическом пределе, описанном в главе 1.3.1. Разворот спина "утягивает" за собой фотонный конденсат и максимум его функции Хусими сдвигается из начала координат в точку $q = 0, p = -gS$. В термодинамическом пределе величина минимального внешнего возмущения α, необходимого для перехода, стремится к нулю, что является свойством системы со спонтанным нарушением симметрии, поэтому в главе 1.3.1 его вводить не потребовалось. Но, так как численные расчёты проводились при конечном S, для фазового перехода внешнее возмущение необходимо.

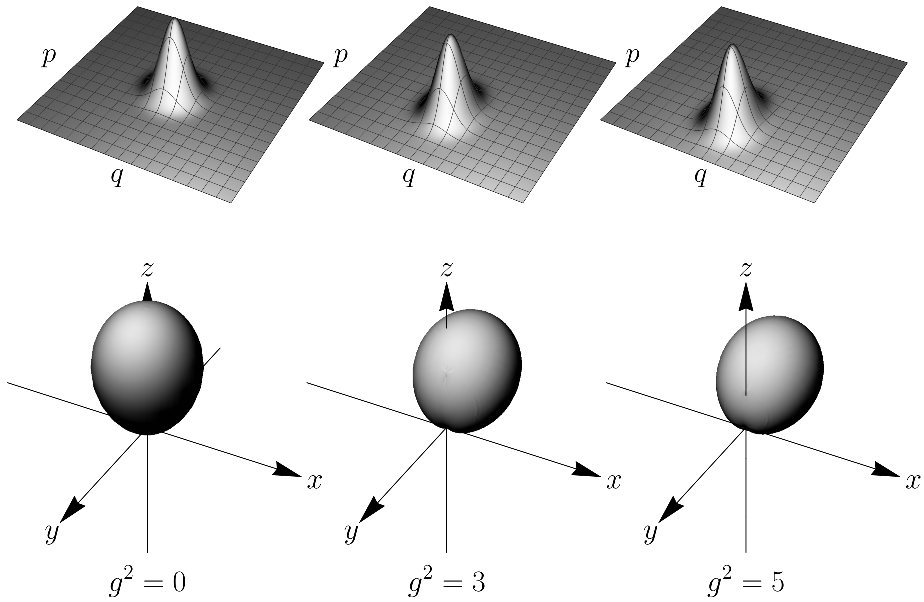


Рис. 2.8: Функции Хусими при переходе в сверхизлучательную фазу под влиянием внешнего возмущения $\alpha\hat{p}$ при возрастающей константе связи g, траектория 2 на рис. 2.6.

2.6.3. Переход в сверхизлучательную фазу при $\varepsilon < 0$, траектория 3

В сверхизлучательной фазе спин ориентирован вдоль оси y, однако при любом конечном g гамильтониан сохраняет симметрию относительно отражений $\hat{p} \to -\hat{p}$, $\hat{S}_y \to -\hat{S}_y$. Соответственно, функция Хусими спиновой подсистемы направлена вдоль оси y, имея максимумы при $s_y = \pm S$, представляя собой гантелью.

Эффективный потенциал минимален при $p = \pm gS$ (см. рис. 2.2) и функция Хусими имеет два максимума при $q = 0, p = \pm gS$. В пределе бесконечных константы связи или полного спина расстояние между максимумами стремится к бесконечности и происходит нарушение симметрии. На рис. 2.9 изображены функции Хусими спиновой и фотонной подсистемы при движении по траектории 3 на фазовой диаграмме (рис. 2.6) от малых констант связи к большим.

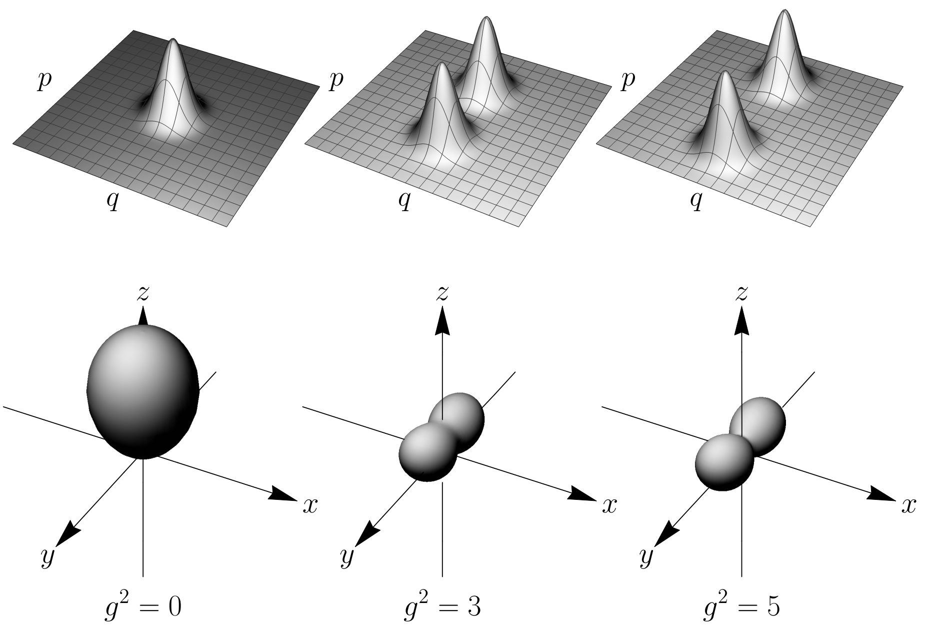


Рис. 2.9: Функции Хусими в сверхизлучательной фазе при возрастающей константе связи g, траектория 3 на рис. 2.6.

Глава 3

Квазиклассическая динамика модели Дике

3.1. Динамика в двухъямном потенциале

В данной главе будет исследована квазиклассическая динамика модели Дике [2]. Для этого диагонализуем спиновую часть гамильтониана модели Дике

$$\hat{H}_D = \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y - \omega_0 \hat{S}_z, \tag{3.1}$$

совершив поворот [65]:

$$g\hat{p}\hat{S}_y - \omega_0 \hat{S}_z = \tilde{\omega}(p)\Big[\hat{S}_z \cos\theta + \hat{S}_y \sin\theta\Big]. \tag{3.2}$$

Сопоставляя коэффициенты при $\hat{S}_z$ и $\hat{S}_y$ в обеих частях уравнения и решая систему относительно $\tilde{\omega}(\hat{p})$ получим

$$\begin{aligned} \cos\theta &= -\frac{\omega_0}{\tilde{\omega}(\hat{p})} \\ \sin\theta &= \frac{g\hat{p}}{\tilde{\omega}(\hat{p})} \\ \tilde{\omega}(\hat{p}) &= \omega_0 \sqrt{1 + \frac{g^2\hat{p}^2}{\omega_0^2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{H}_D &= \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} + \tilde{\omega}(\hat{p})\hat{J}_z \\ \hat{J}_z &= \hat{S}_z \cos\theta + \hat{S}_y \sin\theta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Адиабатическое приближение заключается в том, чтобы считать нижний уровень энергии спиновой части гамильтониана $p^2/2 + \omega(\hat{p})\hat{J}_z$ потенциальной энергией для переменной $\hat{p}$. Это значит, что фотонная подсистема является медленной подсистемой, которая эволюционирует на фоне быстрой спиновой.

Квазиклассическую динамику модели Дике будем искать, решая классическую задачу о движении частицы в потенциале

$$U(p) = \frac{p^2}{2} - S\tilde{\omega}(p) = \frac{p^2}{2} - S\omega_0 \sqrt{1 + \frac{g^2 p^2}{\omega_0^2}}. \tag{3.5}$$

Полученный потенциал имеет тот же смысл эффективного потенциала модели Дике, что эффективный потенциал расширенной модели Дике, описанный в главе 2.1.

Воспользуемся тем, что $g_c = \sqrt{\omega_0/S}$ и введём обозначение $f^2 = g^2/g_c^2$. Тогда

$$U(p) = \frac{p^2}{2} - S\omega_0\sqrt{1 + f^2\frac{p^2}{\omega_0 S}} \approx \left(\frac{f^4}{8\omega_0 S}\right)p^4 + (1-f^2)\frac{p^2}{2}. \tag{3.6}$$

На рис. 3.1 построен график потенциальной энергии (3.6), разложенной до четвёртого порядка по p. Потенциал двухъямный при $f^2 > 1$, в противном случае он имеет единственный минимум при $p = 0$. Разложение возможно, если

$$f^2\frac{p^2}{\omega_0 S} \ll 1, \tag{3.7}$$

подставив сюда точку минимума потенциала $p_{\min}$ получим условие для разложения корня:

$$p_{\min}^2 = \pm\frac{\omega_0(f^4 - S^2)}{f^2 S} \Rightarrow f^4 - 1 \ll 1. \tag{3.8}$$

Следовательно, разложение возможно при $f \to 1 + 0$.

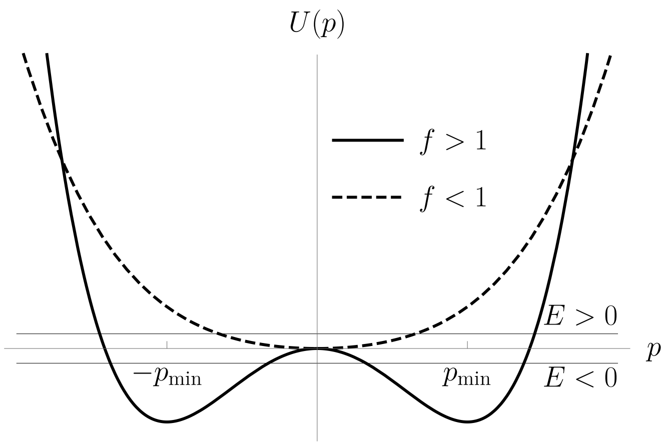
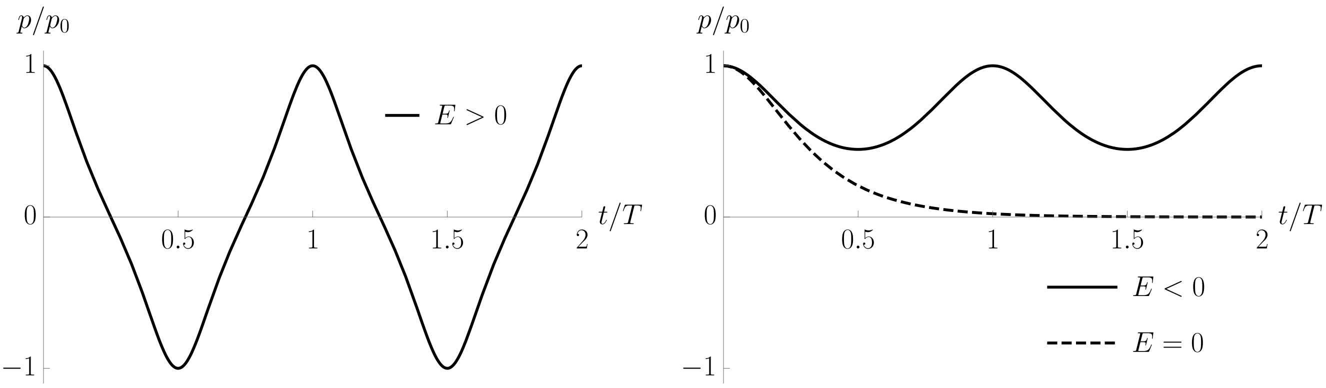


Рис. 3.1: Потенциальная энергия $U(p)$, уравнение (3.6). При $f > 1$ возникают два минимума $\pm p_{\min}$, а точка $p = 0$, бывшая минимумом при $f < 1$, превращается в максимум. Горизонтальные линии $E > 0$ и $E < 0$ соответствуют полной энергии системы выше потенциального барьера и ниже.

В сверхизлучательной фазе $f^2 > 1$ и движение происходит в двухъямном потенциале. Решая задачу о движении в двухъямном потенциале (см. приложение А.2) получим

$$\begin{aligned}
p &= \begin{cases} p_0 \operatorname{cn}\left(p_0\sqrt{\dfrac{2U_0}{\omega^2 k}}t, k\right), & E > 0 \\ p_0 \operatorname{sech}\left(p_0\sqrt{\dfrac{2U_0}{\omega^2}}t\right), & E = 0 \\ p_0 \operatorname{dn}\left(p_0\sqrt{\dfrac{2U_0}{\omega^2}}t, \dfrac{1}{k}\right), & E < 0 \end{cases} \\
U_0 &= \frac{f^4}{8\omega_0 S} \\
k &= \frac{p_0^4}{E/U_0 + p_0^4} \\
p_0^2 &= \frac{2S\omega_0(f^2-1)}{f^4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2f^4 E}{\omega_0 S(1-f^2)^2}}\right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Характер решения зависит от знака полной энергии. Если полная энергия положительная, то есть частица может перескочить потенциальный барьер, колебания происходят между двумя ямами и решение есть знакопеременная функция Якоби cn. Если энергия отрицательная, её недостаточно для преодоления потенциального барьера и колебания происходят в одной из ям. Соответственно, решение уравнений движения выражается через знакопостоянную функцию Якоби dn. Когда полная энергия равна в точности нулю, а значит параметр $k = 1$, период движения становится бесконечным и функции Якоби переходят в гиперболический секанс sech. Это движение от точки поворота p_0 к максимуму потенциала в точке $p = 0$, которые находятся на одном уровне. Графики зависимости $p(t)$ изображены на рис. 3.2.



а) б)

Рис. 3.2: Зависимость от времени $p(t)$ при движении в двухъямном потенциале (3.6) для полной энергии больше нуля (а), меньшей либо равной нулю (б). Время отложено в единицах T — периода колебаний функции cn на графике а), и периода колебаний функции dn (сплошная линия) на графике б).

3.1.1. Устойчивость спящего волчка Лагранжа

Волчком Лагранжа называется симметрический ($I_1 = I_2$) волчок в поле сил тяжести. Его энергия есть

$$E = \frac{\tilde{I}_1}{2}\Big(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\Big) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta, \tag{3.10}$$

где ψ, θ, ϕ — углы Эйлера (рис. 3.3), m — масса волчка, l — расстояние от основания волчка до его центра инерции, g — ускорение свободного падения и $\tilde{I}_1 = I_1 + ml^2$.

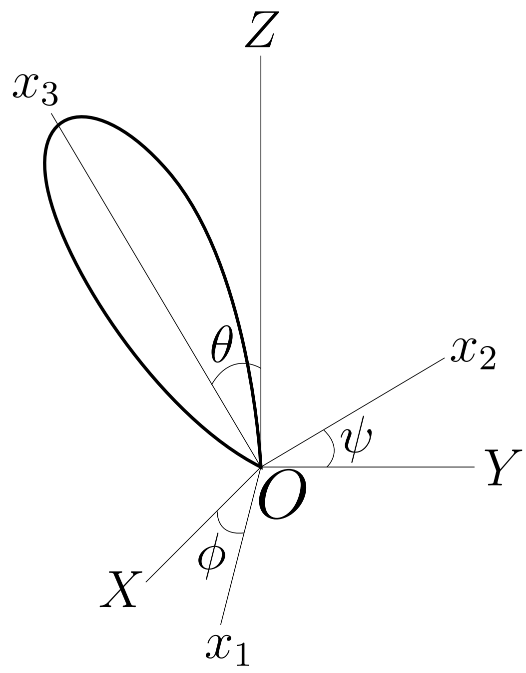


Рис. 3.3: Волчок Лагранжа и углы Эйлера

У волчка сохраняются моменты импульса относительно осей z и x_3:

$$\begin{aligned} M_z &= \Big(\tilde{I}_1 \sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\Big)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta \\ M_3 &= I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Рассмотрим случай так называемого спящего волчка, направленного вдоль оси z, тогда $M_3 = M_z = M$. Его энергия, выраженная через сохраняющиеся моменты импульса:

$$E - \frac{M^2}{2I_3} - mgl = \frac{\tilde{I}_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M^2}{2\tilde{I}_1}\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} - 2mgl\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.12}$$

При малых отклонениях волчка от вертикальной оси энергию можно разложить по степеням $Q = \sin(\theta/2)$:

$$E - \frac{M^2}{2I_3} - mgl \approx 2\tilde{I}_1\dot{Q}^2 + \frac{M^2}{2\tilde{I}_1}\left[Q^4 + Q^2\left(1 - \frac{4mgl\tilde{I}_1^2}{M^2}\right)\right]. \tag{3.13}$$

Задача опять свелась к движению в потенциале $\sim x^4 - x^2$. Вращение волчка вокруг вертикальной оси является устойчивым, когда энергия имеет минимум при $\theta = 0$. Для этого коэффициент перед квадратичным членом должен быть положительным и условие устойчивости есть

$$1 - \frac{4mgl\tilde{I}_1^2}{M^2} > 0. \tag{3.14}$$

В противном случае, вращение вокруг вертикальной оси неустойчиво и волчок от неё отклонится, "упав" в одну из ям двухъямного потенциала.

Сравним потенциальную энергию спящего волчка Лагранжа в (3.13) с потенциальной энергией квазиклассической модели Дике (3.6). У последней коэффициент перед квадратичным членом отрицателен в сверхизлучательной фазе, т.к. $f > 1$. Следовательно, она соответствует неустойчивому движению спящего волчка. А нормальная фаза, в которой $f < 1$, — устойчивому.

Задача о движении в двухъямном потенциале решена в предыдущем параграфе, так что известна зависимость от времени величины $Q(t) = \sin(\theta(t)/2)$. Зависимость от времени угла $\phi(t)$ можно найти с помощью закона сохранения момента импульса M:

$$\begin{gathered} \dot{\phi} = \frac{M}{2\tilde{I}_1(1 - Q(t)^2)} = \frac{M}{2\tilde{I}_1(1 - \sin^2(\theta(t)/2))} \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi(t) = \frac{M}{2\tilde{I}_1} \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{1 - \sin^2(\theta(\tau)/2)}. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Таким образом, имея зависимости от времени углов $\theta(t)$ и $\phi(t)$, можно построить траекторию конца волчка. Обратимся теперь к динамике спина в модели Дике, описываемой уравнением (3.3). Зависимость от времени импульса $p(t)$ определяет зависимость от времени угла $\theta(t)$, а она, в свою очередь, — зависимость $\phi(t)$, согласно уравнению (3.15). При этом

$$\frac{M}{2\tilde{I}_1} = \frac{\omega}{f}. \tag{3.16}$$

То есть, существует соответствие между динамикой волчка Лагранжа и динамикой, задаваемой уравнениями (3.3). Траектории конца волчка для положительной и отрицательной полной энергии построены на рис. 3.4.

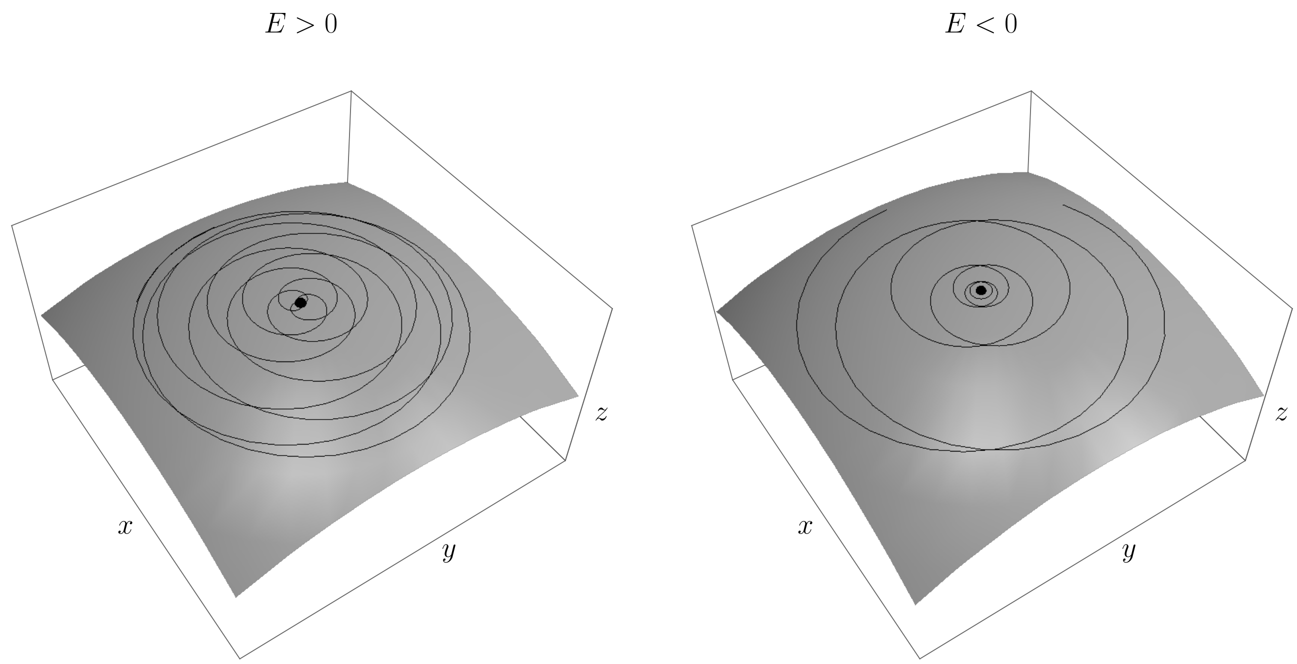
3.2. Решение квазиклассических уравнений Гейзенберга при $\omega = \omega_0$

Динамика оператора $\hat{A}$ подчиняется уравнению

$$\ddot{\hat{A}} = -[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{A}]]. \tag{3.17}$$

Для гамильтониана модели Дике $\hat{H}_D$ и операторов $\hat{S}_z, \hat{S}_y, \hat{S}_x, \hat{p}$ получим

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{S}}_z &= -g^2\hat{p}^2\hat{S}_z - g\omega_0\hat{p}\hat{S}_y \\ \ddot{\hat{S}}_y &= -\omega_0^2\hat{S}_y - g\omega_0\hat{p}\hat{S}_z \\ \ddot{\hat{S}}_x &= -\omega_0^2\hat{S}_x - g^2\hat{p}^2\hat{S}_x \\ \ddot{\hat{p}} &= -\omega(\hat{p} + g\hat{S}_y). \end{aligned} \tag{3.18}$$



а) б)

Рис. 3.4: Траектория конца волчка на сфере. а) энергия положительна и волчок пересекает северный полюс сферы, что соответствует прохождению через максимум двухъямного потенциала. б) энергия отрицательна и волчок не пересекает северный полюс сферы, что соответствует колебаниям в одной яме двухъямного потенциала.

Переход в сверхизлучательную фазу связан с поворотом спина на угол θ в плоскости z–y и возникновением макроскопического фотонного конденсата $\sqrt{2\omega}\lambda = \langle\hat{p}\rangle$. При этом $\langle\hat{p}\rangle = -g\langle\hat{S}_y\rangle = -gS\sin\theta$. Средние значения проекций спина в основном состоянии выразим через зависящие от времени сферические углы θ и φ:

$$\begin{aligned} S_z(t) &= S\cos\theta(t) \\ S_x(t) &= S\sin\theta(t)\cos\varphi(t) \\ S_y(t) &= S\cos\theta(t)\sin\varphi(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Рассмотрим случай $\omega = \omega_0$, тогда вращение спина вокруг оси x происходит с частотой ω, то есть $\varphi = \omega t$. Соответственно, за счёт связи с проекцией спина на ось y переменная p также осциллирует с частотой ω, запишем зависимость $p(t)$ как

$$p(t) = \sqrt{2\omega}\lambda(t)\cos\omega t. \tag{3.20}$$

Теперь, подставляя зависимости от времени проекций спина и импульса осциллятора в (3.18) и усредняя по быстрым колебаниям с частотой ω, получим систему уравнений для угла поворота спина θ и амплитуды фотонного конденсата λ:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \frac{g\sqrt{2\omega}}{2}\lambda(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{gS\sqrt{\omega}}{2\sqrt{2}}\sin\theta(t). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Это уравнения Гамильтона для осциллятора с гамильтонианом

$$H = \frac{g\sqrt{2\omega}}{4}\lambda^2 - \frac{gS\sqrt{\omega}}{2\sqrt{2}}\cos\theta. \tag{3.22}$$

Здесь λ играет роль импульса. Задача об осцилляторе решена в приложении A.1, зависимость угла от времени есть

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 2\,\mathrm{am}\left(\frac{g}{2}\sqrt{\frac{\omega S}{k}}t, k\right) \\ k &= \frac{2}{1+\frac{2\sqrt{2}E}{gS\sqrt{\omega}}}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где E — полная энергия системы. Тогда для $S_z(t)$ и $\lambda \sim \dot{\theta}$ получим

$$\begin{aligned} S_z(t) &= S\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta(t)}{2}\right) = S\left(1 - 2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{g}{2}\sqrt{\frac{\omega S}{k}}t, k\right)\right) \\ \lambda(t) &= \sqrt{\frac{2S}{k}}\,\mathrm{dn}\left(\frac{g}{2}\sqrt{\frac{\omega S}{k}}t, k\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Полученная в данном приближении зависимость от времени величины фотонного конденсата аналогична полученной ранее при рассмотрении движения в двухъямном потенциале. Если полная энергия системы такова, что в (3.23) $k > 1$, то есть

$$\frac{2\sqrt{2}E}{gS\sqrt{\omega}} > 1, \tag{3.25}$$

функция dn в решении $\lambda(t)$ переходит в функцию cn.

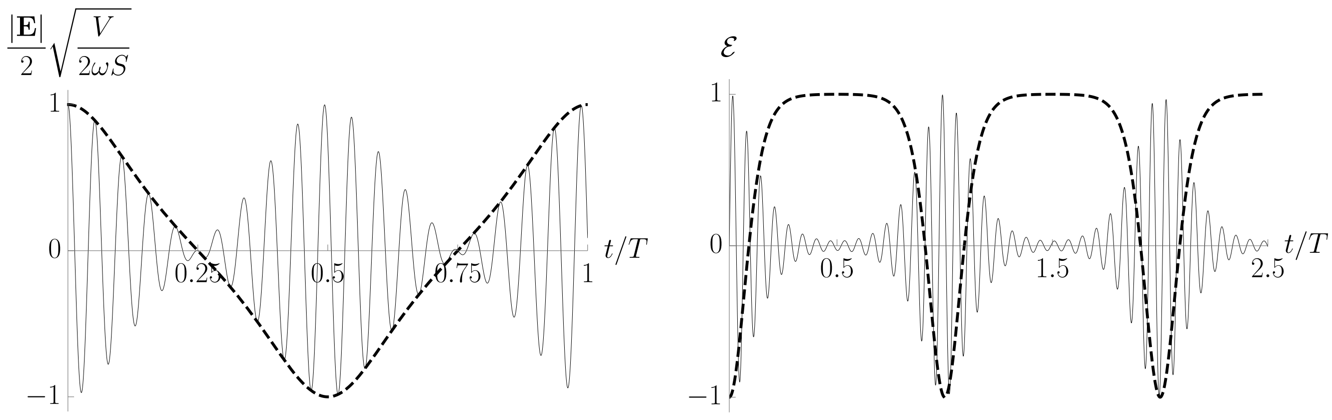
3.3. Связанная светимость

Полученные выше решения описывают перекачку энергии из фотонной подсистемы в спиновую. Энергия фотонной подсистемы есть произведение **Ed**, где **E** — вектор напряжённости электрического поля в полости, **d** — дипольный момент спинов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= 2\mathbf{n}\sqrt{\frac{\omega}{V}}\lambda(t)\cos\omega t = \mathbf{n}\sqrt{\frac{2}{V}}p(t)\cos\omega t \\ \mathbf{d} &= -2\mathbf{n}elS_y = -2S\mathbf{n}el\cos\theta(t)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Здесь V — объём полости, **n** — вектор поляризации, e — заряд электрона, l — эффективная длина джозефсоновского контакта. Энергия спинов равна $-\omega S_z$. Зависимость от времени модуля вектора **E** это функция Якоби, промодулированная быстрыми колебаниями $\cos\omega t$. Она изображена на рис. 3.5а, сравните с рис. 3.2а.

На рис. 3.2б построены зависимости от времени дипольной энергии фотонного конденсата в полости и энергии спиновой подсистемы. Видно, что происходят связанные друг с другом биения: когда энергия спиновой подсистемы максимальна, дипольная энергия стремится к нулю и фотонный конденсат отсутствует. Затем спин переворачивается в сторону энергетически выгодного направления и высвобожденная энергия переходит в энергию фотонного конденсата — возникает свечение. Период цикла завершается переходом энергии обратно от фотонов к спину.



а) б)

Рис. 3.5: а) Зависимость от времени модуля вектора напряжённости электрического поля в полости (сплошная линия) и медленная огибающая (пунктирная линия). б) График зависимости от времени энергии спиновой подсистемы $-\omega S_z$ (пунктирная линия) и дипольной энергии $\mathbf{Ed}$ в полости (сплошная линия). Энергии нормированы так, чтобы амплитуды кривых на графике совпадали: дипольная энергия отложена в единицах $\sqrt{\omega Sk/2V}$, а спиновая в единицах ωS.

3.4. Связь двух решений между собой и со спонтанным нарушением симметрии

3.4.1. Связь двух решений

Зависимости от времени импульса фотонного осциллятора (3.9) и (3.24), найденные с помощью двух разных подходов, имеют общий характер. А именно, в обоих случаях решение выражается через функции Якоби. С физической точки зрения это ожидаемо, так как описывается одна и та же физическая система. Математически же это связано с соответствием между задачей о движении в двухъямном потенциале $\sim x^4 - x^2$ и потенциале $\sim \cos\phi$, подробнее в приложении А.2.2.

Чтобы увидеть, что угол θ в (3.3) также является сверхизлучательным углом поворота (то есть углом, на который поворачивается спин при сверхизлучательном переходе в плоскости y–z), подставим в выражение для $\sin\theta$ точку минимума $p_{\min}$ двухъямного потенциала $U(p)$:

$$\sin\theta\Big|_{p=p_{\min}} = \sqrt{1-\frac{g_c^4}{g^4}},\ g > g_c. \tag{3.27}$$

Результат совпадает с выражением для синуса, возникающем при применении метода повёрнутого преобразования Гольштейна–Примакова к модели Дике [30] (см. уравнение (1.39) в главе 1.3.1 и уравнение (1.45)). Что касается угла θ в (3.19), он является сверхизлучательным углом по построению.

3.4.2. Связь со спонтанным нарушением симметрии

Как обсуждалось в главе 1.2, в модели Дике при фазовом переходе возникает два вырожденных симметричных сверхизлучательных основных состояния, а нормальная фаза становится неустойчивой. При описании квазиклассического движения в предыдущих параграфах это проявляет себя следующим образом: при константе связи меньше критической потенциал (3.6) имеет единственный минимум в точке $p = 0$, что соответствует устойчивой нормальной фазе. При константе связи выше критической нормальная фаза становится неустойчивой, а минимум в $p = 0$ становится максимумом. Возникают два новых симметричных минимума в точках $p = \pm p_{\text{min}} \neq 0$, соответствующие двум сверхизлучательным состояниям.

Решения, полученные в двух предыдущих параграфах, описывают колебания системы между двумя сверхизлучательными состояниями, отличающимися друг от друга знаком средних значений импульса фотона $\langle \hat{p} \rangle$ и проекции спина $\langle \hat{S}_y \rangle$. Начальное состояние при этом является локализованным в одной из ям потенциала (3.6). Существование двух сверхизлучательных состояний обусловлено чётностью гамильтониана, см. параграф 1.2.1. Движение системы при этом есть либо колебания вокруг одной из устойчивых точек, либо колебания между двумя в зависимости от полной энергии системы.

Глава 4

Движение флюксона в параллельном массиве джозефсоновских контактов

4.1. Параллельный массив джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью

Множество параллельно соединённых квантовых джозефсоновских контактов называется параллельным массивом квантовых джозефсоновских контактов. Взаимодействие между контактами в массиве приводит к появлению различного рода эффектов, в частности, возможно возникновение флюксонов — солитонов, представляющих собой кинк, то есть изменение фаз контактов от 0 до 2π в некоторой области.

В работе рассмотрены две конфигурации параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов: линейная и кольцевая [3]. В ячейки внедрено большое количество N "замороженных" джозефсоновских контактов. Последнее достигается за счёт их малой зарядовой энергии, что приводит к подавлению динамики их фазы (это и означает замораживание). Как будет показано далее, "замороженные" контакты приводят к уменьшению размера флюксона за счёт создания высокой кинетической индуктивности. К линейному массиву приложен ток I, а к кольцевому напряжение V_g. Две конфигурации изображены на рис. 4.1.

Лагранжиан системы записывается как

$$
\begin{aligned}
L = \sum_{i=1}^{M} \Bigg\{ \frac{E_J}{2\omega_p^2} \left(\dot{\varphi}_i - \frac{2eC_gV_g}{C} \right)^2 + \frac{E_{Ja}\dot{\delta}_i^2}{2\omega_{pa}^2} - \\
- E_J(1-\cos\varphi_i) - E_J\frac{I}{I_c}\varphi_i - NE_{Ja}(1-\cos\delta_i) \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Здесь φ_i — зависящие от времени фазы одиночных джозефсоновских контактов в ячейке, δ_i — статичные фазы большого количества "замороженных" джозефсоновских контактов, E_J и E_{Ja} — джозефсоновские энергии одиночных и "замороженных" контактов соответственно, $\omega_p = \sqrt{8E_JE_C}$, $\omega_{pa} = \sqrt{8E_{Ja}E_{Ca}}$, I_c — критический ток одиночных джозефсоновских контактов. Кинетическая энергия "замороженных" контактов $\sim \dot{\delta}_i^2$ полагается малой и далее ей пренебрегаем.

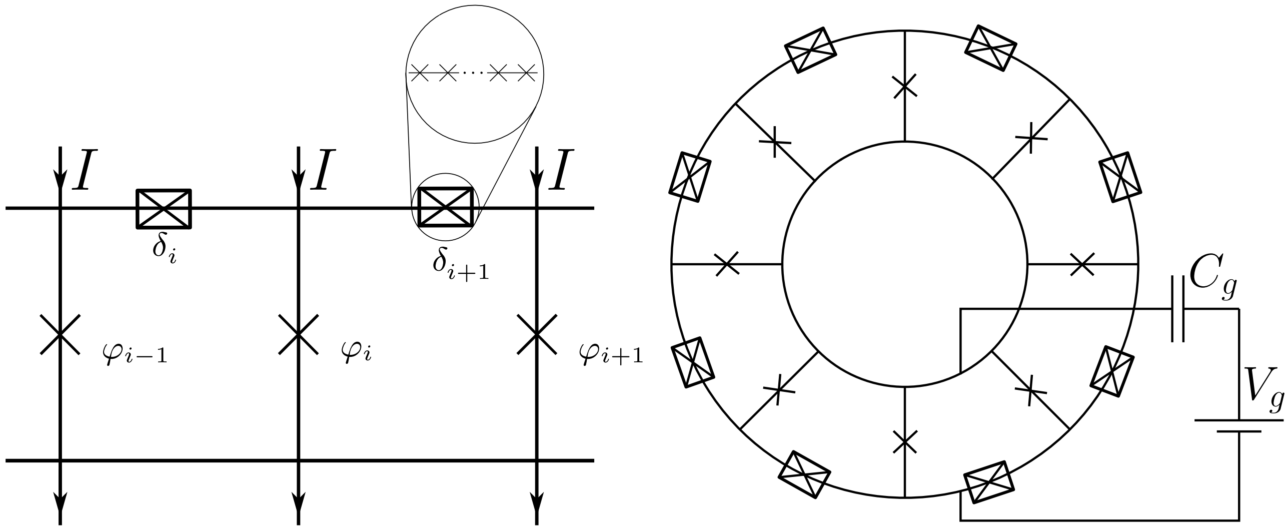


Рис. 4.1: Два типа джозефсоновских параллельных массива: линейный и кольцевой. Прямоугольниками обозначены "замороженные" джозефсоновские контакты δ_i, крестиками — одиночные джозефсоновские контакты, фаза которых зависит от времени.

Условие квантования магнитного потока в ячейке (Φ_i — магнитный поток в i–ой ячейке, Φ_0 — квант потока)

$$N\delta_i + \varphi_{i+1} - \varphi_i = 2\pi \left[n_i + \frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right] \tag{4.2}$$

позволяет выразить фазы φ_i через δ_i. Тогда потенциальная энергия запишется как

$$\begin{aligned} U(\{\varphi_i\}) = E_J \sum_{i=1}^{M} \left(1 - \cos\varphi_i + \frac{I}{I_c}\varphi_i \right) + \\ + N E_{Ja} \sum_{i=1}^{M} \left(1 - \cos \left[\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{N} + \frac{2\pi(n_i + \Phi_i)}{\Phi_0 N} \right] \right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Разложим косинус в последнем слагаемом по большому N, тогда получим потенциал

$$\begin{aligned} U(\{\varphi_i\}) = E_J \sum_{i=1}^{M} \left(1 - \cos\varphi_i + \frac{I}{I_c}\varphi_i \right) \\ + E_L \sum_{i=1}^{M} \left(\varphi_i - \varphi_{i+1} + 2\pi \frac{(n_i + \Phi_i)}{\Phi_0} \right)^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

здесь $E_L = E_{Ja}/(2N)$ — малая индуктивная энергия. Так как индуктивная энергия джозефсоновского контакта $\sim 1/L$, можно сделать вывод, что внедрение большого количества "замороженных" джозефсоновских контактов позволило получить большую эффективную индуктивность.

Размер флюксона в параллельном массиве джозефсоновских контактов определяется конкуренцией двух факторов: локальной нелинейностью потенциала в ячейке и силой связи между ячейками. Если связь между ячейками сильная, то флюксон размазывается вдоль большого числа ячеек. Константа связи обратно пропорциональная индуктивности массива. Индуктивность массива можно увеличить, создав высокую кинетическую индуктивность, как показано выше, либо увеличив размер ячейки. Однако, последнее, то есть повышение геометрической индуктивности, приведёт к огромным размерам ячеек.

4.2. Одиночный флюксон

Флюксон представляет собой изменение фаз контактов в цепочке от 0 до 2π, то есть кинк. В параллельном массиве с низкой индуктивностью он имеет размер больше размера одной ячейки массива, то есть изменение фаз происходит плавно на большом промежутке. Так как в нашем случае индуктивность массива высокая, то есть $E_J \gg E_L$, размер флюксона уменьшен до размера одной ячейки и скачок фазы происходит резко на масштабе одной ячейки.

Потенциальная энергия (4.4) при $I = 0$ является потенциальной энергией в модели Френкеля–Конторовой. Известно, что она допускает солитонные состояния. Флюксон это кинк в распределении фаз контактов, будем описывать флюксон с центром в k–ой ячейке распределением

$$\{\varphi_i\}_{\text{MF}} = \{0, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_k, 2\pi - \varphi_{k+1}, \ldots, 2\pi\}. \tag{4.5}$$

Фазы $\varphi_{k\pm1}$ предполагаются малыми, а фаза φ_k в центре флюксона принимает произвольные значения. Распределение джозефсоновских фаз, образующих флюксон, изображено на рис. 4.2.

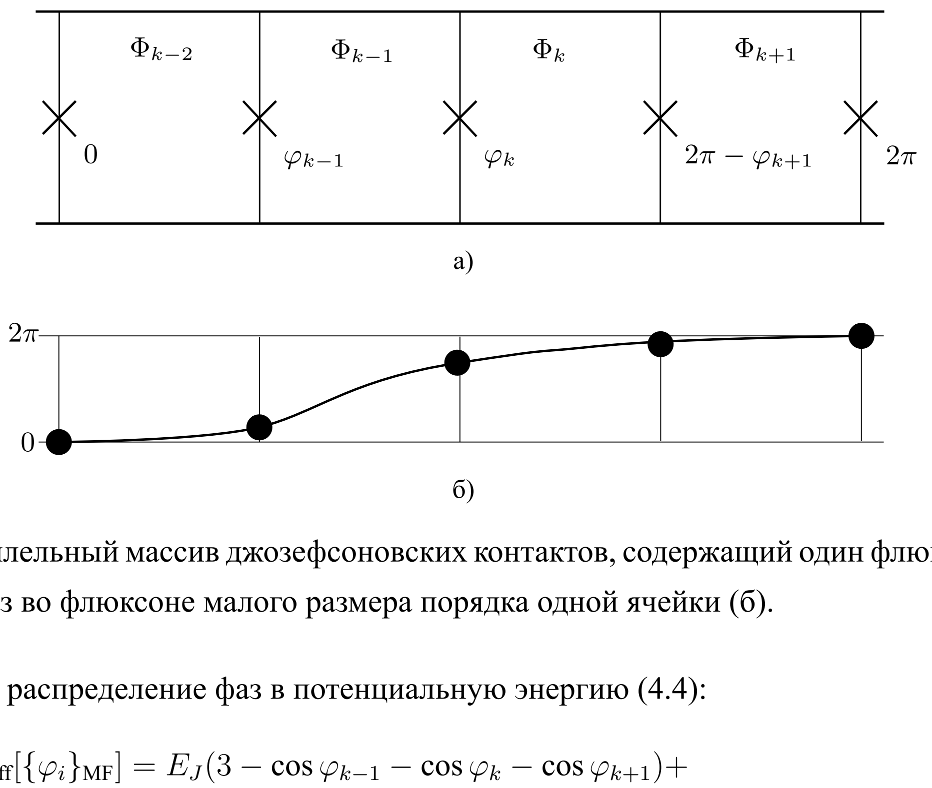


Рис. 4.2: Параллельный массив джозефсоновских контактов, содержащий один флюксон, (а) и распределение фаз во флюксоне малого размера порядка одной ячейки (б).

Подставим распределение фаз в потенциальную энергию (4.4):

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}[\{\varphi_i\}_{\text{MF}}] = E_J(3 - \cos\varphi_{k-1} - \cos\varphi_k - \cos\varphi_{k+1}) + \\ + E_L \left[\left(-\varphi_{k-1} + 2\pi\frac{\Phi_{k-2}}{\Phi_0} \right)^2 + \left(-\varphi_{k+1} + 2\pi\frac{\Phi_{k+1}}{\Phi_0} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\varphi_{k-1} - \varphi_k + 2\pi\frac{\Phi_{k-1}}{\Phi_0} \right)^2 + \left(\varphi_k - 2\pi + \varphi_{k+1} + 2\pi\frac{\Phi_k}{\Phi_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Так как фазы $\varphi_{k\pm1}$ малы, разложим потенциальную энергию по ним, а затем по ним же минимизируем. Тогда получим потенциальную энергию флюксона, как функцию от фазы в его центре φ_k:

$$U_{\text{eff}}(\varphi_k) = E_J(1 - \cos\varphi_k) + 2E_L\left(\varphi_k - \pi\left[1 + \frac{\Phi_{k-1} - \Phi_k}{\Phi_0}\right]\right)^2. \tag{4.7}$$

Внешние потоки Φ_{k+1} и Φ_{k-2} были положены равными нулю и также использовалась малость E_L. Разность $\Phi_{k-1} - \Phi_k$ позволяет регулировать конфигурацию потенциала, особый интерес представляет случай $\Phi_{k-1} - \Phi_k = 0$. Тогда потенциал имеет максимум при $\varphi_k = \pi$ и два минимума при $\varphi_k \approx 0$, $\varphi_k \approx 2\pi$, см. рис. 4.4а. Движение флюксона по массиву соответствует туннелированию между минимумами эффективного потенциала. Перейдём также от переменной φ_k к координате центра флюксона $x = d - \varphi_k/(2\pi)$, где d — размер ячейки. Тогда получим потенциал в виде

$$U_{\text{eff}}(x) = E_J\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right) + 2E_L\left(\frac{2\pi x}{d} - \pi\right)^2. \tag{4.8}$$

Переход к координате центра флюксона x и его туннелирование представлено на рисунке 4.3. Центр флюксона находится в ячейке, у которой фаза контакта на левой границе меньше π, а на правой больше π.

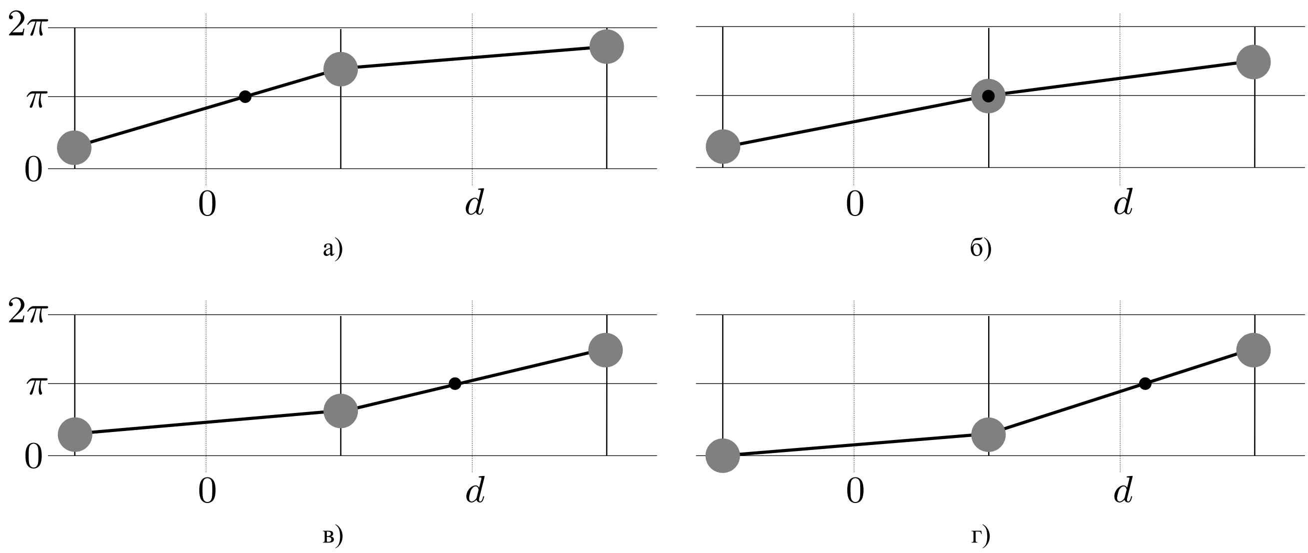


Рис. 4.3: Туннелирование флюксона между соседними ячейками. Чёрная точка на пересечении линии, соединяющей фазы соседних контактов с линией $\varphi = \pi$, — координата центра флюксона x. Рисунок а): фаза левого контакта меньше π, а центрального больше и центр флюксона находится в ячейке между ними. Рисунок б): фаза центрального контакта убывает и становится равной π, тогда флюксон сдвигается вправо и $x = d/2$. Рисунок в): фазы и центрального и среднего контакта меньше π и, так как фаза правого больше π, флюксон перешёл в правую ячейку. Рисунок г): фаза центрального контакта убывает, флюксон смещается правее.

После туннелирования флюксона из k–ой ячейки в ячейку $k + 1$ всю процедуру можно повторить, но сместив положение центра флюксона. Поэтому потенциал флюксона можно получить последовательно скопировав потенциал $U_{\text{eff}}(x)$ на участке $x \in [0, d]$ вдоль всей оси x. Для этого разложим потенциал в ряд Фурье на участке $x \in [0, d]$:

$$\begin{aligned} U_{\text{MF}}(x) &= \frac{2E_L\pi^2}{3} + E_L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2}\cos\frac{2\pi n x}{d} + E_J\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right) = \\ &= 2E_L\left(\frac{\pi^2}{3} + 2\,\mathrm{Li}_2[e^{i\frac{2\pi x}{d}}] + 2\,\mathrm{Li}_2[e^{-i\frac{2\pi x}{d}}]\right) + E_J\left(1-\cos\frac{2\pi x}{d}\right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $\mathrm{Li}_s(z)$ — полилогарифм [68]. Последнее следует из определения полилогарифма:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Li}_s(z) = \sum_n \frac{z^n}{n^s} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^2}\exp\frac{2i\pi n x}{d} = \mathrm{Li}_2\left(\frac{2\pi i x}{d}\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Периодический потенциал U_{MF} изображён на рис. 4.4б. Туннелирование между его минимумами соответствует туннелированию между соседними ячейками в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов.

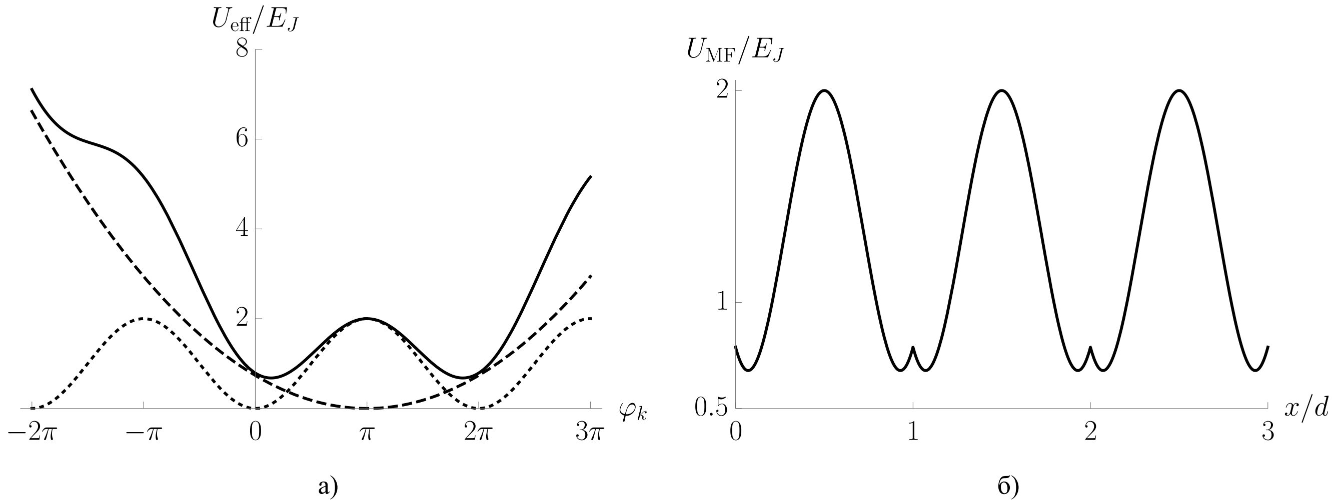


Рис. 4.4: Потенциальная энергия флюксона, как функция от фазы в его центре (а) и периодический потенциал, полученный клонированием потенциала (а) на участке $\phi_k \in [0, 2\pi]$ (б). Графики построены при $E_L = 0.04E_J$.

4.3. Квантовая динамика флюксона в периодическом потенциале

С учётом полученного выше потенциала, движение флюксона описывается гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p} - m\alpha V_g)^2 + \frac{2E_L\pi^2}{3} + E_L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2}\cos\frac{2\pi n\hat{x}}{d} + \\ + E_J\left(1-\cos\frac{2\pi\hat{x}}{d}\right) - E_J\frac{I}{I_c}\frac{2\pi\hat{x}}{d}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $\alpha = edC_g/(\pi C)$, $m = E_J(2\pi)^2/(\omega d)^2$ и $\hat{p} = -i\mathrm{d}/\mathrm{d}x$. В отсутствие внешнего тока и напряжения гамильтониан описывает динамику в периодическом потенциале. Благодаря приложенным напряжению и току в динамике возникают квантовые эффекты, в частности, блоховские осцилляции и эффект Ааронова–Кашера.

4.3.1. Приближение сильной связи

Так как $E_J \gg E_L$, потенциальные барьеры в периодическом потенциале (4.9) высокие и при всех последующих вычислениях будет использовано приближение сильной связи. Для начала рассмотрим случай $V_g = 0$. Закон дисперсии в нижней зоне, как функция от импульса p есть

$$E_0(p) = -\Delta\cos(pd), \tag{4.12}$$

где Δ — ширина зоны:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\omega_0}{2}\exp[-S] \\ S &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m|U_{\mathrm{MF}}(x) - U_{\mathrm{MF}}(x_1)|}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Здесь $\omega_0 \simeq \omega_p$ — частота осцилляций в яме потенциала, интегрирование ведётся между минимумами $x_{1,2}$ потенциала (4.9). Интеграл можно вычислить аналитически при малых E_L:

$$S \approx \frac{8E_J}{\omega_p}\left(1 - 7\zeta(3)\frac{E_L}{E_J}\right), \tag{4.14}$$

где $\zeta(z)$ — дзета–функция Римана [68]. График зависимости $S(E_L/E_J)$ построен численно на рис. 4.5. Учёт внешнего напряжения V_g приведёт к появлению дополнительной фазы в законе дисперсии. Данный случай и возникающий, как следствие, эффект Ааронова–Кашера рассмотрен в параграфе 4.3.3.

4.3.2. Квантовые осцилляции в длинном массиве

При низких температурах туннелирование в верхние энергетические зоны подавлено и волновая функция флюксона в длинном параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов (рис. 4.1а) со временем расплывается вдоль массива. Волновая функция свободной частицы с законом дисперсии $E_0(p) = -\Delta\cos(pd)$ имеет вид

$$\psi = e^{ipx - i\Delta t\cos(pd)}. \tag{4.15}$$

Тогда в приближении сильной связи вероятность обнаружения флюксона в точке x в момент времени t, если в момент времени $t = 0$ он был в точке $x = 0$ равна:

$$P(x,t) = \left| d\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\exp\left[-i\Delta t\cos(pd) - ipx\right]\right|^2. \tag{4.16}$$

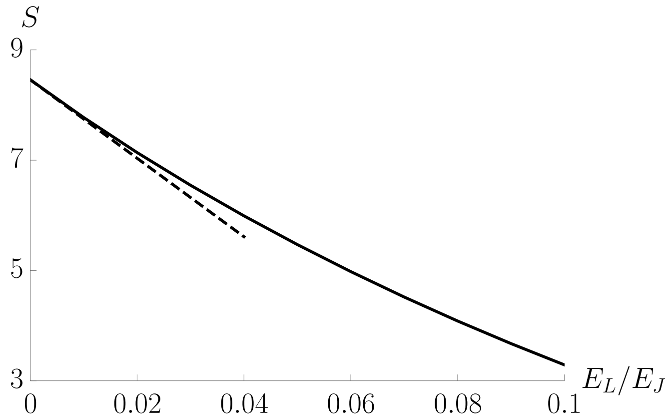


Рис. 4.5: Зависимость действия S при движении между минимумами потенциала $U_{\text{MF}}(x)$ от отношения E_L/E_J. Пунктирная линия — приближённая зависимость, найденная аналитически при малых E_L/E_J. Сплошная линия — полученная численно зависимость. График построен при $E_C = 0.1E_J$, $E_J/\omega_p = 1$.

Отсюда вероятность обнаружения флюксона в центре n–ой ячейки есть $P(n,t) = J_n^2(\Delta t)$, это затухающие колебания с частотой порядка $1/\Delta$. На рис. 4.6 построен график вероятности обнаружения флюксона в начальной позиции.

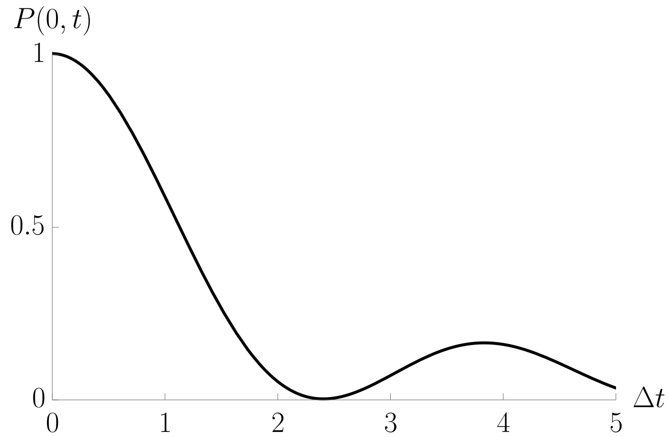


Рис. 4.6: Зависимость от времени вероятности обнаружения флюксона в начальной позиции в длинном параллельном массиве джозефсоновских контактов

4.3.3. Эффект Ааронова–Кашера

Эффект Ааронова–Кашера [69, 70] возникает при движении частицы с магнитном моментом в электрическом поле и является дуальным к эффекту Ааронова–Бома [71]. Рассмотрим эффект Ааронова–Кашера в кольцевом массиве на рис. 4.1б, к которому приложено внешнее напряжение V_g. Хотя флюксон и не взаимодействует с электрическим полем напрямую, действие при движении между ячейками зависит от траектории. Приложенное напряжение приводит к возникновению члена $im\alpha V_g \dot{x}$ в лагранжиане. Это полная производная по времени, которая не влияет на классические уравнения движения. Однако при туннелировании в соседнюю ячейку вклад этого члена в действие будет отличаться в зависимости от траектории:

$$\tilde{S}_{1,2} = im\alpha V_g \int\limits_{1,2} \dot{x} \mathrm{d}t. \tag{4.17}$$

Здесь траектория 1 соответствует движению по часовой стрелке, а траектория 2 — против, см. рис. 4.7. В квазиклассическом приближении волновая функция флюксона пропорциональна экспонен-

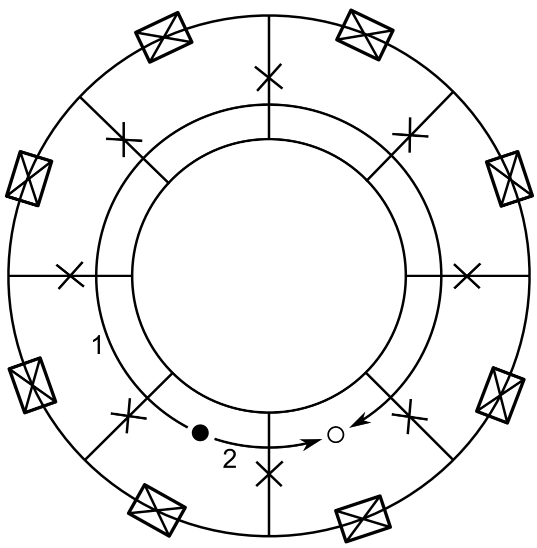


Рис. 4.7: Траектории, дающие вклад в геометрическое действие $\tilde{S}$ при туннелировании флюксона в соседнюю ячейку в кольцевом массиве. Чёрная точка — начальное положение флюксона, белая — конечное.

те действия при движении по классической траектории, то есть $\psi \sim e^{S+\tilde{S}}$, где $\tilde{S}$ — геометрическое действие, вызванное эффектом Ааронова–Кашера. Разность геометрических действий при движении в соседнюю ячейку по часовой стрелке (траектория 1 на рис. 4.7) и против (траектория 2 на рис. 4.7) пропорциональна размеру ячейки:

$$\chi = \tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 = im\alpha V_g d. \tag{4.18}$$

В приближении сильной связи разность действий χ (фаза Ааронова–Кашера) изменяет закон дисперсии флюксона:

$$E_0(p_m) = -\Delta \cos(p_m d + \chi). \tag{4.19}$$

Волновые функции одиночного флюксона в кольцевом массиве с M ячейками, как функции от номера ячейки n, есть

$$\psi_{p_m}(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{ip_m dn - i\Delta t \cos(p_m d + \chi)}$$
$$p_m = \frac{2\pi m}{M},\ m = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{4.20}$$

Отсюда получим вероятность обнаружения флюксона в n–ой ячейке, если изначально он был в ячейке $n = 0$, которая полностью описывает динамику:

$$P_M(n,t) = \frac{1}{M^2} \left| \sum_{m=0}^{M-1} \exp\left[i\frac{2\pi mn}{M} - i\Delta t \cos\left(\frac{2\pi m}{M} + \chi \right) \right] \right|^2. \tag{4.21}$$

При $M = 2$ получим $P_2(0,t) = \cos^2[\Delta\cos(\chi)t]$, то есть при $\chi = 0$ происходят колебания с частотой Δ, но при $\chi = \pi/2$ вероятность туннелирования обращается в нуль и флюксон оказывается заперт в начальной ячейке. Таким образом, эффект Ааронова–Кашера позволяет влиять на квантовую динамику флюксона с помощью приложенного к кольцевому массиву внешнего напряжения. Графики вероятностей для $M = 4, 5$ и различных значений χ построены на рис. 4.8 (сравните с рис. 4.6).

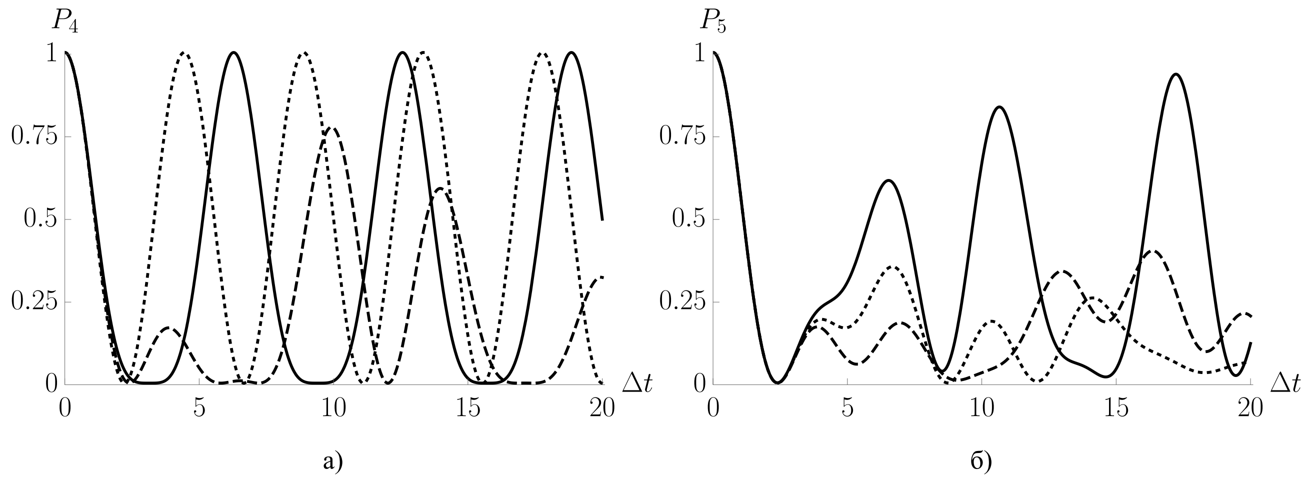


Рис. 4.8: Зависимость от времени вероятности обнаружения флюксона в начальной позиции в кольцевом параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов при а) $M = 4$, б) $M = 5$. Сплошная линия: $\chi = 0$, пунктирная линия: $\chi = \pi/8$, точечная линия: $\chi = \pi/4$.

4.3.4. Блоховские осцилляции

Рассмотрим теперь линейный массив, к которому приложен внешний ток, а внешнее напряжение отсутствует. При этом введём слабую диссипацию за счёт взаимодействия с термостатом осцилляторов, то есть через дополнительный вклад в гамильтониан [72, 73]:

$$\hat{H}_{\text{int}} = g\hat{x} \sum_i \hat{y}_i, \tag{4.22}$$

где $\hat{y}_i$ — координаты осцилляторов термостата. Уравнение Гейзенберга для импульса $\hat{p}$:

$$\dot{\hat{p}} = -\left[\hat{p}, \hat{H}\right] - [\hat{p}, \hat{H}_{\text{int}}]. \tag{4.23}$$

Первый коммутатор в правой части уравнения это производная по времени координаты, то есть

$$\left[\hat{p}, \hat{H}\right] = \dot{\hat{x}} = \frac{\mathrm{d}E_0(p)}{\mathrm{d}p}. \tag{4.24}$$

Взаимодействие с термостатом после усреднения по входящим в него осцилляторам приведёт к уравнению движения

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{2\pi E_J}{d}\frac{I}{I_c} - \gamma m \frac{\mathrm{d}E_0(p)}{\mathrm{d}p} = \\ &= \frac{2\pi E_J}{d}\frac{I}{I_c} + \frac{\gamma m \Delta}{d}\sin pd. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Здесь γ — обратное время затухания, характеризующее взаимодействие с термостатом. Аналогичное уравнение было получено применительно к длинному джозефсоновскому контакту в работе [74].

Зависимость напряжения от времени и вольт–амперная характеристика

Напряжение зависит от координаты флюксона и в квантовом пределе

$$\begin{aligned} 2e\hat{V} = \dot{\hat{\varphi}} = \frac{2\pi\dot{\hat{x}}}{d} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2e\langle\hat{V}\rangle = \frac{2\pi}{d}\frac{\mathrm{d}E_0(p)}{\mathrm{d}p}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Так как $\dot{x} \sim p$, зависимость напряжения от времени можно получить, решив уравнение

$$\dot{p} = \frac{2\pi E_J}{d}\frac{I}{I_c} + \frac{\gamma m \Delta}{d}\sin pd. \tag{4.27}$$

Оно имеет стационарное решение $\dot{p} = 0$ при

$$I < I_t = \frac{2\pi\gamma\Delta}{\omega_p^2} I_c. \tag{4.28}$$

Тогда для напряжения получим

$$\langle\hat{V}\rangle_{I<I_t} = \frac{\omega_p^2}{2e}\frac{I}{I_t}. \tag{4.29}$$

При $I > I_t$ решение нестационарно и периодически колеблется со временем. Обозначим $z = pd$, $\tau = \omega_0 t$, $a = I/I_c$, где $\omega_0 = \pi I_t/e$ — характерная частота блоховских осцилляций. Тогда решение уравнения:

$$z(\tau) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{a^2-1}\,\mathrm{tg}\,\frac{(\tau-\tau_0)\sqrt{a^2-1}}{2} + 1}{a}\right]. \tag{4.30}$$

Это периодическая функция и решение $p(t)$ имеет период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{I_t}{\sqrt{I^2 - I_t^2}}. \tag{4.31}$$

На рис. 4.9а изображена зависимость напряжения от времени $V(t)$, вычисленная как

$$2e\langle\hat{V}(t)\rangle = \frac{2\pi}{d}\frac{\mathrm{d}E_0(p)}{\mathrm{d}p} = 2\pi\Delta\sin\left[p(t)d\right]. \tag{4.32}$$

Усредняя полученные решения по времени получим зависимость среднего значения напряжения от тока, то есть вольт–амперную характеристику:

$$\langle\langle\hat{V}\rangle\rangle_t = \begin{cases} \dfrac{\pi\Delta}{e}\cdot\dfrac{I-\sqrt{I^2-I_t^2}}{I_t}, & I > I_t \\ \dfrac{\pi\Delta}{e}\cdot\dfrac{I}{I_t}, & I < I_t \end{cases}. \tag{4.33}$$

Она имеет характерный вид блоховского ”носа” (рис. 4.9б), что свидетельствует о наличии блоховских осцилляций в системе [75].

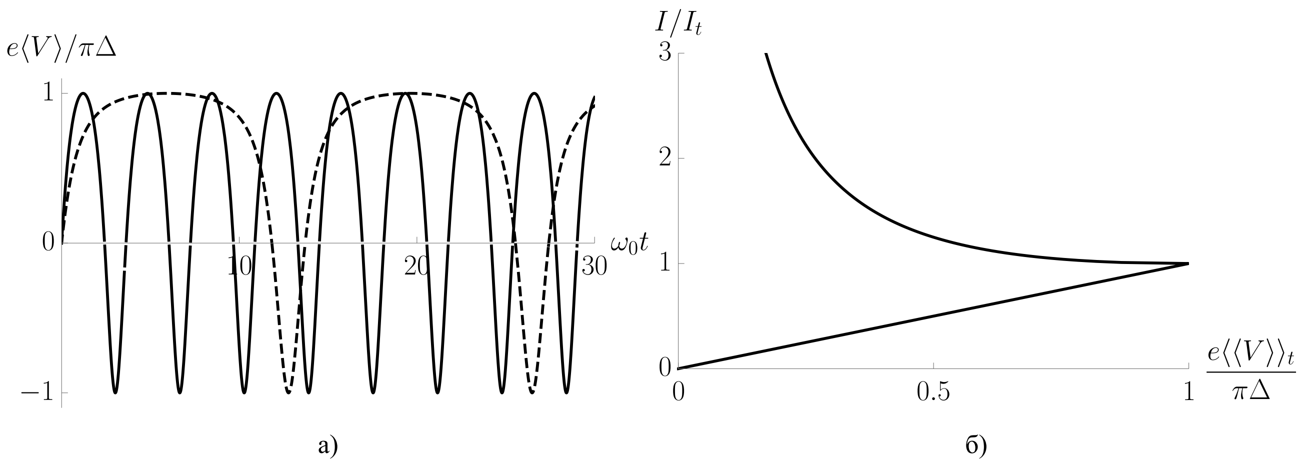


Рис. 4.9: Зависимость от времени напряжения (а) и вольт–амперная характеристика (б). На графике а) сплошная линия построена при $I/I_t = 2$, пунктирная — при $I/I_t = 1.1$.

Вычисления в данном параграфе не учитывают туннелирование Ландау–Зиннера в верхние энергетические зоны $E_m(p), m > 0$. Вероятность туннелирования пропорциональна $\exp\left(-\pi\omega_p^2 md/F\right)$, где $F = 2\pi E_J I/(I_c d)$ — сила, действующая на частицу в периодическом потенциале. То есть, туннелированием Ландау–Зиннера можно пренебречь при $I \ll I_c$.

Защищаемые положения

1. Обнаружен квантовый фазовый переход в сверхизлучательное состояние при стремящейся к бесконечности константе связи в расширенной модели Дике с отсутствием прямого взаимодействия между двухуровневыми системами.

2. Дополнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике. А именно, найдена область неустойчивости нормальной фазы при большой константе связи. Если система находится в этой области, то под действием внешнего возмущения происходит переход в сверхизлучательную фазу. Минимальное возмущение, необходимое для перехода, стремится к нулю с ростом константы связи.

3. С помощью эффективного потенциала в адиабатическом приближении Борна–Оппенгеймера наглядно продемонстрированы свойства основного состояния расширенной модели Дике. В частности, взаимное расположение минимумов эффективного потенциала позволяет сделать вывод о том сверхизлучательной будет фаза после перехода или субизлучательной.

4. Обнаружено спонтанное нарушение симметрии в расширенной модели Дике путём применения к основному состоянию гамильтониана метода некоммутирующих пределов бесконечной константы связи и бесконечно малого внешнего сдвига положения равновесия фотонного осциллятора. Также, эффективный потенциал даёт интуитивное понимание механизма спонтанного нарушения симметрии.

5. Для квазиклассической динамики обыкновенной модели Дике получены уравнения движения, допускающие аналитическое решение.

6. Показано, что квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике представляет собой периодические биения проекции спина и напряжённости электрического поля в полости. В результате образуется состояние ”связанной светимости”, в котором происходит перекачка энергии от двухуровневых систем к электромагнитному полю и обратно.

7. Продемонстрирован способ создания высокой кинетической индуктивности в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. Высокая кинетическая индуктивность достигается за счёт включения в ячейки массива большого количество дополнительных джозефсоновских контактов с малой зарядовой энергией. Благодаря ей размер флюксона умень-

шается до размера одной ячейки, что приводит к возникновению квантовой, а не классической динамики.

8. Исследована макроскопическая квантовая динамика флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. Показано, что при наличии внешнего тока в линейной конфигурации массива квантовая динамика флюксона представляет собой блоховские осцилляции. Также показано, что в кольцевом массиве возникает эффект Ааронова–Кашера, который позволяет влиять на динамику флюксона за счёт приложенного к массиву напряжения.

Приложение А

Динамика осциллятора в потенциале $-U_0 \cos\varphi$

А.1. Решение уравнений движения в потенциале $-U_0 \cos\varphi$

Задачу об осцилляторе в потенциале $U = -U_0 \cos\varphi$ с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} - U_0 \cos\varphi \tag{А.1}$$

можно решить, воспользовавшись законом сохранения энергии. Пусть в начальный момент времени осциллятор находится в точке $\varphi = 0$ и полная энергия есть

$$E = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} - U_0 \cos\varphi. \tag{А.2}$$

Разделяя переменные и интегрируя получим

$$\int\limits_0^t \mathrm{d}\tau = \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int\limits_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{E/U_0 + \cos\phi}}. \tag{А.3}$$

Перепишем подкоренное выражение как

$$\begin{aligned} &\frac{E}{U_0} + \cos\phi = \frac{E}{U_0} + 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2k}\left(1 - k\sin^2\frac{\phi}{2}\right) \\ &k = \frac{2}{1 + E/U_0}. \end{aligned} \tag{А.4}$$

Тогда интеграл в правой части сведётся к эллиптическому интегралу первого рода:

$$\int\limits_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{E/U_0 + \cos\phi}} = \sqrt{2k} \int\limits_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k\sin^2\frac{\phi}{2}}} = \sqrt{2k} F\left(\frac{\varphi}{2}, k\right), \tag{А.5}$$

где $F(x, k)$ — эллиптический интеграл первого рода.

Амплитуда Якоби $\mathrm{am}(x, k)$ является обратной функцией к эллиптическому интегралу первого рода, то есть $\mathrm{am}(F(x, k), k) = x$. Это позволяет получить зависимость $\varphi(t)$:

$$t = \sqrt{\frac{mk}{U_0}} F\left(\frac{\varphi}{2}, k\right) \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{U_0}{mk}} t, k\right). \tag{А.6}$$

Также косинус и синус амплитуды Якоби есть косинус и синус Якоби соответственно, то есть $\cos(\mathrm{am}(\varphi, k)) = \mathrm{cn}(\varphi, k)$ и $\sin(\mathrm{am}(\varphi, k)) = \mathrm{sn}(\varphi, k)$. Тогда для синуса и косинуса координаты получим

$$\begin{aligned} \sin\frac{\varphi(t)}{2} &= \mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{U_0}{mk}}t, k\right) \\ \cos\frac{\varphi(t)}{2} &= \mathrm{cn}\left(\sqrt{\frac{U_0}{mk}}t, k\right). \end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2. Движение в двухъямном потенциале

Решение уравнений движения в двухъямном потенциале также выражаются через функции Якоби. Рассмотрим частицу в потенциале $U = U_0(x^2 - a^2)^2 - U_0 a^4 = U_0 x^4 - 2U_0 a^2 x^2$. Аналогично предыдущему параграфу, запишем полную энергию:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U_0 x^4 - 2U_0 a^2 x^2. \tag{A.8}$$

Сделаем замену $x = x_0 \cos(\varphi/2)$, где x_0 — корень многочлена $E/U_0 - \chi^4 + 2a^2\chi^2$ [76]:

$$x_0^2 = a^2 + \sqrt{a^4 + \frac{E}{U}}. \tag{A.9}$$

Тогда уравнение запишется как

$$\begin{aligned} &\frac{m\dot{\varphi}^2}{2} - 2U_0 x_0^2 \cos\varphi = \frac{4E}{x_0^2} + 2U_0 x_0^2 = \\ &= 6U_0 x_0^2 - 8U_0 a^2. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Используя результаты предыдущего параграфа:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi}{2} = \mathrm{am}\left(x_0\sqrt{\frac{2U_0}{mk}}t, k\right) \Rightarrow x = x_0\,\mathrm{cn}\left(x_0\sqrt{\frac{2U_0}{mk}}t, k\right) \\ &k = \frac{x_0^4}{E/U_0 + x_0^4} = \frac{x_0^2}{2x_0^2 - 2a^2}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

A.2.1. Отрицательная полная энергия

При отрицательной полной энергии $E < 0$

$$k = \frac{x_0^4}{E/U_0 + x_0^4} > 1. \tag{A.12}$$

Тогда можно перейти к эллиптической функции с параметром меньше единицы с помощью равенства [68]

$$\mathrm{cn}(u, k) = \mathrm{dn}\left(\sqrt{k}u, \frac{1}{k}\right). \tag{A.13}$$

A.2.2. Связь с движением в потенциале $\sim \cos(\varphi)$

Из уравнения (A.10) видно, что движение в двухъямном потенциале может быть сведено к движению в потенциале $-2U_0x_0^2\cos\varphi$ с начальной энергией $\tilde{E} = 6U_0x_0^2 - 8U_0a^2$. При этом, если полная энергия E движения в двухъямном потенциале выше или ниже энергии потенциального барьера U_0, то же самое выполняется для энергии $\tilde{E}$ и потенциального барьера $2U_0x_0^2$. Схематически это изображено на рисунке A.1. Отсюда, с математической точки зрения, происходит сходство

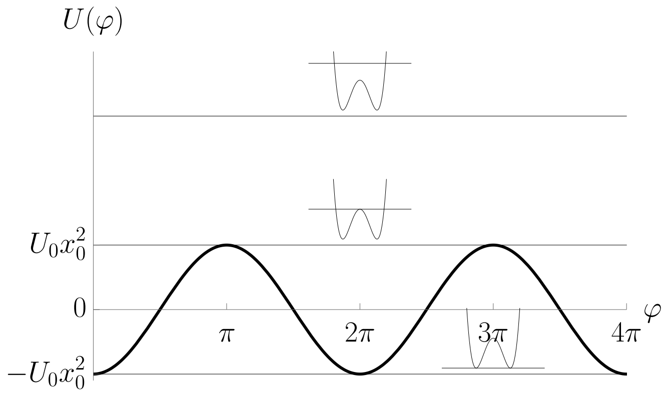


Рис. A.1: Полная энергия $\tilde{E} = 6U_0x_0^2 - 8U_0a^2$ в потенциале $-2U_0x_0^2\cos\varphi$ (горизонтальные линии) и соответствующая полная энергия при движении в потенциале $U_0x^4 - 2U_0a^2x^2$ (вставки над линиями).

решений в главе 3, полученных в двух приближениях.

Движение в потенциале $-2U_0x_0^2\cos\varphi$ описывает эволюцию угла отклонения маятника. Если движение финитное, то есть полная энергия меньше энергии потенциального барьера $2U_0x_0^2$, $\varphi \in [-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n]$. Тогда соответствующая динамика величины $x_0\cos(\varphi/2)$ в двухъямном потенциале происходит в одной из его ям. Если же энергия выше энергии потенциального барьера, то движение в косинусоидальном потенциале инфинитно, а $x_0\cos(\varphi/2)$ колеблется между двумя ямами и меняет знак. При этом движение в двухъямном потенциале всегда финитно, что согласуется с ограниченностью функции $\cos(\varphi/2)$.

Приложение В

Численные методы исследования расширенной модели Дике

В.1. Матрицы операторов

Для проведения численных расчётов можно воспользоваться численными методами работы с матрицами, если представить квантовые операторы в компьютерной программе их матрицами в некотором базисе. В качестве базиса были выбраны состояния $|n, s_z\rangle$, где $|n\rangle$ — n–ое состояние фотонного осциллятора, $|s_z\rangle$ — собственное состояние оператора $\hat{S}_z$ [77]. Состояние $|n, s_z\rangle$ принадлежит произведению гильбертовых пространств фотонов и спина $\mathcal{H}_{\text{Ph}} \otimes \mathcal{H}_{\text{S}}$. Запишем сначала матрицы фотонных и спиновых операторов в соответствующих пространствах отдельно. То есть, операторы $\hat{p}$ и $\hat{q}$ разложим в базисе $|n\rangle$, а операторы $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ — в базисе $|s_z\rangle$. В пространстве фотонов $\mathcal{H}_{\text{Ph}}$ матрицы фотонных операторов есть

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2}\right] = \omega[\hat{n}] = \omega n \delta_{n,n'} \\
&[\hat{p}] = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\Big(\sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1} - \sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}\Big) \\
&[\hat{q}] = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}\Big(\sqrt{n'+1}\delta_{n,n'+1} + \sqrt{n'}\delta_{n,n'-1}\Big).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Так как пространство фотонных состояний бесконечномерно, для численных расчётов его следует обрезать при достаточно большом номере состояния осциллятора $\mathcal{N} \sim 100$ и индекс n пробегает значения от 0 до $\mathcal{N}$. Матрицы спиновых операторов в пространстве $\mathcal{H}_{\text{S}}$ (индекс s_z меняется от $-S$ до S):

$$\begin{aligned}
&[\hat{S}_z] = s_z \delta_{s_z, s'_z} \\
&[\hat{S}_y] = \frac{1}{2i}\Big(\sqrt{S(S+1) - s'_z(s'_z+1)}\delta_{s_z, s'_z+1} - \sqrt{S(S+1) - s'_z(s'_z-1)}\delta_{s_z, s'_z-1}\Big) \\
&[\hat{S}_x] = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{S(S+1) - s'_z(s'_z+1)}\delta_{s_z, s'_z+1} + \sqrt{S(S+1) - s'_z(s'_z-1)}\delta_{s_z, s'_z-1}\Big).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Гильбертово произведение операторов из разных пространств на матричном языке превращается в произведение Кронеккера их матриц. Тогда матрица гамильтониана расширенной модели Дике, принадлежащего пространству $\mathcal{H}_{\mathrm{Ph}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{S}}$, есть

$$[\hat{H}_{\mathrm{ExD}}] = \omega[\hat{n}] \otimes \mathbb{I}_{\mathrm{S}} + g[\hat{p}] \otimes [\hat{S}_y] + (1+\varepsilon)\frac{g^2}{2}[\hat{S}_y]^2 \otimes \mathbb{I}_{\mathrm{Ph}} - \omega_0[\hat{S}_z] \otimes \mathbb{I}_{\mathrm{Ph}}. \tag{B.3}$$

Здесь произведение Кронеккера матриц операторов тоже обозначено символом $\otimes$, однако путаницы не возникает, так как его смысл понятен из контекста: при умножении операторов или пространств произведение гильбертово, при умножении матриц — Кронеккера. $\mathbb{I}_{\mathrm{S}}$ и $\mathbb{I}_{\mathrm{Ph}}$ — единичные матрицы в пространствах спина и фотона соответственно.

Произведение Кронеккера матриц $[A]$ и $[B]$ определяется следующим образом:

$$[A] \otimes [B] = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot [B] & \dots & a_{1N} \cdot [B] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} \cdot [B] & \dots & a_{MN} \cdot [B] \end{pmatrix}, \tag{B.4}$$

где M, N — число строк и столбцов матрицы $[A]$. То есть, каждый элемент первой матрицы умножается на вторую матрицу целиком. Размерность результирующей матрицы равна произведению размерностей исходных матриц.

B.2. Собственные состояния и собственные значения гамильтониана

Собственные состояния и соответствующие им энергии гамильтониана расширенной модели Дике можно получить численной диагонализацией матрицы (B.3). Алгоритмы численной диагонализации матриц реализованы во множестве программ и библиотек, так что можно воспользоваться готовыми решениями.

В результате работы программы будут получены пары {собственное значение, собственный вектор}. Собственный вектор имеет размерность $\mathcal{N}S$, его элементы — коэффициенты разложения волновой функции собственного состояния гамильтониана в базисе $|n, s_z\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k \left|n, s_z\right\rangle_k, \tag{B.5}$$

где $|\psi\rangle$ — собственное состояние, c_k — элементы собственного вектора матрицы гамильтониана. Базисные состояния $|n, s_z\rangle_k$ при этом являются элементами вектора

$$\Big(|0,-S\rangle \quad \dots \quad |0,S\rangle \quad |1,-S\rangle \quad \dots \quad |1,S\rangle \quad \dots \quad |\mathcal{N},-S\rangle \quad \dots \quad |\mathcal{N},S\rangle\Big)^T. \tag{B.6}$$

Данный порядок получается при записи гамильтоновой матрицы в виде (B.3), также он удобен при вычислении частичного следа матриц плотности, см параграф 1.5.3.

Основное состояние тогда определяется собственным вектором с наименьшим соответствующим ему собственным значением.

B.3. Операторы сдвига и поворота, энтропия

Оператор сдвига, необходимый для построения когерентных состояния, определяется как экспонента операторов. Например, для осциллятора

$$\hat{D}_\alpha = \exp\left\{ i\sqrt{2\omega}\hat{q}\,\mathrm{Im}\,\alpha - i\sqrt{\frac{2}{\omega}}\hat{p}\,\mathrm{Re}\,\alpha \right\}. \tag{B.7}$$

Формально экспонента матрицы вводится с помощью ряда, то есть

$$\exp\{[A]\} = \sum_k \frac{1}{k!}[A]^k. \tag{B.8}$$

Однако, с вычислительной точки зрения, это не оптимальный метод её нахождения. Эффективные численные методы нахождения экспоненты матрицы также существуют в виде готовых библиотек. С их помощью можно эффективно находить операторы сдвига осциллятора и поворота спина, а затем получать когерентные состояния. Последнее делается умножением матрицы оператора сдвига на вектор состояния $|n = 0\rangle$ или умножением матрицы оператора поворота

$$\hat{R}(\theta, \phi) = \exp\left\{ i\theta(\hat{S}_x \sin\phi - \hat{S}_y \cos\phi) \right\} \tag{B.9}$$

на вектор состояния $|s_z = S\rangle$.

В определение энтропии состояния входит логарифм матрицы плотности:

$$\mathcal{S} = -\operatorname{Tr}(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}). \tag{B.10}$$

Аналогично экспоненте матрицы, логарифм определяется через разложение в ряд:

$$\ln[A] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}([A] - \mathbb{I})^k, \tag{B.11}$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица. Однако существуют более эффективные численные методы его вычисления.

Литература

[1] S. S. Seidov and S. I. Mukhin, “Spontaneous symmetry breaking and Husimi q-functions in extended Dicke model,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 53, p. 505301, Nov 2020.

[2] S. Mukhin, A. Mukherjee, and S. Seidov, “Dicke model semiclassical dynamics in superradiant dipolar phase in the “bound luminosity” state,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 132, p. 658–662, Apr 2021.

[3] S. S. Seidov and M. V. Fistul, “Quantum dynamics of a single fluxon in josephson-junction parallel arrays with large kinetic inductances,” *Phys. Rev. A*, vol. 103, p. 062410, Jun 2021.

[4] A. J. Beekman, L. Rademaker, and J. van Wezel, “An Introduction to Spontaneous Symmetry Breaking,” *SciPost Phys. Lect. Notes*, p. 11, 2019.

[5] J. van Wezel and J. van den Brink, “Spontaneous symmetry breaking in quantum mechanics,” *American Journal of Physics*, vol. 75, p. 635, 3 2007.

[6] R. H. Dicke, “Coherence in spontaneous radiation processes,” *Phys. Rev.*, vol. 93, pp. 99–110, Jan 1954.

[7] B. M. Garraway, “The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 369, no. 1939, pp. 1137–1155, 2011.

[8] K. Hepp and E. H. Lieb, “On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model,” *Annals of Physics*, vol. 76, no. 2, pp. 360 – 404, 1973.

[9] C. Emary and T. Brandes, “Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 67, p. 066203, 06 2003.

[10] P. Perez-Fernandez, A. Relaño, J. Arias, P. Cejnar, J. Dukelsky, and J.-E. García-Ramos, “Excited-state phase transition and onset of chaos in quantum optical models,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 83, p. 046208, 04 2011.

[11] H. Walther, “Experiments on cavity quantum electrodynamics,” *Physics Reports*, vol. 219, no. 3, pp. 263–281, 1992.

[12] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche, "Observation of self-induced rabi oscillations in two-level atoms excited inside a resonant cavity: The ringing regime of superradiance," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, pp. 1175–1178, Sep 1983.

[13] J. M. Raimond, P. Goy, M. Gross, C. Fabre, and S. Haroche, "Collective absorption of blackbody radiation by rydberg atoms in a cavity: An experiment on bose statistics and brownian motion," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49, pp. 117–120, Jul 1982.

[14] F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins, and H. J. Carmichael, "Proposed realization of the dicke-model quantum phase transition in an optical cavity qed system," *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 013804, Jan 2007.

[15] K. Härkönen, F. Plastina, and S. Maniscalco, "Dicke model and environment-induced entanglement in ion-cavity qed," *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 033841, Sep 2009.

[16] M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther, "Continuous generation of single photons with controlled waveform in an ion-trap cavity system," *Nature*, vol. 431, pp. 1075–8, 11 2004.

[17] L. Mazzola, S. Maniscalco, K. A. Suominen, and B. M. Garraway, "Reservoir cross-over in entanglement dynamics," *Quantum Information Processing*, vol. 8, pp. 577–585, Aug. 2009.

[18] G. Guthöhrlein, M. Keller, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther, "A single ion as a nanoscopic probe of an optical field," *Nature*, vol. 414, pp. 49–51, 12 2001.

[19] J. Fink, M. Goeppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. Leek, A. Blais, and A. Wallraff, "Climbing the Jaynes-Cummings ladder and observing its sqrt(n) nonlinearity in a cavity qed system," 03 2009.

[20] J. M. Fink, R. Bianchetti, M. Baur, M. Göppl, L. Steffen, S. Filipp, P. J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff, "Dressed collective qubit states and the Tavis-Cummings model in circuit qed," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 083601, Aug 2009.

[21] T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl, E. Menzel, F. Hocke, M. Schwarz, J. García-Ripoll, D. Zueco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, and R. Gross, "Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime," *Nature Physics*, vol. 6, pp. 772–, 07 2010.

[22] R. Schoelkopf and S. Girvin, "Wiring up quantum systems," *Nature*, vol. 451, pp. 664–669, 2008.

[23] A. Wallraff, D. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. Girvin, and R. Schoelkopf, "Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics," *Nature*, vol. 431, pp. 162–7, 10 2004.

[24] T. Holstein and H. Primakoff, "Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet," *Phys. Rev.*, vol. 58, pp. 1098–1113, Dec 1940.

[25] L. Bakemeier, A. Alvermann, and H. Fehske, "Dynamics of the Dicke model close to the classical limit," *Physical Review A*, vol. 88, 10 2013.

[26] K. C. Stitely, A. Giraldo, B. Krauskopf, and S. Parkins, "Nonlinear semiclassical dynamics of the unbalanced, open Dicke model," *Phys. Rev. Research*, vol. 2, p. 033131, Jul 2020.

[27] D. De Bernardis, P. Pilar, T. Jaako, S. De Liberato, and P. Rabl, "Breakdown of gauge invariance in ultrastrong-coupling cavity QED," *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 053819, Nov 2018.

[28] T. Jaako, Z.-L. Xiang, J. J. Garcia-Ripoll, and P. Rabl, "Ultrastrong-coupling phenomena beyond the Dicke model," *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 033850, Sep 2016.

[29] D. De Bernardis, T. Jaako, and P. Rabl, "Cavity quantum electrodynamics in the nonperturbative regime," *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 043820, Apr 2018.

[30] S. I. Mukhin and N. V. Gnezdilov, "First-order dipolar phase transition in the Dicke model with infinitely coordinated frustrating interaction," *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 053809, May 2018.

[31] J. Keeling, "Coulomb interactions, gauge invariance, and phase transitions of the Dicke model," *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 19, p. 295213, jun 2007.

[32] K. Rzażewski, K. Wódkiewicz, and W. Żakowicz, "Phase transitions, two-level atoms, and the A^2 term," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 35, pp. 432–434, Aug 1975.

[33] I. Bialynicki-Birula and K. Rza¸żewski, "No-go theorem concerning the superradiant phase transition in atomic systems," *Phys. Rev. A*, vol. 19, pp. 301–303, Jan 1979.

[34] A. Stokes and A. Nazir, "Uniqueness of the phase transition in many-dipole systems," *arXiv:1905.10697*, 05 2019.

[35] S. Ashhab, "Superradiance transition in a system with a single qubit and a single oscillator," *Phys. Rev. A*, vol. 87, p. 013826, Jan 2013.

[36] R. Imai and Y. Yamanaka, "Stability of symmetry breaking states in finite-size Dicke model with photon leakage," *Physics Letters A*, vol. 382, no. 46, pp. 3333 – 3338, 2018.

[37] L.-T. Shen, Z.-B. Yang, H.-Z. Wu, and S.-B. Zheng, "Quantum phase transition and quench dynamics in the anisotropic Rabi model," *Phys. Rev. A*, vol. 95, p. 013819, Jan 2017.

[38] L. Shen, Z. Shi, Z. Yang, H. Wu, Z. Zhong, and S. Zheng, "A similarity of quantum phase transition and quench dynamics in the Dicke model beyond the thermodynamic limit," *EPJ Quantum Technology*, vol. 7, 12 2020.

[39] M.-J. Hwang, R. Puebla, and M. B. Plenio, "Quantum phase transition and universal dynamics in the Rabi model," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, p. 180404, Oct 2015.

[40] W. Saidi and D. Stroud, "Eigenstates of a small Josephson junction coupled to a resonant cavity," *Physical Review B*, vol. 65, 10 2001.

[41] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box," *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 042319, Oct 2007.

[42] R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of the radiation field," *Phys. Rev.*, vol. 131, pp. 2766–2788, Sep 1963.

[43] J. Ma, X. Wang, C. Sun, and F. Nori, "Quantum spin squeezing," *Physics Reports*, vol. 509, no. 2, pp. 89 – 165, 2011.

[44] J. M. Radcliffe, "Some properties of coherent spin states," *Journal of Physics A: General Physics*, vol. 4, pp. 313–323, may 1971.

[45] K. Husimi, "Some formal properties of the density matrix," *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, vol. 22, no. 4, pp. 264–314, 1940.

[46] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. Cambridge University Press, 2004.

[47] Y. S. Kivshar and B. A. Malomed, "Dynamics of solitons in nearly integrable systems," *Reviews of Modern Physics*, vol. 61, no. 4, p. 763, 1989.

[48] A. Ustinov, "Solitons in josephson junctions," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 123, no. 1, pp. 315 – 329, 1998. Annual International Conference of the Center for Nonlinear Studies.

[49] T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.

[50] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, "Solitons in nonlinear lattices," *Reviews of Modern Physics*, vol. 83, no. 1, p. 247, 2011.

[51] A. C. Scott, "Solitons in biological molecules," *Emerging Syntheses In Science*, p. 133, 2018.

[52] I. Vernik, N. Lazarides, M. Sørensen, A. Ustinov, N. F. Pedersen, and V. Oboznov, "Soliton bunching in annular josephson junctions," *Journal of applied physics*, vol. 79, no. 10, pp. 7854–7859, 1996.

[53] A. Wallraff, A. Ustinov, V. Kurin, I. Shereshevsky, and N. Vdovicheva, "Whispering vortices," *Physical review letters*, vol. 84, no. 1, p. 151, 2000.

[54] M. Fistul and A. Ustinov, "Libration states of a nonlinear oscillator: Resonant escape of a pinned magnetic fluxon," *Physical Review B*, vol. 63, no. 2, p. 024508, 2000.

[55] R. Fazio and H. Van Der Zant, "Quantum phase transitions and vortex dynamics in superconducting networks," *Physics Reports*, vol. 355, no. 4, pp. 235–334, 2001.

[56] H. Van der Zant, W. Elion, L. Geerligs, and J. Mooij, "Quantum phase transitions in two dimensions: Experiments in josephson-junction arrays," *Physical Review B*, vol. 54, no. 14, p. 10081, 1996.

[57] T. Kato and M. Imada, "Macroscopic quantum tunneling of a fluxon in a long josephson junction," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 65, no. 9, pp. 2963–2975, 1996.

[58] Z. Hermon, A. Stern, and E. Ben-Jacob, "Quantum dynamics of a fluxon in a long circular josephson junction," *Physical Review B*, vol. 49, no. 14, p. 9757, 1994.

[59] A. Shnirman, E. Ben-Jacob, and B. Malomed, "Tunneling and resonant tunneling of fluxons in a long josephson junction," *Physical Review B*, vol. 56, no. 22, p. 14677, 1997.

[60] A. Wallraff, Y. Koval, M. Levitchev, M. Fistul, and A. Ustinov, "Annular long josephson junctions in a magnetic field: engineering and probing the fluxon interaction potential," *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 118, no. 5, pp. 543–553, 2000.

[61] A. Wallraff, A. Lukashenko, J. Lisenfeld, A. Kemp, M. Fistul, Y. Koval, and A. Ustinov, "Quantum dynamics of a single vortex," *Nature*, vol. 425, no. 6954, pp. 155–158, 2003.

[62] O. Braun and Y. Kivshar, "Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model," *Physical review. B, Condensed matter*, vol. 43, pp. 1060–1073, 02 1991.

[63] P. Rosenau, "Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit," *Physics Letters A*, vol. 118, no. 5, pp. 222–227, 1986.

[64] J. Cohn, A. Safavi-Naini, R. J. Lewis-Swan, J. G. Bohnet, M. Gärttner, K. A. Gilmore, J. E. Jordan, A. M. Rey, J. J. Bollinger, and J. K. Freericks, "Bang-bang shortcut to adiabaticity in the Dicke model as realized in a Penning trap experiment," *New Journal of Physics*, vol. 20, p. 055013, may 2018.

[65] A. Relaño, M. A. Bastarrachea-Magnani, and S. Lerma-Hernández, "Approximated integrability of the Dicke model," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 116, p. 50005, Dec 2016.

[66] M. A. Bastarrachea-Magnani and J. G. Hirsch, "Peres lattices and chaos in the Dicke model," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 512, p. 012004, may 2014.

[67] S. Waldenstrøm and K. Naqvi, "The overlap integrals of two harmonic-oscillator wavefunctions: some remarks on originals and reproductions," *Chemical Physics Letters*, vol. 85, no. 5, pp. 581 – 584, 1982.

[68] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York City: Dover, ninth dover printing, tenth gpo printing ed., 1964.

[69] Y. Aharonov and A. Casher, "Topological quantum effects for neutral particles," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 319–321, Jul 1984.

[70] J. R. Friedman and D. V. Averin, "Aharonov-casher-effect suppression of macroscopic tunneling of magnetic flux," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 050403, Jan 2002.

[71] Y. Aharonov and D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory," *Phys. Rev.*, vol. 115, pp. 485–491, Aug 1959.

[72] T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, and W. Zwerger, *Quantum transport and dissipation*, vol. 3. Wiley-Vch Weinheim, 1998.

[73] A. Caldeira and A. J. Leggett, "Quantum tunnelling in a dissipative system," *Annals of physics*, vol. 149, no. 2, pp. 374–456, 1983.

[74] K. K. Likharev and A. B. Zorin, "Theory of the Bloch-wave oscillations in small josephson junctions," *J. Low Temp. Phys.; (United States)*, vol. 59, 5 1985.

[75] K. K. Likharev, *Dynamics of Josephson junctions and circuits*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986.

[76] A. Brizard and M. Westland, "Motion in an asymmetric double well," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 43, 02 2016.

[77] M. Bastarrachea-Magnani and J. Hirsch, "Numerical solutions of the Dicke hamiltonian," *Revista Mexicana de Fisica*, vol. 57, 08 2011.