

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Сеидов Сеидали Сахиб оглы

Макроскопические квантовые явления в системах джозефсоновских контактов взаимодействующих с электромагнитным полем

01.04.07 Физика конденсированного состояния

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Мухин Сергей Иванович  
Научный консультант: к. ф.-м. н., с.н.с. Фистуль Михаил Викторович

Москва, 2021

## Общая характеристика работы

**Объект и предмет исследования.** В работе рассмотрены две задачи о взаимодействии системы джозефсоновских контактов с электромагнитным полем. В первой задаче ансамбль джозефсоновских контактов помещён в одномодовую микроволновую полость. В приближении большой зарядовой энергии джозефсоновских контактов гамильтониан системы сводится к гамильтониану расширенной модели Дике, в которой взаимодействие между двухуровневыми системами осуществляется через их связь с фотонной модой в резонаторе. Вторая задача посвящена макроскопической квантовой динамике флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Наличие последней приводит к замене классической динамики флюксона на макроскопическую квантовую динамику. Система описывается с помощью модели Френкеля–Конторовой и квантовая динамика флюксона происходит в периодическом потенциале Пайерлса–Набаро.

В работе исследована расширенная модель Дике с произвольным знаком взаимодействия между двухуровневыми системами. В зависимости от знака происходит фазовый переход в разные фазы — сверхизлучательную или субизлучательную. С помощью метода некоммутирующих пределов были исследованы свойства фазового перехода при различном типе взаимодействия между двухуровневыми системами и была уточнена фазовая диаграмма в области больших констант связи. Показано, что в случае отсутствия прямого взаимодействия, то есть при взаимодействии двухуровневых систем только через взаимодействие с резонатором, происходит переход в сверхизлучательную фазу. Также были найдены решения квазиклассических уравнений движения для обыкновенной модели Дике.

Параллельные массивы квантовых джозефсоновских контактов являются удобной системой для исследования динамики магнитных флюксонов — кинков джозефсоновской фазы. В работе показано, что включение в ячейки массива большого количества дополнительных джозефсоновских контактов с малой зарядовой энергией позволяет добиться высокой кинетической индуктивности массива. Тогда размер флюксона сжимается до размера одной ячейки, то есть на масштабе одной ячейки происходит изменение джозефсоновской фазы. За счёт этого удаётся добиться квантовой, а не классической, динамики флюксона. В работе исследована макроскопическая квантовая динамика флюксона в двух конфигурациях параллельного массива джозефсоновских контактов: длинной линейной и короткой кольцевой. Показано существование квантовых эффектов в динамике, а именно: блоховских осцилляций и эффекта Ааронова–Кашера.

**Цель работы.** В работе преследовались две цели. Первая цель — исследование квантового фазового перехода в расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами, а также исследование динамики обыкновенной модели Дике. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Найти энергию основного состояния расширенной модели Дике и его волновую функцию в пределе большой константы связи и при наличии малого внешнего нарушающего симметрию возмущения

2. Применить метод некоммутирующих пределов к волновой функции основного состояния и получить выражения для границ фаз на фазовой диаграмме
3. Построить фазовую диаграмму расширенной модели Дике численно и сравнить с полученными аналитическими результатами
4. Исследовать фазовую диаграмму с помощью функций Хусими системы в различных фазах
5. Записать и решить квазиклассические уравнения движения обыкновенной модели Дике

Вторая цель — исследование макроскопической квантовой динамики одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. Для этого были поставлены задачи:

1. Из общего вида потенциальной энергии параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов получить потенциальную энергию массива с одиночным захваченным магнитным флюксоном
2. Описать туннелирование флюксона между соседними ячейками параллельного массива как квантовую динамику в периодическом потенциале (Пайерлса–Набарро)
3. Исследовать макроскопическую квантовую динамику флюксона в длинном линейном параллельном массиве джозефсоновских контактов в присутствии слабой диссипации и в коротком кольцевом массиве

**Разработанность темы.** В работах по расширенной модели Дике случай отсутствующего прямого взаимодействия между двухуровневыми системами не рассматривался, были исследованы только случаи с ненулевым прямым взаимодействием. Существование фазового перехода при отсутствии прямого взаимодействия между двухуровневыми системами считалось спорным, так как была сформулирована no-go theorem, запрещающая переход. В работах по динамике обыкновенной модели Дике было показано, что в сверхизлучательной фазе существуют две устойчивые стационарные точки, а движение системы есть колебания между ними. Уравнения движения в квазиклассическом приближении, допускающие аналитическое решение, получены не были.

Флюксоны рассматривались только в параллельных массивах квантовых джозефсоновских контактов с низкой кинетической индуктивностью. Последнее приводило к размазыванию флюксона вдоль массива, вследствие чего его размер превышал размер одной ячейки массива и динамика была классической. Квантовая динамика одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов не исследовалась.

**Актуальность работы.** К расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами сводится задача о взаимодействии электромагнитного поля в резонаторе с ансамблем джозефсоновских контактов. Характер их связи с полем — через калибровочно-инвариантный сдвиг сверхпроводящей фазы — приводит к рассматриваемой модели, которая также отражает калибровочно-инвариантную природу взаимодействия. В работе уточнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике, впервые продемонстрирован переход в

сверхизлучательную фазу при отсутствующем прямом взаимодействии между двухуровневыми системами.

Аналитическое решение квазиклассических уравнений движения в обыкновенной модели Дике получено впервые. Полученные результаты полезны для дальнейшего исследования динамических свойств модели Дике, таких как хаос, интегрируемость, бифуркации и так далее.

Впервые изучена когерентная макроскопическая квантовая динамика одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Предсказаны измеримые эффекты, демонстрирующие наличие именно квантовой, а не классической динамики.

**Методы исследования.** Ключевым методом исследования фазового перехода в расширенной модели Дике в работе является метод некоммутирующих пределов большой константы связи и малого внешнего возмущения. Он позволяет исследовать неустойчивость симметричной фазы и спонтанное нарушение симметрии, которое и является причиной фазового перехода. Фазовая диаграмма расширенной модели Дике исследована с помощью функций Хусими, которые были построены в её точках, соответствующих разным фазам.

Квантовая динамика флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов сведена к квантовой динамике в периодическом потенциале Пайерлса–Набарро. Последний возникает при описании параллельного массива джозефсоновских контактов в рамках модели Френкеля–Конторовой.

**Научная новизна.** Показано, что в расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами происходит квантовый фазовый переход. Примечательно, что фазовый переход происходит вследствие спонтанного нарушения симметрии, то есть не в связи с явным нарушением симметрии гамильтониана, а в связи с неустойчивостью симметричного состояния при константе связи выше критической. Исследована и уточнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике.

Найдено аналитическое решение квазиклассических уравнений движения обыкновенной модели Дике в сверхизлучательной фазе вблизи перехода. Динамика представляет собой периодические биения между двумя устойчивыми стационарными точками. Образуется так называемое состояние "связанной светимости", в котором происходит перекачка энергии между электромагнитной волной в резонаторе и двухуровневыми системами.

Исследована когерентная квантовая динамика одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой кинетической индуктивностью. Обнаружены блоховские осцилляции в длинном линейном массиве и эффект Ааронова–Кашера в коротком кольцевом.

**Научная и практическая значимость.** Полученные результаты отвечают на вопрос о возможности фазового перехода в расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами. Исследованы свойства системы на границе перехода между двумя фазами. Уточнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике.

Квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике описана дифференциальными урав-

нениями, имеющими аналитическое решение в функциях Якоби. Описано явление "связанной светимости".

Впервые показано, что высокая кинетическая индуктивность параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов, приводящая к сжатию флюксона до размера одной ячейки, позволяет добиться его квантовой, а не классической динамики. Описаны вызванные квантовой динамикой эффекты, позволяющие её обнаружить экспериментально.

#### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. В расширенной модели Дике без прямого взаимодействия между двухуровневыми системами происходит квантовый фазовый переход в сверхизлучательное состояние по константе связи электромагнитного поля с двухуровневыми системами.
2. Переход вызван спонтанным нарушением симметрии основного состояния, которое возникает при появлении сверхизлучательной фазы. Найдена минимальная величина внешнего возмущения, необходимого для такого перехода, как функция от константы связи электромагнитного поля в полости и двухуровневых систем. На фазовой диаграмме отмечена область неустойчивости.
3. Квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике в сверхизлучательной фазе представляет собой периодические биения суммарного дипольного момента двухуровневых систем и напряжённости электрического поля в полости, образуется состояние "связанной светимости". Биения происходят между двумя симметричными вырожденными сверхизлучательными состояниями.
4. Показано, что внедрение большого числа дополнительных джозефсоновских контактов в ячейки параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов позволяет добиться высокой кинетической индуктивности массива. Последнее, за счёт сжатия размера захваченного в массиве одиночного флюксона до размера одной ячейки массива, приводит к возникновению квантовой, а не классической динамики.

**Степень достоверности.** Достоверность полученных результатов основана на использовании современных теоретических методов их получения, положительной апробации работы в виде докладов на международных конференциях, публикациями результатов в реферируемых журналах по физике.

**Личный вклад.** Автор исследовал волновые функции основного состояния расширенной модели Дике при большой и малой константе связи. Им был описан механизм спонтанного нарушения симметрии и применён метод некоммутирующих пределов. Автор произвёл численные расчёты фазовой диаграммы расширенной модели Дике и функций Хусими. Также им была продемонстрирована связь решений квазиклассических уравнений движения, полученных в двух приближениях.

Автор получил потенциал Пайерлса–Набарро при описании когерентной квантовой динамики одиночного флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов с высокой

кинетической индуктивностью. Им была получена вольт–амперная характеристика длинного линейного массива и зависимость от времени колебаний напряжения в нём, свидетельствующие о существовании блоховских осцилляций. В коротком кольцевом массиве автором был описан возникающий эффект Ааронова–Кашера.

**Вклад соавторов.** Работа была проведена под руководством профессора, д.ф.-м.н. Мухина С.И. Им был предложен метод повернутого преобразования Гольштейна–Примакова, с помощью которого задача была решена аналитически в термодинамическом пределе и впервые был обнаружен фазовый переход. Также им была вычислена энергия основного состояния расширенной модели Дике во втором порядке теории возмущений для конечного полного спина и были получены решения квазиклассических уравнений движения, описывающих состояние ”связанной светимости”.

Фистуль М.В. предложил метод повышения кинетической индуктивности параллельного массива квантовых джозефсоновских контактов за счёт включения большого числа дополнительных джозефсоновских контактов в ячейки массива. Также, им было предложено описание задачи о движении одиночного флюксона в параллельном массиве джозефсоновских контактов как задачи о движении в потенциале Пайерлса–Набарро с помощью модели Френкеля–Конторовой.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертационной работы представлены в 3 печатных изданиях [1–3], рекомендованных ВАК (см. список литературы).

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1. S. S. Seidov, S. I. Mukhin. Numerical study of Dicke model with infinitely coordinated frustrating interaction // Winter school on Quantum Condensed-matter Physics, Черноголовка, Московская область, Россия, 2017.
2. S. S. Seidov, S. I. Mukhin, Suppression of chaos in a frustrated Dicke model // BASIS Foundation Summer School ”Many body theory meets quantum information”, Солнечногорск, Московская область, Россия, 2018.
3. S. S. Seidov, S. I. Mukhin, Spontaneous symmetry breaking in extended Dicke model // V International Conference on Quantum Technologies, Москва, Россия, 2019.
4. S. S. Seidov, S. I. Mukhin, Spontaneous symmetry breaking in extended Dicke model // XVIII школа-конференция молодых учёных ”Проблемы физики твёрдого тела и высоких давлений”, Сочи, Россия, 2019.
5. С. С. Сеидов, М. В. Фистуль, Квантовая динамика флюксона в цепочке параллельных джозефсоновских контактов // Вторая Международная Конференция ”Физика конденсированных состояний” ФКС-2021, Черноголовка, Московская область, Россия, 2021.

6. S. S. Seidov, M. V. Fistul, Quantum dynamics of a single fluxon in Josephson junctions parallel arrays with large kinetic inductances // VI International Conference on Quantum Technologies, онлайн, 2021.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, основного материала, изложенного в четырёх главах, списка защищаемых положений, двух приложений и списка литературы. Диссертация изложена на 80 страницах, содержит 29 рисунков. Список используемой литературы включает 77 наименований.

## Содержание работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы и двух приложений.

Во **введении** обсуждается актуальность исследований, проводимых в рамках диссертационной работы, объясняется научное и практическое значение полученных результатов, формулируется цель и постановка задач, а также приводятся основные положения, выносимые на защиту.

**Первая** глава представляет собой обзор литературы. Глава начинается с описания механизма спонтанного нарушения симметрии [4, 5]. Отдельное внимание уделено методу некоммутирующих пределов, который проиллюстрирован на примере спонтанного нарушения симметрии в двухъямном потенциале.

Далее рассмотрены обыкновенная модель Дике [6–8] и расширенная модель Дике [9–11]. Гамильтониан расширенной модели Дике имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{EKD}} &= \frac{\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2}{2} + g\hat{p}\hat{S}_y + (1 + \varepsilon)\frac{g^2}{2}\hat{S}_y^2 - \omega_0\hat{S}_z \\ \hat{S}_{y,z} &= \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_i^{y,z}.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$  — операторы импульса и координаты фотонного осциллятора,  $\omega$  — частота фотонного осциллятора,  $\omega_0$  — расстояние между уровнями энергии двухуровневых систем,  $g$  — константа связи,  $\hat{\sigma}_i^{y,z}$  — операторы спина  $1/2$   $i$ -ой двухуровневой системы,  $\hat{S}_{y,z}$  — операторы суммарного спина двухуровневых систем. Коэффициент  $\varepsilon$  отвечает за тип взаимодействия между двухуровневыми спинами и для обыкновенной модели Дике  $\varepsilon = -1$ , то есть квадратичный по  $\hat{S}_y$  член отсутствует.

Для обыкновенной модели Дике показано существование фазового перехода в термодинамическом пределе. В термодинамическом пределе задача может быть решена точно [12], так как спиновые операторы после преобразования Гольштейна–Примакова могут быть разложены по малым отклонениям проекции большого спина. Фазовый переход сопряжён с возникновением двух симметричных сверхизлучательных состояний, между которыми система выбирает случайным образом вследствие спонтанного нарушения симметрии. Аналогичные вычисления проделаны для расширенной модели Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами [13]. Однако теперь было применено повёрнутое преобразование Гольштейна–Примакова

с помощью которого было показано, что фазовый переход сопряжён с разворотом спина. В отличие от обыкновенной модели Дике, фазовый переход имеет первый род, а не второй, и критическая константа связи пропорциональна полному спину, а не обратно пропорциональна. Также показано, как расширенная модель Дике с отсутствующим прямым взаимодействием между двухуровневыми системами возникает при описании ансамбля джозефсоновских контактов в микроволновой полости [13].

Затем вводятся когерентные состояния квантового гармонического осциллятора и спина [14–16]. Это квантовые состояния, максимально приближённые к классическим: они имеют минимальную квантовую неопределённость и их эволюция приближена к эволюции классических состояний. Когерентные состояния получаются при действии оператора сдвига на основное состояние квантового осциллятора и оператора поворота на основное состояние спина:

$$\begin{aligned} |p, q\rangle &= \hat{D}(p, q) |0\rangle \\ |\theta, \phi\rangle &= \hat{R}(\theta, \phi) |s_z = S\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\hat{D}(p, q)$  — оператор сдвига осциллятора,  $\hat{R}(\theta, \phi)$  — оператор поворота спина. С помощью когерентных состояний определяются функции Хусими [17]. Функция Хусими квантового состояния в точке фазового пространства это квазираспределение вероятности, пропорциональное квадрату модуля перекрытия квантового состояния с когерентным состоянием  $|\alpha\rangle$  в точке:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \psi | \alpha \rangle|^2. \quad (3)$$

С помощью функций Хусими удобно визуализировать квантовые состояния. На рис. 1 изображены функции Хусими когерентных состояний спина и осциллятора.

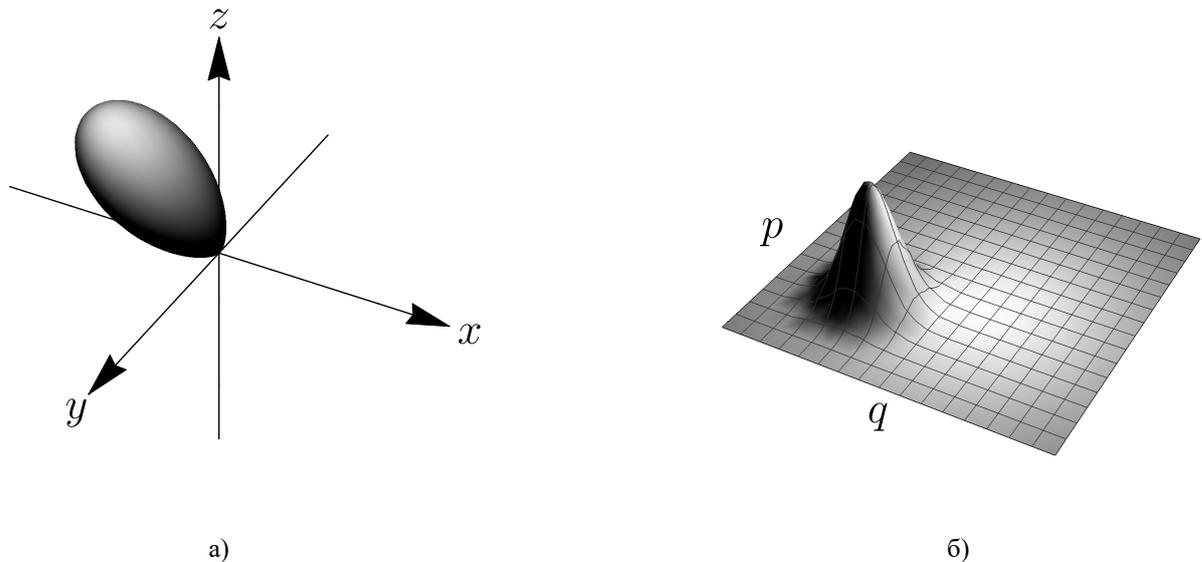


Рис. 1: Функции Хусими когерентного состояния спина (а) и осциллятора (б)

Оставшаяся часть главы посвящена магнитным флюксонам в массивах параллельных джозефсоновских контактов [18] и модели Френкеля–Конторовой [19]. В работе модель Френкеля–

Конторовой используется для описания макроскопической квантовой динамики флюксона в массиве параллельных джозефсоновских контактов. Модель описывает классическую цепочку атомов, взаимодействующих с ближайшими соседями, и помещённых в периодический потенциал. Модель допускает солитонные решения, которые подходят для описания магнитного флюксона, так как он является солитоном — кинком джозефсоновской фазы контактов в параллельном массиве.

Во **второй** главе подробно исследована расширенная модель Дике: в адиабатическом приближении Борна–Оппенгеймера построен эффективный потенциал, в пределе большой константы связи найдена энергия основного состояния, к основному состоянию применён метод некоммутирующих пределов, с помощью которого удалось найти границы фаз при больших константах связи, численно построена фазовая диаграмма и функции Хусими различных фаз.

Метод эффективного потенциала позволяет свести задачу к задаче о движении частицы в многогранном потенциале в адиабатическом приближении Борна–Оппенгеймера (фотонная подсистема считается медленной, а спиновая быстрой). Конфигурация эффективного потенциала зависит от типа взаимодействия между двухуровневыми системами. Кроме того, эффективный потенциал наглядно иллюстрирует свойства расширенной модели Дике при различных типах взаимодействия. На рис. 2 изображён эффективный потенциал при положительном знаке взаимодействия, отрицательном и при отсутствующем прямом взаимодействии.

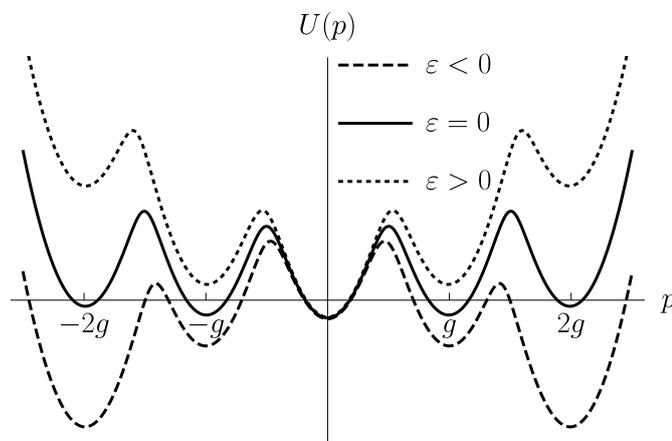


Рис. 2: Эффективный потенциал расширенной модели Дике при положительном прямом взаимодействии между двухуровневыми системами (точечная линия,  $\varepsilon > 0$ ), отрицательном (пунктирная линия,  $\varepsilon < 0$ ) и отсутствующем (сплошная линия,  $\varepsilon = 0$ ).

Для обнаружения спонтанного нарушения симметрии во втором порядке теории возмущений была получена энергия основного состояния расширенной модели Дике с добавленным в гамильтониан малым нарушающим симметрию членом  $\alpha \hat{p}$  [1]:

$$E_0 = -\frac{\alpha^2}{2} - g\alpha s_y + \frac{\omega_0^2}{2g^2}(s_y^2 - S(S+1)) + \frac{\varepsilon g^2}{2}s_y^2. \quad (4)$$

Затем был применён метод некоммутирующих пределов: сначала были последовательно взяты пределы стремления возмущения к нулю и константы связи к бесконечности, а затем пределы были взяты в обратном порядке. Результат зависел от порядка взятия пределов, следовательно в системе существует спонтанное нарушение симметрии и связанный с ним квантовый фазовый переход. Также, этим методом были получены линии границ раздела фаз на фазовой диаграмме при большой константе связи. Полностью фазовая диаграмма была построена численно и представлена на рис. 3.

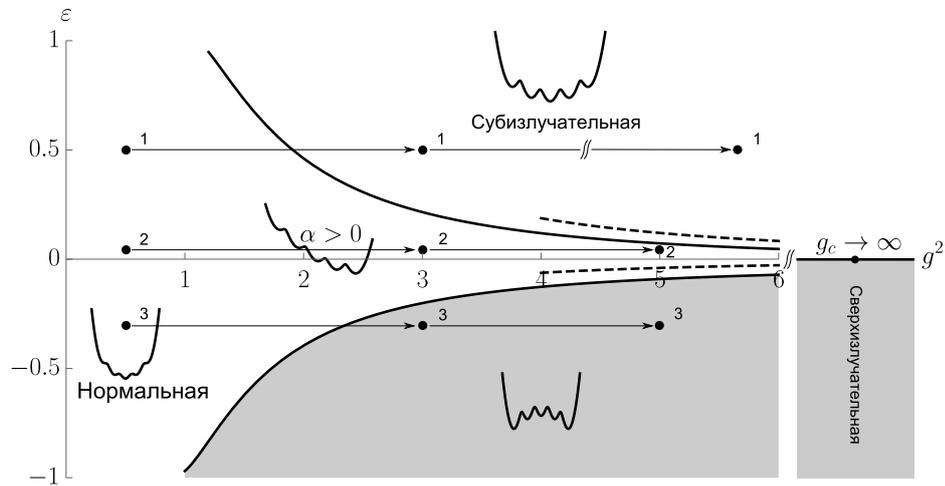


Рис. 3: Фазовая диаграмма расширенной модели Дике при конечном полном спине  $S$ . Сплошные линии — полученные численно границы раздела фаз, пунктирные линии — границы фаз при больших константах связи, полученные во втором порядке теории возмущений при больших константах связи. При  $\varepsilon = 0$  критическая константа связи стремится к бесконечности, что схематически отмечено соответствующей точкой на диаграмме. В точках, соединённых стрелками, построены функции Хусими основного состояния.

Также были численно построены функции Хусими спиновой и фотонной подсистем в разных фазах, см. рис. 4.

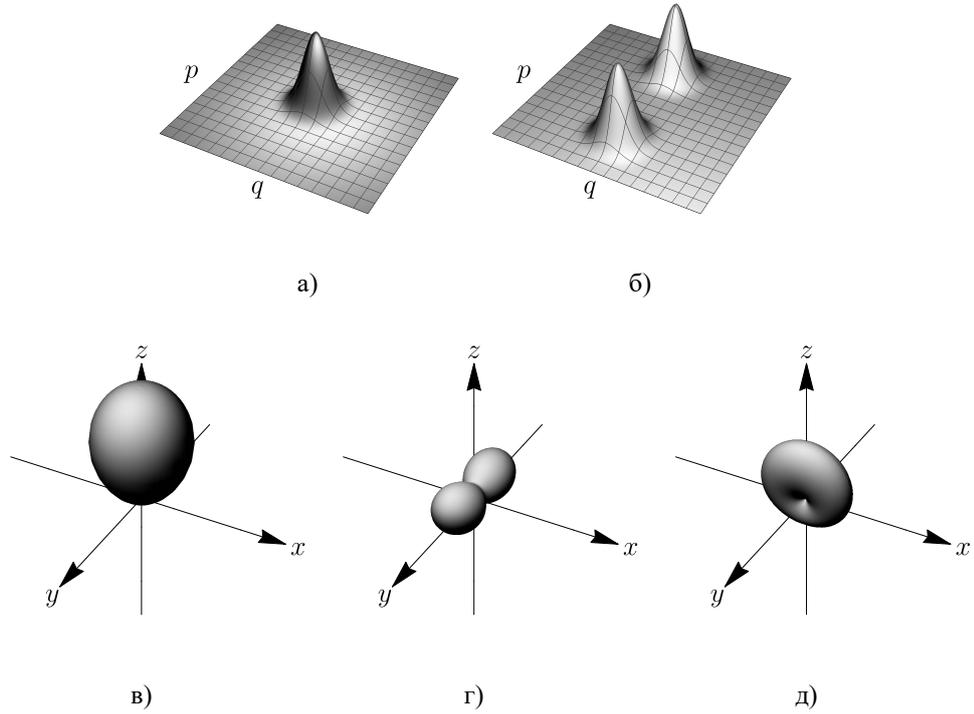


Рис. 4: Функции Хусими фотонной и спиновой подсистем расширенной модели Дике в различных фазах: а) фотонная подсистема в нормальной фазе, б) фотонная подсистема в сверхизлучательной фазе, в) спиновая подсистема в нормальной фазе, г) спиновая подсистема в сверхизлучательной фазе, д) спиновая подсистема в субизлучательной фазе.

Для случая отсутствующего прямого взаимодействия между двухуровневыми системами ( $\varepsilon = 0$ ) был применён метод пробной функции. Основное состояние искалось в виде

$$|\psi(a, b)\rangle = \sum_{\sigma_y=-S}^S \sum_{n=0}^{\mathcal{N}} \left( \frac{a}{(n^2 + s_y^2 + 1)^2} + \frac{b}{(n^2 + (s_y - S)^2 + 1)^2} \right) |n_{gs_y}, s_y\rangle. \quad (5)$$

Здесь  $|n_{gs_y}\rangle$  — когерентное состояния осциллятора, со смещённым на  $gs_y$  импульсом. Условие нормировки  $|\langle\psi(a)|\psi(a)\rangle|^2 = 1$  позволяет выразить коэффициент  $b$  через коэффициент  $a$  и волновая функция зависит от единственного произвольного параметра  $a$ . Далее энергия основного состояния  $E(a) = \langle\psi(a, b)|\hat{H}_{\text{EKD}}|\psi(a, b)\rangle$  минимизировалась как функция от  $a$ . До достижения некоторого значения константы связи  $g$  энергия основного состояния минимальна при  $a \approx 0.9$ . Это значит, что доминирует первый член в сумме и  $\langle\hat{S}_y\rangle = 0$ . При дальнейшем увеличении константы связи минимум сместится к  $a = 0$ , то есть вклад в волновую функцию будет давать второй член и  $\langle\hat{S}_y\rangle = S$ . Если построить среднее значение оператора импульса осциллятора в состоянии  $|\psi(a)\rangle$ , то при константе связи выше критической произойдёт скачок, рис. 5. Так как число фотонов в полости  $\langle n \rangle \sim \langle \hat{p} \rangle^2$  скачок свидетельствует о возникновении макроскопического квантового конденсата и переходе в сверхизлучательную фазу.

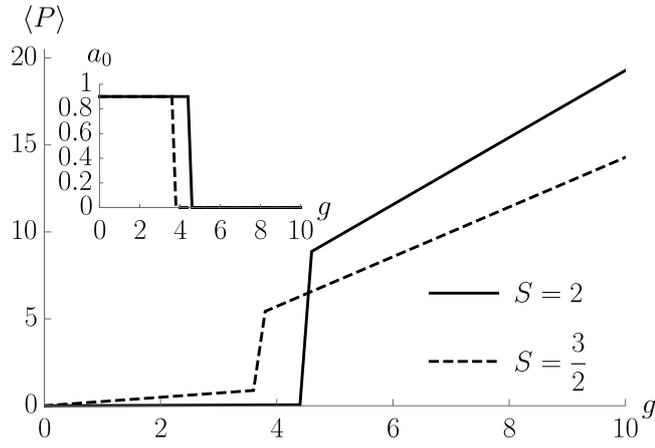


Рис. 5: Зависимость среднего значения импульса фотонного осциллятора от константы связи в расширенной модели Дике с  $\varepsilon = 0$ . После возникновения ненулевой проекции спина на ось  $y$  при критической константе связи происходит скачок.

В третьей главе изучается квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике. Для этого было получено аналитическое выражение для эффективного потенциала и рассматривалась динамика в нём. В сверхизлучательной фазе эффективный потенциал является двухъямным [20] и при константе связи близкой к критической константе связи  $g_c$  может быть разложен до четвёртого порядка:

$$U(p) = \frac{p^2}{2} - S\omega_0 \sqrt{1 + f^2 \frac{p^2}{\omega_0 S}} \approx \left( \frac{f^4}{8\omega_0 S} \right) p^4 + (1 - f^2) \frac{p^2}{2} \quad (6)$$

$$f = \frac{g}{g_c}.$$

Разложенный до четвёртой степени потенциал  $U(p)$  построен на рис. 6. Решения уравнений движения в потенциале  $\sim x^4 - x^2$  выражаются через функции Якоби, см. рис. 7.

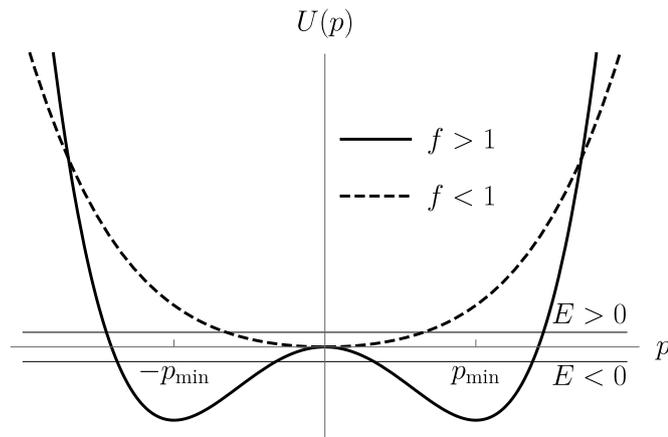


Рис. 6: Эффективный потенциал обыкновенной модели Дике. При  $f > 1$  возникают два минимума  $\pm p_{\min}$ , а точка  $p = 0$ , бывшая минимумом при  $f < 1$ , превращается в максимум. Горизонтальные линии  $E > 0$  и  $E < 0$  соответствуют полной энергии системы выше потенциального барьера и ниже.

Также показано соответствие между динамикой квазиклассической модели Дике и динамикой спящего волчка Лагранжа, то есть симметрического волчка в поле сил тяжести, ориентированного вдоль вертикальной оси  $z$ . Потенциальная энергия волчка имеет единственный минимум если его угловая скорость превышает некоторое критическое значение, тогда волчок устойчив, то есть не отклоняется от оси вращения. Это соответствует нормальной фазе обыкновенной модели Дике. Если же угловая скорость спящего волчка ниже критической, то у потенциальной энергии возникают два минимума, а старый минимум превращается в максимум — потенциал становится двухъямным в точности, как эффективный потенциал обыкновенной модели Дике. Тогда волчок неустойчив и его динамика может состоять либо из колебаний между двумя минимумами, либо из колебаний вокруг одного минимума. Аналогичное решение получено для динамики модели Дике в сверхизлучательной фазе (рис. 7).

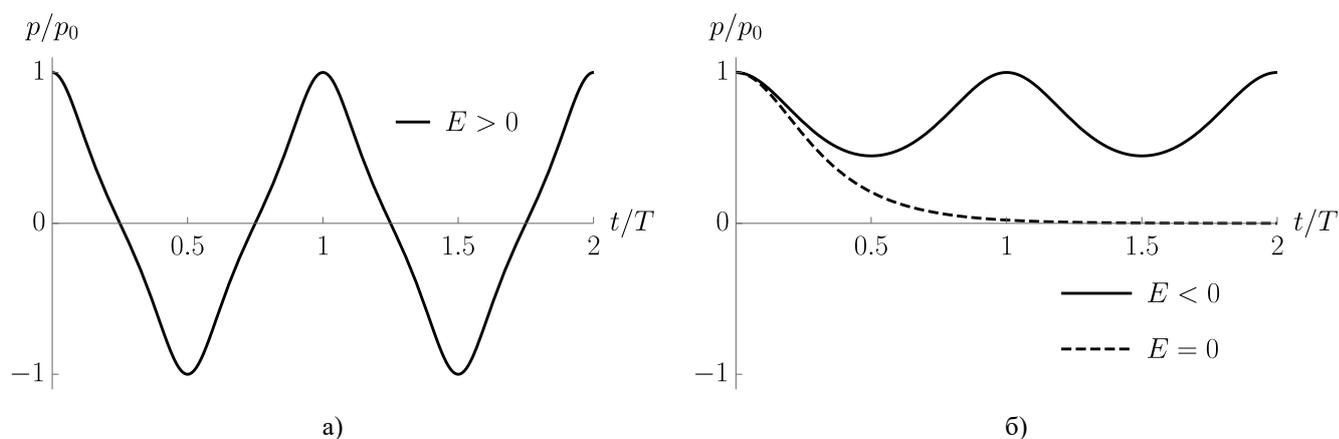


Рис. 7: Зависимость от времени координаты  $p(t)$  при движении в двухъямном потенциале для полной энергии больше нуля (а), меньшей либо равной нулю (б). Время отложено в единицах  $T$  — периода колебаний функции  $\text{sp}$  на графике а), и периода колебаний функции  $\text{dn}$  (сплошная линия) на графике б).

Кроме того, квазиклассическая динамика исследована и другим способом — усреднением уравнений Гейзенберга для квантовых наблюдаемых в сверхизлучательной фазе. В результате получены дифференциальные уравнения, определяющие зависимость от времени величины фотонного конденсата и угла сверхизлучательного поворота. Они также имеют решение в функциях Якоби.

Как итог, было описано состояние ”связанной светимости”, в котором происходит перекачка энергии из фотонной подсистемы в спиновую. На рис. 8 построены графики зависимости от времени двух энергий. Динамика в состоянии ”связанной светимости” происходит следующим образом: спин разворачивается в энергетически невыгодном направлении и запасает в себе энергию, затем происходит его разворот и высвобожденная энергия переходит в энергию фотонного конденсата, возникает свечение. После чего энергия фотонного конденсата возвращается к спину и цикл повторяется.

**Четвёртая** глава посвящена макроскопической квантовой динамике флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. В ячейки массива включено большое количество ”замороженных” джозефсоновских контактов, у которых отсутствует квантовая динамика в силу

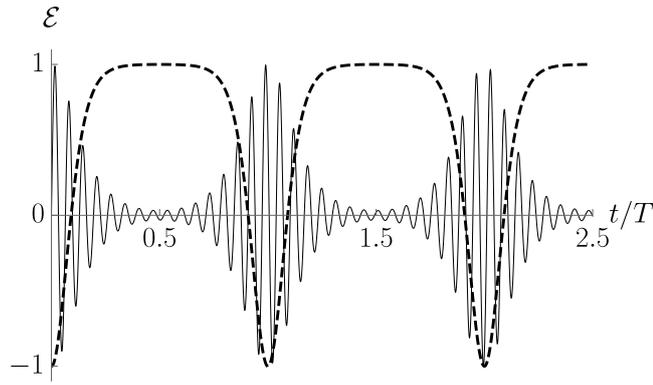


Рис. 8: График зависимости от времени энергии спиновой подсистемы (пунктирная линия) и дипольной энергии в полости (сплошная линия). Энергии нормированы так, чтобы амплитуды кривых на графике совпадали, время отложено в единицах периода колебаний  $T$ .

их малой зарядовой энергии. Они необходимы для создания высокой кинетической индуктивности массива, что приводит к сжатию размера флюксона до размера ячейки массива. Благодаря этому динамика флюксона квантовая, а не классическая. Были рассмотрены две конфигурации параллельного массива: длинная линейная и короткая кольцевая, см. рис. 9. К длинному линейному массиву приложен внешний ток, а к короткому кольцевому — внешнее напряжение.

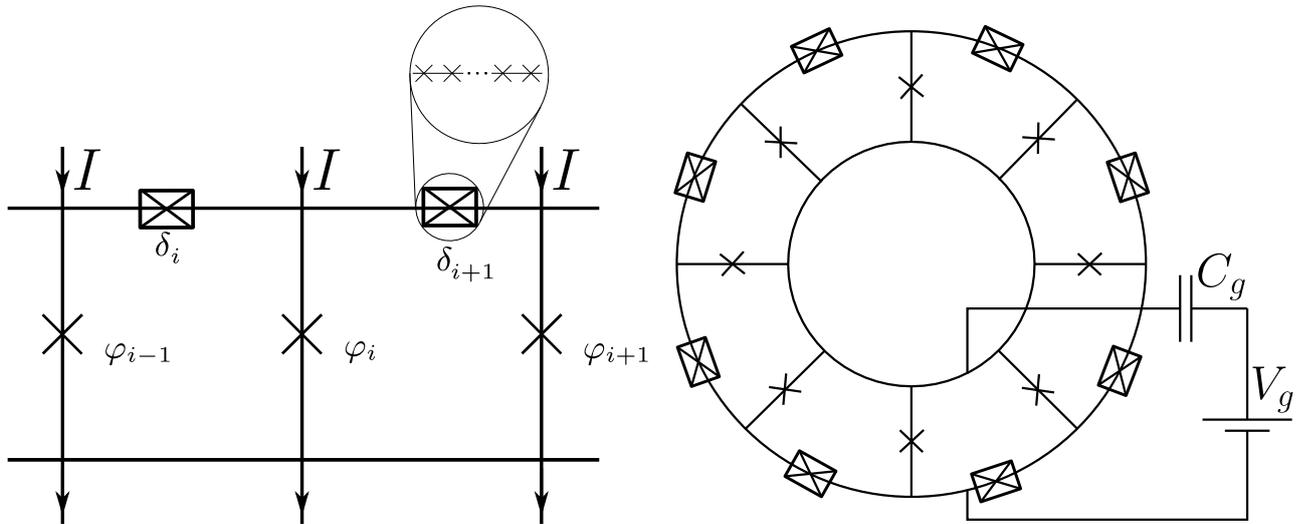


Рис. 9: Два типа джозефсоновских параллельных массива: линейный и кольцевой. Прямоугольниками обозначены ”замороженные” джозефсоновские контакты, крестиками — одиночные джозефсоновские контакты, фаза которых зависит от времени.

Потенциальная энергия параллельного массива с большим количеством ”замороженных” контактов совпадает с потенциальной энергией в модели Френкеля–Конторовой. Флюксон является кинком в этой модели, он представляет собой резкое изменение фаз джозефсоновских контактов в массиве от  $0$  до  $2\pi$  на масштабе одной ячейки, рис. 10. Его движение описывается движением в

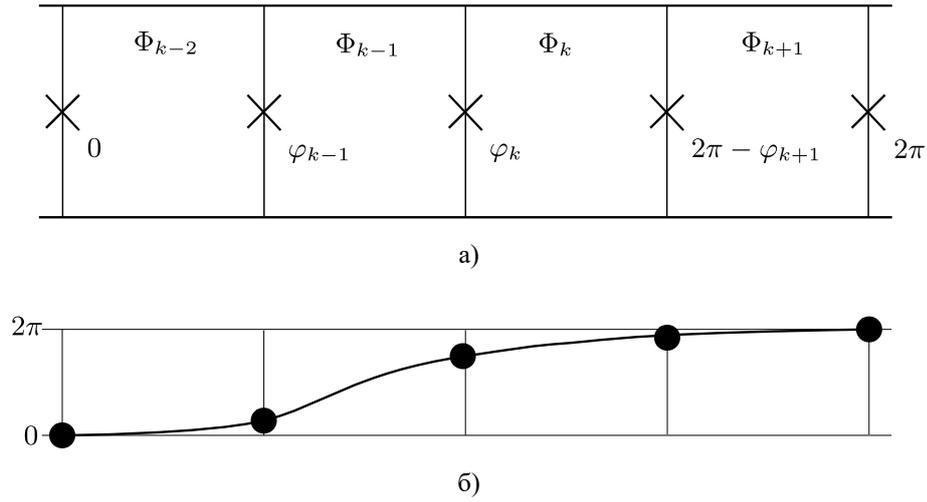


Рис. 10: Параллельный массив джозефсоновских контактов, содержащий один флюксон, (а) и распределение фаз во флюксоне малого размера порядка одной ячейки (б).

периодическом потенциале Пайерлса–Набарро, который был получен в работе (см. рис. 11):

$$\begin{aligned}
 U_{\text{MF}}(x) &= \frac{2E_L\pi^2}{3} + E_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2} \cos \frac{2\pi nx}{d} + E_J \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{d} \right) = \\
 &= 2E_L \left( \frac{\pi^2}{3} + 2\text{Li}_2[e^{i\frac{2\pi x}{d}}] + 2\text{Li}_2[e^{-i\frac{2\pi x}{d}}] \right) + E_J \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{d} \right),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\text{Li}_s(z)$  — полилогарифм [21].

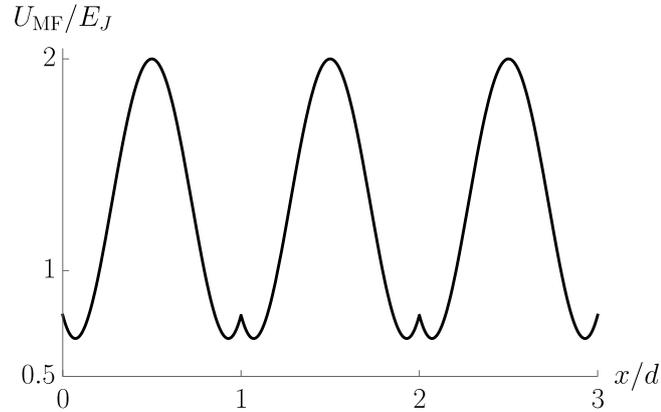


Рис. 11: Периодический потенциал Пайерлса–Набарро, квантовая динамика в котором описывает динамику флюксона в параллельном массиве джозефсоновских контактов.

Квантовая динамика флюксона в периодическом потенциале описывается гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{1}{2m} (\hat{p} - m\alpha V_g)^2 + \frac{2E_L\pi^2}{3} + E_L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2} \cos \frac{2\pi n\hat{x}}{d} + \\
 &+ E_J \left( 1 - \cos \frac{2\pi\hat{x}}{d} \right) - E_J \frac{I}{I_c} \frac{2\pi\hat{x}}{d}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В ней были обнаружены следующие эффекты: блоховские осцилляции в длинном линейном массиве и эффект Ааронова–Кашера в коротком кольцевом.

Эффект Ааронова–Кашера [22, 23] в кольцевом массиве возникает благодаря интерференции траекторий при движении по часовой стрелке и против в кольцевом массиве. В результате в законе дисперсии флюксона в приближении сильной связи появляется дополнительная фаза Ааронова–Кашера, равная разности геометрических действий двух описанных выше траектории. Фаза Ааронова–Кашера зависит от приложенного внешнего напряжения и её изменение позволяет регулировать динамику флюксона, в частности, вероятность его туннелирования в соседнюю ячейку параллельного массива. В кольцевом массиве, имеющем только две ячейки, флюксон может быть заперт в одной из них при фазе Ааронова–Кашера, равной  $\pi/2$ . Таким образом, внешнее напряжение, приложенное к короткому кольцевому массиву, регулирует квантовую динамику заключённого в массиве флюксона. На рис. 12 построены зависимости от времени вероятности обнаружения флюксона в начальной ячейке для различных значений фазы Ааронова–Кашера и количества ячеек в массиве.

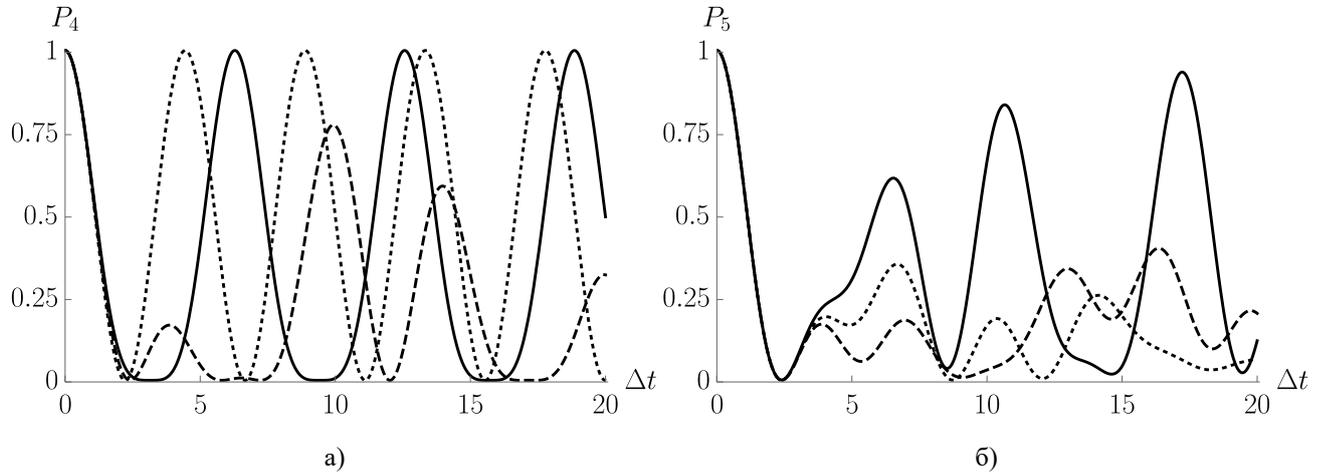


Рис. 12: Зависимость от времени вероятности обнаружения флюксона в начальной позиции в кольцевом параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов при различных значениях фазы Ааронова–Кашера  $\chi$  и а)  $M = 4$ , б)  $M = 5$ . Сплошная линия:  $\chi = 0$ , пунктирная линия:  $\chi = \pi/8$ , точечная линия:  $\chi = \pi/4$ .

Блоховские осцилляции в длинном линейном массиве возникают при включении небольшой диссипации, связанной с взаимодействием с термостатом. Тогда, для импульса флюксона может быть получено дифференциальное уравнение ланжевеновского типа, имеющее периодическое решение при токе  $I$ , превышающем критическое значение  $I_t$ :

$$\dot{p} = \frac{2\pi E_J I}{d I_c} + \frac{\gamma m \Delta}{d} \sin pd. \quad (9)$$

Аналогичное уравнение было получено для длинного джозефсоновского контакта в работе [24]. Из уравнения Гейзенберга следует, что импульс флюксона связан с напряжением в линейном массиве:  $V \sim \sin p(t)$ . Следовательно, при  $I > I_t$  напряжение также будет периодической функцией от времени. При  $I < I_t$  уравнение имеет стационарное решение и ток пропорционален напряжению. Усредняя зависимость от времени напряжения при заданном токе, можно получить вольт–амперную характеристику массива. Она имеет характерный вид блоховского ”носа”, что также

свидетельствует о наличии блоховских осцилляций. Графики зависимости от времени напряжения в массиве и вольт–амперная характеристика представлены на рис. 13.

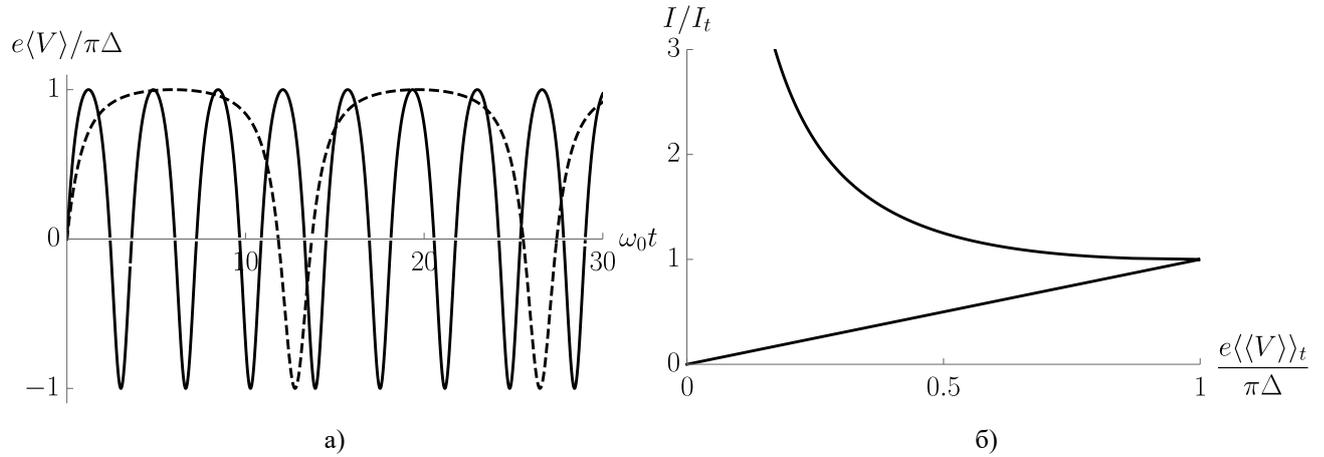


Рис. 13: Зависимость от времени напряжения (а) и вольт–амперная характеристика (б). На графике а) сплошная линия построена при  $I/I_t = 2$ , пунктирная — при  $I/I_t = 1.1$ .

В **приложении А** решены задачи о движении в потенциале  $\sim \cos \varphi$  и в двухъямном потенциале  $\sim x^4 - x^2$ . Показано как первая задача сводится ко второй и связь между решениями. Данный результат с математической точки зрения объясняет сходство двух решений, полученных в третьей главе разными методами.

Обе задачи решены с помощью закона сохранения энергии. Для осциллятора в потенциале  $-U_0 \cos \varphi$

$$E = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} - U_0 \cos \varphi. \quad (10)$$

Интегрируя получим

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi(t)}{2} &= \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{U_0}{mk}} t, k \right) \\ \cos \frac{\varphi(t)}{2} &= \operatorname{cn} \left( \sqrt{\frac{U_0}{mk}} t, k \right) \\ k &= \frac{2}{1 + E/U_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

В двухъямном потенциале с расстоянием  $2a$  между минимумами полная энергия есть

$$\tilde{E} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U_0 x^4 - 2U_0 a^2 x^2. \quad (12)$$

Заменой  $x = x_0 \cos(\varphi/2)$ , где  $x_0$  — корень многочлена  $\tilde{E}/U_0 - x^4 + 2a^2 x^2$ , уравнение сводится к виду [25]:

$$\begin{aligned} \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} - 2U_0 x_0^2 \cos \varphi &= \frac{4\tilde{E}}{x_0^2} + 2U_0 x_0^2 = \\ &= 6U_0 x_0^2 - 8U_0 a^2, \end{aligned} \quad (13)$$

то есть, к решённой выше задаче о движении в потенциале  $\sim \cos \varphi$ .

В приложении В показано как представить расширенную модель Дике в удобном для применения численных методов виде. Для этого необходимо записать матрицу гамильтониана расширенной модели Дике, к которой потом могут быть применены численные методы диагонализации. В результате будут получены собственные энергии и вектора собственных состояний гамильтониана.

## Защищаемые положения

1. Обнаружен квантовый фазовый переход в сверхизлучательное состояние при стремящейся к бесконечности константе связи в расширенной модели Дике с отсутствием прямого взаимодействия между двухуровневыми системами.
2. Дополнена фазовая диаграмма расширенной модели Дике. А именно, найдена область неустойчивости нормальной фазы при большой константе связи. Если система находится в этой области, то под действием внешнего возмущения происходит переход в сверхизлучательную фазу. Минимальное возмущение, необходимое для перехода, стремится к нулю с ростом константы связи.
3. С помощью эффективного потенциала в адиабатическом приближении Борна–Оппенгеймера наглядно продемонстрированы свойства основного состояния расширенной модели Дике. В частности, взаимное расположение минимумов эффективного потенциала позволяет сделать вывод о том сверхизлучательной будет фаза после перехода или субизлучательной.
4. Обнаружено спонтанное нарушение симметрии в расширенной модели Дике путём применения к основному состоянию гамильтониана метода некоммутирующих пределов бесконечной константы связи и бесконечно малого внешнего сдвига положения равновесия фотонного осциллятора. Также, эффективный потенциал даёт интуитивное понимание механизма спонтанного нарушения симметрии.
5. Для квазиклассической динамики обыкновенной модели Дике получены уравнения движения, допускающие аналитическое решение.
6. Показано, что квазиклассическая динамика обыкновенной модели Дике представляет собой периодические биения проекции спина и напряжённости электрического поля в полости. В результате образуется состояние "связанной светимости", в котором происходит перекачка энергии от двухуровневых систем к электромагнитному полю и обратно.
7. Продемонстрирован способ создания высокой кинетической индуктивности в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. Высокая кинетическая индуктивность достигается за счёт включения в ячейки массива большого количество дополнительных джозефсоновских контактов с малой зарядовой энергией. Благодаря ей размер флюксона умень-

шается до размера одной ячейки, что приводит к возникновению квантовой, а не классической динамики.

8. Исследована макроскопическая квантовая динамика флюксона в параллельном массиве квантовых джозефсоновских контактов. Показано, что при наличии внешнего тока в линейной конфигурации массива квантовая динамика флюксона представляет собой блоховские осцилляции. Также показано, что в кольцевом массиве возникает эффект Ааронова–Кашера, который позволяет влиять на динамику флюксона за счёт приложенного к массиву напряжения.

## Литература

- [1] S. S. Seidov and S. I. Mukhin, “Spontaneous symmetry breaking and Husimi q-functions in extended Dicke model,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 53, p. 505301, Nov 2020.
- [2] S. Mukhin, A. Mukherjee, and S. Seidov, “Dicke model semiclassical dynamics in superradiant dipolar phase in the “bound luminosity” state,” *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 132, p. 658–662, Apr 2021.
- [3] S. S. Seidov and M. V. Fistul, “Quantum dynamics of a single fluxon in josephson-junction parallel arrays with large kinetic inductances,” *Phys. Rev. A*, vol. 103, p. 062410, Jun 2021.
- [4] A. J. Beekman, L. Rademaker, and J. van Wezel, “An Introduction to Spontaneous Symmetry Breaking,” *SciPost Phys. Lect. Notes*, p. 11, 2019.
- [5] J. van Wezel and J. van den Brink, “Spontaneous symmetry breaking in quantum mechanics,” *American Journal of Physics*, vol. 75, p. 635, 3 2007.
- [6] R. H. Dicke, “Coherence in spontaneous radiation processes,” *Phys. Rev.*, vol. 93, pp. 99–110, Jan 1954.
- [7] B. M. Garraway, “The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited,” *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 369, no. 1939, pp. 1137–1155, 2011.
- [8] K. Hepp and E. H. Lieb, “On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model,” *Annals of Physics*, vol. 76, no. 2, pp. 360 – 404, 1973.
- [9] D. De Bernardis, P. Pilar, T. Jaako, S. De Liberato, and P. Rabl, “Breakdown of gauge invariance in ultrastrong-coupling cavity QED,” *Phys. Rev. A*, vol. 98, p. 053819, Nov 2018.
- [10] T. Jaako, Z.-L. Xiang, J. J. Garcia-Ripoll, and P. Rabl, “Ultrastrong-coupling phenomena beyond the Dicke model,” *Phys. Rev. A*, vol. 94, p. 033850, Sep 2016.

- [11] D. De Bernardis, T. Jaako, and P. Rabl, “Cavity quantum electrodynamics in the nonperturbative regime,” *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 043820, Apr 2018.
- [12] C. Emary and T. Brandes, “Chaos and the quantum phase transition in the Dicke model,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 67, p. 066203, 06 2003.
- [13] S. I. Mukhin and N. V. Gnezdilov, “First-order dipolar phase transition in the Dicke model with infinitely coordinated frustrating interaction,” *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 053809, May 2018.
- [14] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field,” *Phys. Rev.*, vol. 131, pp. 2766–2788, Sep 1963.
- [15] J. Ma, X. Wang, C. Sun, and F. Nori, “Quantum spin squeezing,” *Physics Reports*, vol. 509, no. 2, pp. 89 – 165, 2011.
- [16] J. M. Radcliffe, “Some properties of coherent spin states,” *Journal of Physics A: General Physics*, vol. 4, pp. 313–323, may 1971.
- [17] K. Husimi, “Some formal properties of the density matrix,” *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, vol. 22, no. 4, pp. 264–314, 1940.
- [18] N. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [19] O. Braun and Y. Kivshar, “Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model,” *Physical review. B, Condensed matter*, vol. 43, pp. 1060–1073, 02 1991.
- [20] A. Relaño, M. A. Bastarrachea-Magnani, and S. Lerma-Hernández, “Approximated integrability of the Dicke model,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 116, p. 50005, Dec 2016.
- [21] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York City: Dover, ninth dover printing, tenth gpo printing ed., 1964.
- [22] Y. Aharonov and A. Casher, “Topological quantum effects for neutral particles,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 319–321, Jul 1984.
- [23] J. R. Friedman and D. V. Averin, “Aharonov-casher-effect suppression of macroscopic tunneling of magnetic flux,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 050403, Jan 2002.
- [24] K. K. Likharev and A. B. Zorin, “Theory of the Bloch-wave oscillations in small josephson junctions,” *J. Low Temp. Phys.; (United States)*, vol. 59, 5 1985.
- [25] A. Brizard and M. Westland, “Motion in an asymmetric double well,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 43, 02 2016.