

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»

На правах рукописи

УДК

МАЛЕЕВА НАТАЛИЯ АНДРЕЕВНА

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДЯЩИХ
МЕТАМАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПЛОСКИХ СПИРАЛЬНЫХ
РЕЗОНАТОРОВ

Специальность 01.04.07 — Физика конденсированного состояния

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, профессор

Карпов Александр Владимирович

Научный консультант:

кандидат физико-математических наук, с.н.с.

Михаил Викторович Фистуль

Москва, 2015 г.

Содержание

Введение	3
Глава 1 Аналитический обзор литературы	8
1.1 Классификация магнитных материалов	8
1.2 Классификация метаматериалов	10
1.3 Классификация сверхпроводящих СВЧ метаматериалов.....	13
1.4 Экспериментальные методы исследования сверхпроводящих метаматериалов....	22
1.5 Теоретические методы описания спиральных резонаторов.	32
Глава 2 Электродинамика кольцевого спирального резонатора	38
2.1. Построение аналитической модели кольцевого спирального резонатора.	38
2.2. Магнитное поле кольцевого спирального резонатора	52
2.3. Экспериментальное исследование кольцевого спирального резонатора.....	59
Глава 3 Электродинамика резонатора на спирали Архимеда	64
3.1. Аналитическая модель спирального резонатора	64
3.2. Измерение магнитного поля спирального резонатора	73
3.3. Измерение функций распределения тока спирального резонатора.....	80
Глава 4 Электромагнитный отклик метаматериала на основе плоских спиральных резонаторов	85
4.1. Взаимодействие спиралей.....	85
4.2. Магнитная проницаемость метаматериала на основе плоских спиральных резонаторов.....	90
Заключение.....	96
Список публикаций	97
Список литературы.....	98

Введение

Впервые практический интерес к метаматериалам возник в начале нашего века в связи с давней идеей создать среду с отрицательным показателем преломления [1]. Эту идею сформулировал В.Г. Веселаго [2] в 1960-х годах в своей пионерской работе, где предсказал экстраординарные свойства оптических инструментов на материалах с отрицательным показателем преломления, а также отметил важность поиска таких материалов. Поскольку в природе таких материалов не существует, работа В.Г. Веселаго оставалась теоретическим предсказанием вплоть до начала нашего века, когда Дж. Пендри и Д. Смит экспериментально продемонстрировали среду с отрицательным показателем преломления, составленную из разрезных колец и проволочек, – первый метаматериал [1]. Метаматериал – это искусственно созданная среда с необычными свойствами, составленная из резонансных элементов, называемых мета-атомами. Свойства метаматериалов, как правило, невозможно (или же технически сложно) получить, используя природные материалы. По типу своих уникальных свойств метаматериалы разделяют на электромагнитные, акустические [3], механические [4]. Наиболее востребованными оказались электромагнитные метаматериалы – исторически первые. Для создания новых электронных приборов особый интерес представляет взаимодействие электромагнитных волн СВЧ диапазона со средами, и применение электромагнитных метаматериалов позволяет этим взаимодействием управлять. Изменяя мета-атомы и их взаимное расположение, мы можем менять дисперсионное соотношение в метаматериалах и, следовательно, управлять прохождением, отражением и поглощением микроволнового излучения в таких метаматериалах. Интерес к электромагнитным метаматериалам развился в создание сред с координатно-зависимыми свойствами и сред с возможностью настройки и переключения свойств внешним воздействием, разработку активных метаматериалов, способствующих усилению сигнала [5]. Благодаря перечисленным свойствам метаматериалы нашли свое применение в разработке антенн, поглотителей электромагнитного излучения, суперлинз (линз с бесконечным разрешением – выше дифракционного ограничения), устройств оптической и электромагнитной маскировки, фильтрах.

Экспериментальному и теоретическому исследованию метаматериалов посвящено большое количество работ. Главные проблемы, выявленные в ходе исследований метаматериалов, – это диссипация и недостаточная малость мета-атома в сравнении с

длиной волны. Обе эти проблемы решаются в сверхпроводящих метаматериалах на основе спиральных резонаторов: спиральная геометрия делает мета-атомы компактными, выполнение мета-атомов из сверхпроводящих материалов сокращает омические потери.

Изучение сверхпроводящих метаматериалов – совершенно новое направление, которое возникло несколько лет назад. Помимо решения проблемы омических потерь, сверхпроводящие метаматериалы предлагают дополнительные возможности переключения внешним магнитным полем, светом, электрическим током. Нелинейное и мультистабильное поведение сверхпроводников позволяет менять закон дисперсии в еще более широких пределах. Таким образом, исследование сверхпроводящих метаматериалов на основе компактных спиральных резонаторов является актуальным и может внести существенный вклад в развитие науки о метаматериалах.

Цель работы: экспериментальное и теоретическое исследование электродинамики сверхпроводящих метаматериалов, построенных из мета-атомов в виде плоских сверхпроводящих спиральных резонаторов. Для достижения поставленной цели перед автором были поставлены следующие задачи:

- Построить математическую модель электродинамики плоских сверхпроводящих резонаторов в форме спирали Архимеда, а также спирали Архимеда без центральной части (кольцевых спиральных резонаторов). Аналитически рассчитать резонансные частоты, функции распределения тока собственных мод и магнитного поля вокруг спирального резонатора.
- Экспериментально исследовать резонансные частоты спиральных резонаторов, функции распределения тока собственных мод, структуру магнитного поля вблизи поверхности спирали.
- Сопоставить аналитически полученные значения резонансных частот и функций распределения тока и магнитного поля на этих частотах с результатами численного моделирования и эксперимента.
- Получить выражение для магнитного момента одиночного мета-атома.
- Рассчитать взаимодействие двух мета-атомов
- Определить электромагнитный отклик метаматериала на внешнее магнитное поле. Рассмотреть влияние радиационных потерь мета-атома на магнитную проницаемость метаматериала.

Научная новизна. В работе впервые построена математическая модель электродинамики плоских спиральных резонаторов конечной длины. Для плоских спиралей Архимеда, а также спиралей Архимеда без центральной части (кольцевых спиральных резонаторов) модель позволяет находить: резонансные частоты, функции распределения токов собственных мод, магнитные поля этих токов. Показано аналитически и подтверждено экспериментально, что резонансные частоты кольцевого спирального резонатора относятся как нечетные числа, что нетипично для полуволнового резонатора. Показано аналитически и подтверждено экспериментально, что резонансные частоты спирального резонатора в форме полной спирали Архимеда относятся как целые числа. Экспериментально получены и объяснены теоретически функции распределения резонансных токов и магнитного поля в ближней зоне резонатора. Впервые аналитически показана возможность реализации сверхпроводящего метаматериала с отрицательной магнитной проницаемостью на микроволновых частотах, используя плоские спиральные резонаторы как мета-атомы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработана аналитическая модель электродинамики плоского сверхпроводящего резонатора в форме спирали Архимеда. Данная модель позволяет предсказывать из геометрических параметров спирали: резонансные частоты, функции распределения тока на резонансных частотах и магнитного поля в ближней и дальней зонах резонатора. Экспериментально установлены и объяснены теоретически особенности спектра резонансных частот двух типов спиральных резонаторов. Продемонстрировано хорошее соответствие теории, эксперимента и численного моделирования.

Показана возможность реализации метаматериала с отрицательной магнитной проницаемостью на основе плоских спиральных резонаторов в микроволновом диапазоне частот.

Методы вычисления. Вычисления проводились в рамках теории спиральных замедляющих систем [6], расширенной для описания плоских спиралей Архимеда конечной длины. Электродинамика резонатора описывалась в приближении плотной упаковки витков спирали, распределение тока по поперечному сечению металлизации, образующей спираль, считалось однородным, омические потери не учитывались.

Электромагнитный отклик метаматериала на внешнее магнитное поле рассчитывался в приближении слабой связи между мета-атомами.

Резонансные частоты измерены в гелиевом криостате замкнутого цикла, для измерения функций распределения тока использовался лазерный сканирующий микроскоп, для исследования магнитного поля вблизи поверхности резонатора использовался разработанный в лаборатории «Сверхпроводящие метаматериалы» измерительный стенд.

Положения, выносимые на защиту:

1. Аналитическая модель плоского сверхпроводящего резонатора в виде спирали Архимеда и спирали Архимеда без центральной части (кольцевого резонатора).
2. Аналитически полученные резонансные частоты, функции распределения тока собственных мод и магнитного поля этих токов.
3. Экспериментальное исследование резонансных частот, функций распределения тока и магнитного поля вблизи поверхности спирали.
4. Теоретическое обоснование возможности реализации метаматериала с отрицательной магнитной проницаемостью на основе плоских спиральных резонаторов.
5. Расчет потерь мета-атома на излучение. Влияние учета потерь мета-атома на электромагнитный отклик метаматериала.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics – Metamaterials (г. Бордо Франция 2013г.), The 8th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics – Metamaterials (г. Копенгаген, Дания 2014г.), международная конференция «Вторая Московская Микроволновая Неделя» (Москва 2014г.), 18-ый международный семинар по физике низких температур и сверхпроводимости (Италия, 2015г.), а также на научных семинарах физического института Технологического Университета Карлсруэ.

Личный вклад автора. Теоретическая часть работы, проведение измерений на лазерном сканирующем микроскопе, обработка и анализ результатов исследования, сопоставление результатов эксперимента с результатами численного и аналитического моделирования, подготовка публикаций и докладов конференций.

Публикации. Результаты, представленные в диссертации, опубликованы в двух статьях в зарубежных реферируемых журналах, входящих в список Web of science и список

изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией России для опубликования научных результатов диссертации на соискание ученой степени кандидата.

Вклад соавторов. Все работы по теме диссертации опубликованы в соавторстве с научным консультантом М.В. Фистулем, научным руководителем А.В. Карповым, и руководителем лаборатории А.В. Устиновым, которые проводили общее руководство исследованием, формировали цели и ставили задачи перед автором.

А.П. Журавель руководил измерениями на лазерном сканирующем микроскопе.

А.С. Аверкин проводил численное моделирование электродинамики исследуемых структур.

Н.Н. Абрамов разработал и реализовал уникальный способ измерения магнитного поля вблизи поверхности спирального резонатора и руководил измерениями автора на данном измерительном стенде.

Глава 1 Аналитический обзор литературы

1.1 Классификация магнитных материалов

По своим магнитным свойствам материалы могут быть разделены на два глобальных типа: слабомагнитные (диамагнетики, парамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики, антиферромагнетики, ферримагнетики, сперомагнетики, асперомагнетики, гелимагнетики, спиновые стекла, сперимагнетики). **Диамагнетиками** являются вещества, намагничивающиеся против внешнего магнитного поля и имеющие магнитную проницаемость $\mu < 1$. К диамагнетикам относятся инертные газы, водород, бор, графит, азот, кремний, фосфор, медь, цинк, серебро, золото, висмут, вода, органические соединения. В отсутствие внешнего поля диамагнетик намагниченности не имеет. **Парамагнетиками** являются вещества, намагничивающиеся вдоль направления внешнего магнитного поля и имеющие магнитную проницаемость $\mu > 1$. К парамагнетикам относятся щелочные и редкоземельные (кроме бериллия) металлы, кислород, алюминий, ниобий, молибден. В отсутствие внешнего поля парамагнетик также не намагничен.

Ферромагнетиками являются вещества, в которых ниже точки Кюри устанавливается коллинеарный дальний порядок всех магнитных моментов в системе, т.е. намагниченность существует даже в отсутствие внешнего магнитного поля. При комнатной температуре ферромагнетиками являются переходные металлы. Магнитная проницаемость ферромагнетика много больше единицы. Для **антиферромагнетиков** также характерен дальний порядок в упорядочении магнитных моментов ниже точки Нейля, однако магнитные моменты соседних ионов антипараллельны. В целом по решетке спонтанная намагниченность отсутствует и магнитная проницаемость антиферромагнетиков равна единице. Антиферромагнитными свойствами обладает при комнатной температуре хром, а также твердый кислород. **Ферримагнетиками** являются вещества, у которых магнитные моменты ионов подрешеток ориентируются антипараллельно (как в антиферромагнетиках), но моменты подрешёток не равны. Т.о. суммарная намагниченность не равна нулю. Магнитная проницаемость ферримагнетика, как и у ферромагнетика, много больше единицы. Ферримагнетиками являются ферриты и некоторые упорядоченные металлические сплавы.

Сперомагнетиком является вещество, обладающее магнитным состоянием, в котором локализованные магнитные моменты заданного сорта имеют произвольные ориентации при отсутствии, как суммарной намагниченности, так и какой-либо регулярной картины локального упорядочения за пределами ближайших соседей. Однако, в отличие от непрерывно и случайно флуктуирующих магнитных моментов парамагнетика, в сперомагнетике существует определенная температура упорядочения, ниже которой направления магнитных моментов «замораживаются». Сперомагнетиками является сплав CuMn , а также аморфные смеси металлов 3d– и 4f–групп.

Асперомагнетиком называют вещество, локализованные магнитные моменты которого хаотически размещены в пространстве, но ниже определенной температуры упорядочения направления магнитных моментов зафиксированы так, что имеют преимущественные ориентации. В этом состоянии, т.о., существует спонтанная намагниченность. В качестве примера асперомагнетика можно привести соединение DyNi_3 .

Гелимагнетик является кристаллической формой асперомагнетика, т.е. это система магнитных моментов, локализованных в узлах кристаллической решетки, которые ниже определенной температуры обладают некоторым преимущественным направлением. Как и асперомагнетик, гелимагнетик обладает спонтанной намагниченностью. Типичным примером гелимагнетика является MnAu_2 .

Спиновым стеклом называется кристаллический сплав, в немагнитную матрицу которого включены магнитные ионы, магнитные моменты этих ионов ниже определенной критической температуры упорядочиваются сперомагнитно. Примерами спиновых стекол могут служить растворы железа или марганца в меди или золоте.

Сперимагнетиком является вещество, которое содержит ионы двух (или более) магнитных веществ, причем магнитные моменты по крайней мере одного из них заморожены со случайными ориентациями. Сперимагнетик обычно обладает суммарной спонтанной намагниченностью за счет преобладающего ферромагнитного упорядочения в одной из составляющих его структур. Сперимагнетиками являются кристаллический $\text{FePd}_{1.6}\text{Pt}_{1.4}$ и аморфные DyCo_3 и TbFe_2 . [7]

1.2 Классификация метаматериалов

Следует отметить, что все вышеописанные магнитные вещества обладают положительной магнитной проницаемостью [8]. Отрицательную магнитную проницаемость демонстрируют в определенном диапазоне частот некоторые гиротропные материалы. Остальные материалы с отрицательной магнитной проницаемостью созданы искусственно [9] и являются т.н. метаматериалами. Первой популярностью метаматериалы обязаны идее создания среды с отрицательным показателем преломления. Оспариваемая вначале, концепция отрицательного показателя преломления сейчас широко принята, и научные исследования в этой области уже перешли к решению прикладных задач. Также областью исследования были метаматериалы с сильным магнитным откликом и «магнитное зеркало», работающее на оптических частотах, проводилось исследование мета-поверхностей с асимметричным распространением волн и металлических мета-сред, невидимых для электромагнитного излучения. Существенные усилия были направлены на развитие киральных метаматериалов для управления поляризацией света и достижения отрицательного коэффициента преломления. Были также продемонстрированы и метаматериалы для линий задержки и датчиков в диапазоне от микроволн до оптических частот. Другой активной областью исследований были метаматериальные волноводы. Разработана концепция управления распространением волны в волноводе путем заполнения волновода метаматериалом с координатно-зависимыми свойствами. Метаматериалы с координатно-зависимыми свойствами дали также такие уникальные возможности, как маскировка объектов и решения по созданию световых каналов, такие как сложные линзы и «мираж-устройства» [5].

При разработке активных метаматериалов, способствующих усилению сигнала, основная цель состоит в компенсации потерь, которые подавляют плазмоны в наноструктурах. Одно из решений — комбинировать метаматериалы и среды с электрической и с оптической накачкой, такие как полупроводниковые квантовые точки [10], полупроводниковые квантовые ямы и органические молекулы [11], внедренные в металлические наноструктуры. Можно полагать, что полупроводниковые среды с электрической и оптической накачкой и новые возможности графена обеспечат компенсацию потерь в диапазоне от оптических до терагерцевых частот [5]. Еще одной целью исследований является разработка усиливаемого плазмонного лазера, или спазера (от англ. Surface Plasmon Amplification by Stimulated Emission of Radiation — плазмонный

наноисточник оптического излучения, аналогичный лазеру), генерирующего когерентное оптическое излучение (lasing spaser) [12]: лазера с плоскими зеркалами, излучающего за счет плазмонных возбуждений в массиве когерентно излучающих мета-молекул. В отличие от обычных лазеров, работающих на длинах волн соответствующих частотам переходов естественных молекул, описанный выше спазер не требует внешнего резонатора, и длина волны может задаваться дизайном мета-молекул. Наконец, использование наноструктурированных материалов с большой диэлектрической проницаемостью дает возможностьшить электрический и магнитный отклик в метаматериалах, состоящих только из диэлектрика, и тем самым избежать потерь в источнике [13]. Разработка наноразмерных оптических схем обработки данных требует быстрых нелинейных сред с высоким откликом, которые изменяют показатель преломления и поглощения, реагируя на свет. Во всех средах, функциональность которых зависит от электронной или молекулярной ангармоничности, усиление отклика происходит за счет увеличения времени реакции. Напротив, плазмонная нелинейность металлов, входящих в метаматериальные наноструктуры, может обеспечить терагерцовые модуляции, но требует высокой мощности [14]. Сочетание же традиционных нелинейных сред с метаматериальными наноструктурами – эффективный способ повышения отклика. Метаматериал может замедлить свет, тем самым увеличивая время взаимодействия со встроенной в него нелинейной средой, или же он может сконцентрировать локальное поле, повышая тем самым нелинейный отклик. Первые претенденты для гибридизации с метаматериалами — полупроводники и полупроводниковые структуры с квантовыми ямами, используемые в качестве подложек для металлической рамки, жидкие кристаллы, конъюгированные полимеры, углеродные нанотрубки [15] и фуллерены [5].

Метаматериал дает то, что очень редко предлагает природа, – возможность настройки и переключения свойств материалов. Рассмотрим, для примера, металлический метаматериал на тонком слое диэлектрика, свойствами которого можно управлять с помощью внешнего воздействия. Изменение показателя преломления в слое изменит плазмонный резонанс наноструктуры. Это приведет к сильному изменению резонансной передачи и отражения гибрида [16]. Материалы с меняющейся фазой являются главными агентами для переключения. Например, был продемонстрирован наноразмерный метаматериал с электрооптическим переключением на основе халькогенидных стекол [17]. Халькогенидные стекла используются для перезаписываемых оптических дисков в течение нескольких десятилетий, т.к. отвечают на внешнее оптическое или электрическое воздействие быстрым и воспроизводимым изменением оптических свойств. Такой отклик

наблюдается благодаря фазовым переходам между кристаллическим и аморфным состояниями. Подобными свойствами обладают оксиды переходных металлов, в частности оксид ванадия [18, 19]. Также разрабатываются переключаемые метаматериалы на основе массивов микро- и нано-электромеханических устройств [5]. Возможно также расширить электрооптические возможности метаматериалов за счет их комбинирования с проводящими оксидами и графеном. В частности, возможен управляемый напряжением спектральный сдвиг электромагнитного отклика в инфракрасном и терагерцовом диапазоне [20]. Для создания подстраиваемых метаматериалов может быть использовано и магнитное управление плазмонами в слоистых структурах сегнетоэлектрик – благородный металл. [21]. Сенсоры являются еще одной многообещающей областью приложения метаматериалов, плоские структуры с узкими резонансами хорошо подходят для детектирования веществ в низкой концентрации. Например, один молекулярный слой углерода может изменить коэффициент передачи метаматериала во много раз [22].

1.3 Классификация сверхпроводящих СВЧ метаматериалов

Сверхпроводящие метаматериалы предлагают большие возможности, в первую очередь из-за отсутствия омических потерь. В сверхпроводящих метаматериалах наблюдается нелинейное и мультистабильное поведение. Сверхпроводящие метаматериалы могут быть чрезвычайно чувствительны к таким внешним воздействиям, как магнитное поле, свет и электрический ток. Это позволяет говорить о применении сверхпроводящих метаматериалов в высокореактивных, переключаемых устройствах. Также к преимуществам сверхпроводящих метаматериалов следует отнести возможность создания более компактных мета-атомов (в сравнении с другими метаматериальными реализациями). Сверхпроводимость сама по себе дает уникальные возможности, основанные на квантовании магнитного потока и эффекте Джозефсона, дискретных уровнях энергии в мета-атоме и сильном диамагнетизме сверхпроводников [23, 24]. Остановимся подробнее на преимуществах использования сверхпроводящих метаматериалов.

Новые приложения метаматериалов с отрицательным показателем преломления требуют их компактного исполнения (много меньше длины волны) и минимальных потерь в метаматериале [25]. Например, для улучшения радиационной эффективности ультракомпактных дипольных антенн требуются метаматериалы, работающие на частоте 10 ГГц с габаритными размерами порядка 1 мм [26]. Такие метаматериалы должны состоять из мета-атомов (проволочек и разрезных колец) размером порядка 10 мкм. Увеличение потерь в метаматериале приведет к невозможности реализовать отрицательный показатель преломления, а значит, возможность уменьшения существующих метаматериальных структур до требуемых размеров следует обсуждать отдельно [25].

Поговорим о таком масштабировании традиционных метаматериалов из нормального металла с разрезными кольцами в качестве магнитных мета-атомов и проволочками в качестве электрических мета-атомов. Рассмотрим, что происходит с элементами из нормального металла при их уменьшении до вышеупомянутых размеров. Обычно разрезные кольца для работы на частоте 10 ГГц изготавливаются из очень толстого металлического слоя (25–50 мкм) на диэлектрической подложке. Типичный внешний диаметр кольца порядка 2,5 мм, а ширина зазора 300–500 мкм [27]. Рассмотрим, что произойдет, если линейные размеры уменьшить в десять или более раз. Эффективная

относительная магнитная проницаемость массива двойных разрезных колец, изображенного на рисунке 1, описывается следующей формулой [1]:

$$\mu_{eff} = 1 - \frac{\pi r^2 / l^2}{1 + i \frac{2l \rho_1}{\omega r \mu_0} - \frac{3lc_0^2}{\pi \omega^2 r^3 \ln \frac{2c}{d}}}, \quad (1)$$

где r – внутренний радиус внутреннего кольца,

l – период массива двойных разрезных колец,

c, d – геометрические размеры двойного разрезного кольца,

c_0 – скорость света,

ω – частота,

$\rho_1 = \frac{\rho}{ct}$ – удельное сопротивления на единицу площади поперечного сечения

металла,

t – толщина металлизации.

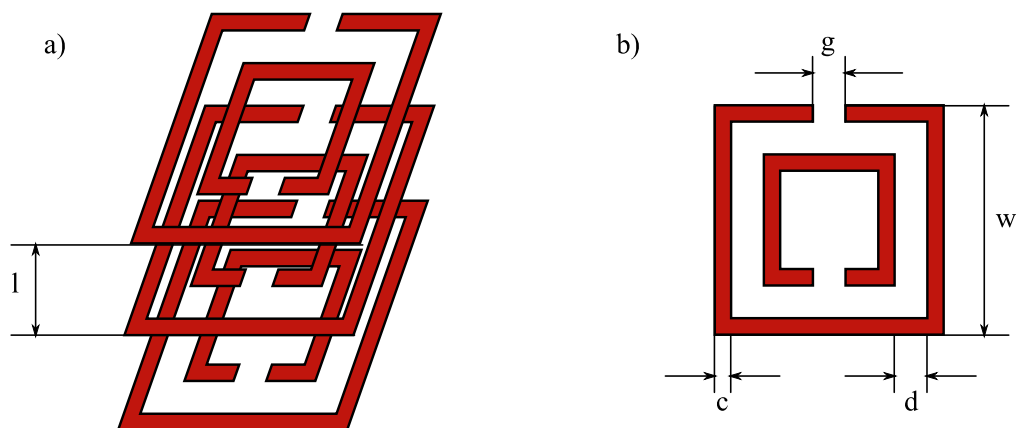


Рисунок 1 – а) Массив, составленный из двойных разрезных колец, расположенных стопкой на расстоянии l . б) Один элемент массива – двойное разрезное кольцо с внешним

размером w , шириной разреза g , расстоянием между внешним и внутренним кольцами d и шириной металлизации, образующей кольца c .

Первая резонансная частота двойного разрезного кольца задается следующим образом [25]:

$$\omega_0 = c_0 \sqrt{\frac{3l}{\pi r^3 \ln \frac{2c}{d}}} \quad (2)$$

Непосредственно выше этой частоты находится область, в которой действительная часть магнитной проницаемости отрицательна. Т.о., если расстояние между элементами массива порядка радиуса внутреннего кольца и соотношение геометрических параметров колец сохраняется неизменным, при уменьшении колец резонансная частота будет убывать примерно как $1/r$. Однако в данном рассуждении не учтено увеличение емкости (а следовательно, и резонансной частоты) из-за уменьшения зазоров в кольцах. Подобрать достаточно малую величину зазора, при уменьшении размера разрезных колец все-таки можно удерживать рабочую частоту порядка 10 ГГц. Потери в формуле (1) определяются удельным сопротивлением на единицу площади поперечного сечения металла и пропорциональны $l\rho/(crt)$. При вышеописанном масштабировании массива потери будут быстро увеличиваться обратно пропорционально произведению уменьшающихся толщины и ширины металлизации. Например, при уменьшении внешнего размера разрезных колец w с 2,5 мм до 250 мкм потери увеличатся примерно в 50–100 раз [25]. Заметим также, что вышеизложенный упрощенный расчет не учитывает скин-эффект, что весьма существенно в диапазоне частот от гигагерц и выше. В пределе скин-эффекта потери обратно пропорциональны толщине скин-слоя, которая обычно меньше, чем ширина и толщина металлизации. Исходя из этого, можно заключить, что использование нормальных металлов для ультракомпактных метаматериалов непрактично. Сверхпроводники же, напротив, обладают очень маленьким поверхностным сопротивлением на гигагерцовых частотах. Поверхностное сопротивление ниобия при 2 К на частоте 1 ГГц составляет порядка 1 нОм [28], поверхностное сопротивление высокотемпературных сверхпроводников при 77 К и на частоте 10 ГГц – порядка 100

мкОм [29]. Такие низкие величины поверхностного сопротивления сверхпроводников позволяют преодолеть вышеописанные трудности.

Много работ посвящено также новым явлениям, возникающим в мета-молекуле благодаря взаимодействию составляющих ее мета-атомов. Одно из таких явлений – классический аналог квантового эффекта электромагнитно-индуцированной прозрачности [30, 31, 32, 33]. Идея классической электромагнитно-индуцированной прозрачности заключается в том, чтобы связать два осциллятора с очень разными коэффициентами потерь. Интерференция колебаний этих осцилляторов может привести к появлению областей прозрачности в спектре и, т.о., к сильному замедлению света в этом частотном диапазоне. Один из подходов к реализации – связать асимметричные разрезные кольца, у которых есть «темная мода» магнитного диполя, и электрические диполи на «светлой моде», т.о. усилится интерференция Фано и появится окно прозрачности. Объединение сверхпроводников и нормальных металлов в мета-молекулы дает возможность получить очень сильный классический эффект электромагнитно-индуцированной прозрачности. В первой работе на эту тему были объединены «светлая мода» золотого резонатора и «темная мода» сверхпроводящего ниобиевого резонатора, что позволило продемонстрировать подстраиваемое окно прозрачности [34]. Использование «темной моды» резонатора из нитрида ниобия позволило сместить окно прозрачности на терагерцовый диапазон.

Перейдем теперь к обсуждению нелинейности, подстраиваемости и возможности переключения сверхпроводящих метаматериалов внешним воздействием. Сверхпроводники как таковые имеют нелинейные электромагнитные свойства. Существенную нелинейность дает уже эффект Мейснера, присущий всем сверхпроводникам [24, 23]. Эффект Мейснера – это полное вытеснение магнитного поля из объема проводника при его переходе в сверхпроводящее состояние. При пропускании тока, близкого к критическому, возникает дополнительная нелинейность из-за нелинейного эффекта Мейснера, локального нагрева или возникновения магнитных вихрей. Например, прохождением сигнала через массив асимметричных разрезных колец из ниобия можно управлять током благодаря локальному нагреву и возникновению магнитных вихрей [35]. И наоборот, если такие нелинейные материалы или устройства поместить в поле, близкое к критическому, или пропустить близкий к критическому ток, метаматериал окажется очень чувствительным к изменению внешних параметров [36]. Дополнительные возможности дает кинетическая индуктивность, настраиваемая в широких пределах у сверхпроводников, хотя бы одно из измерений которых меньше

глубины проникновения магнитного поля. Такая подстройка кинетической индуктивности температурой была реализована в терагерцовом диапазоне частот для разрезных колец из высокотемпературных сверхпроводников [37] и тонких пленок нитрида ниобия [38]. Более чувствительными к изменению температуры оказались квадратные разрезные кольца из еще более тонкой пленки высокотемпературных сверхпроводников [39].

Еще два класса сверхпроводящих метаматериалов берут за основу уникальные, свойственные только сверхпроводникам, эффекты. Два макроскопических квантовых эффекта – квантование магнитного потока и эффект Джозефсона – дают возможность создать по-настоящему квантовые метаматериалы с квантующимися уровнями энергии, подобные природным материалам из обычных атомов.

Квантование магнитного потока заключается в том, что магнитный поток через сверхпроводящую петлю может быть равен только целому числу квантов магнитного потока $\Phi_0 = h/2e$, где h – постоянная Планка, а e – заряд электрона. Действительно, поместим сверхпроводящую петлю во внешнее магнитное поле меньше критического. В силу эффекта Мейснера, магнитное поле выталкивается из петли экранирующими незатухающими токами. При обходе замкнутого контура в массиве сверхпроводника ток равен нулю, а фаза макроскопической волновой функции должна меняться на целое число 2π . Т.о., магнитный поток, равный интегралу вектор-потенциала по этому замкнутому контуру, пропорционален градиенту фазы, т.е. сможет принимать только дискретные значения и равняться целому числу квантов магнитного потока. [40]

Второй макроскопический квантовый эффект – эффект Джозефсона [24, 23], явление протекания сверхпроводящего тока через тонкий слой диэлектрика, разделяющий два сверхпроводника. Такой ток называют джозефсоновским током. Эффект Джозефсона был предсказан и назван именем английского физика Б. Джозефсона в 1962 году на основе теории сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера [24, 23]. Экспериментально эффект был обнаружен американскими физиками П.Андерсоном и Дж.Роуэллом в 1963 году.

Различают стационарный и нестационарный эффекты Джозефсона. Стационарный эффект наблюдается при пропускании через контакт тока меньше критического, тогда падение напряжения на контакте отсутствует (несмотря на наличие слоя диэлектрика). Эффект этот вызван тем, что электроны проводимости туннелируют сквозь слой диэлектрика без сопротивления. В действительности туннелирование куперовской пары — специфический когерентный эффект, вероятность которого порядка вероятности

туннелирования одиночного электрона, в связи с чем максимальная величина тока Джозефсона может быть близка к величине обычного туннельного тока через контакт при напряжении на нем порядка щели в энергетическом спектре сверхпроводника. Нестационарный эффект можно наблюдать при пропускании через контакт тока, величина которого превышает критическое значение. При этом возникающее на контакте падение напряжения V приводит к возникновению электромагнитных волн на контакте, частота которых определяется как:

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (3)$$

где e — заряд электрона.

Получим, прежде всего, зависимость свободной энергии от разности фаз φ сверхпроводящей волновой функции в джозефсоновском контакте. При нарастании тока через переход от нуля до величины I_s за время t в переходе запасается энергия:

$$E_{св} = \int_0^t I_s V dt, \quad (4)$$

где V — это напряжение, возникающее на переходе в процессе нарастания тока согласно формуле второго уравнения Джозефсона [24, 23]:

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (5)$$

Подставив выражения первого закона Джозефсона $I_s = I_c \sin \varphi$ и проинтегрировав, получим джозефсоновскую энергию

$$E_{св} = E_j (1 - \cos \varphi), \quad (6)$$

где $E_j = \frac{\hbar I_c}{2e} = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$ – есть максимальная величина понижения энергии перехода за счет наличия слабой связи между сверхпроводящими берегами.

Джозефсоновский переход фактически является нелинейной индуктивностью, запасающей энергию при изменении тока, протекающего через него. При вычислении полной свободной энергии замкнутой системы, в которую включен джозефсоновский переход, нужно учитывать также энергию, затрачиваемую источником тока:

$$E_{ист} = \int_0^{\varphi} IV dt = \frac{\hbar I}{2e} \varphi = \frac{\Phi_0 I \varphi}{2\pi}. \quad (7)$$

Т.о., свободная энергия для рассматриваемого случая перехода с заданным током (т.е. потенциальный «рельеф» вдоль «угловой координаты» разности фаз φ) изображено на рисунке 2 и определяется соотношением:

$$E = E_j \left(1 - \cos \varphi - \frac{I}{I_c} \varphi \right), \quad (8)$$

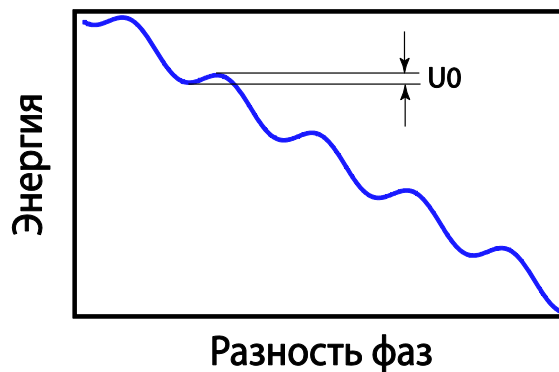


Рисунок 2 – Потенциальный рельеф $E(\varphi)$ джозефсоновского перехода с заданным током. Локальные минимумы находятся в точках $\varphi = \arcsin \frac{I_s}{I_c}$.

С увеличением тока через переход средний наклон изображенного рельефа («стиральной доски») возрастает, а глубина локальных минимумов уменьшается. При $I=I_c$ потенциальные барьеры U_0 на кривой (Рисунок 1) исчезают, что соответствует непрерывному изменению фазы во времени и появлению напряжения на переходе. Токи, протекающие через джозефсоновский контакт, можно разделить на три составляющие: джозефсоновский сверхток, подчиняющийся первому закону Джозефсона, обычный омический ток (который получается в результате деления на R_j выражения напряжения из второго уравнения Джозефсона) и компонента, тока смещения, обусловленного наличием емкости у джозефсоновского туннельного перехода $I_D = C \frac{dV}{dt}$. Т.о.:

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (9)$$

Сам контакт можно представить в виде эквивалентной схемы (рисунок 3), где указанные разные токи протекают параллельно.

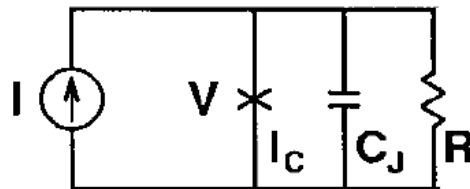


Рисунок 3 – Эквивалентная схема джозефсоновского контакта.

Одним из отличительных свойств джозефсоновского перехода является наличие у него нелинейной индуктивности. Выражение для индуктивности имеет вид:

$$L_j(\varphi) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi}. \quad (10)$$

Таким образом, контролируя разность фаз на переходе, можно подобрать требуемое значение для индуктивности перехода, в том числе отрицательные значения.

Вместе квантование магнитного потока и джозефсоновский эффект работают в сверхпроводящей петле с джозефсоновскими контактами. Здесь разность фаз на берегах контакта определяется внешним магнитным полем. Такая петля с джозефсоновскими переходами называется сквид (SQUID – superconducting quantum-interference device) или сверхпроводящий квантовый интерферометр. Если в петле только один джозефсоновский контакт, то ее называют рф-сквид. Мета-атомы в виде рф-сквидов – это нелинейный и подстраиваемый аналог разрезных колец [41].

1.4 Экспериментальные методы исследования сверхпроводящих метаматериалов

Для изготовления сверхпроводящих метаматериалов используется ниобий, нитрид ниобия, алюминий, оксид алюминия. Все это низкотемпературные сверхпроводники, для работы с которыми требуется специальное криогенное оборудование. Простейшей конструкцией криогенной установки является столитровый дюар с жидким гелием, в который погружается т.н. дипстик. Дипстик представляет собой закрытый экраном длинный теплоизолированный стержень, на конце которого находится держатель образца. Провода и кабели идут вдоль стержня от образца к внешним разъемам на другом конце дипстика. Т.о. один конец дипстика погружается в дюар и находится при температуре кипения гелия, второй конец остается снаружи и имеет комнатную температуру. Через разъемы на теплом конце дипстика подаются и снимаются сигналы с образца. Используют так же заливные и проточные криостаты. Заливные криостаты имеют теплоизолированную гелиевую (или азотную) ванну, в тепловом контакте с которой находится исследуемый образец. К образцу также подводятся кабели и провода от внешних разъемов криостата. Ванна, наполненная жидким гелием (или азотом), поддерживает на образце постоянную низкую температуру в течении времени, зависящего от объема ванны, степени теплоизоляции ванны от теплых частей криостата и потоком тепла непосредственно от образца в процессе измерения. В проточных криостатах температура поддерживается за счет постоянного протекания жидкого гелия по «змеевику», в тепловом контакте с которым находится образец.

В данной работе использовалась установка следующего поколения – криостат замкнутого цикла, показанный на рисунке 4. Криостат замкнутого цикла также использует гелий, но в качестве рабочего тела для охладителя на пульсирующих трубках. Такой охладитель работает по принципу двигателя Стирлинга. Для получения направленного теплового потока газ из буферного объема перекачивается в принимающий цилиндр через т.н. регенератор - газопроницаемый материал с большой теплоёмкостью. Регенератор охлаждает газ в процессе сжатия и нагревается сам. В процессе расширения регенератор нагревает газ и охлаждается сам. В результате работы возникает разница температур на двух концах регенератора. Более теплая точка поддерживается при комнатной температуре, более холодная используется для охлаждения. Внутренность криостата показана на рисунке 5 и состоит из расположенных одна под другой теплоизолированных

пластин, каждая из которых в охлажденном состоянии достигает своей температуры, чем ниже пластина, тем меньше температура. Для охлаждения необходимо минимизировать теплообмен с окружающей средой, для этого внутренность криостата закрывается четырьмя коаксиальными экранами, которые последовательно фиксируются на подвесе и откачиваются вакуумным насосом.

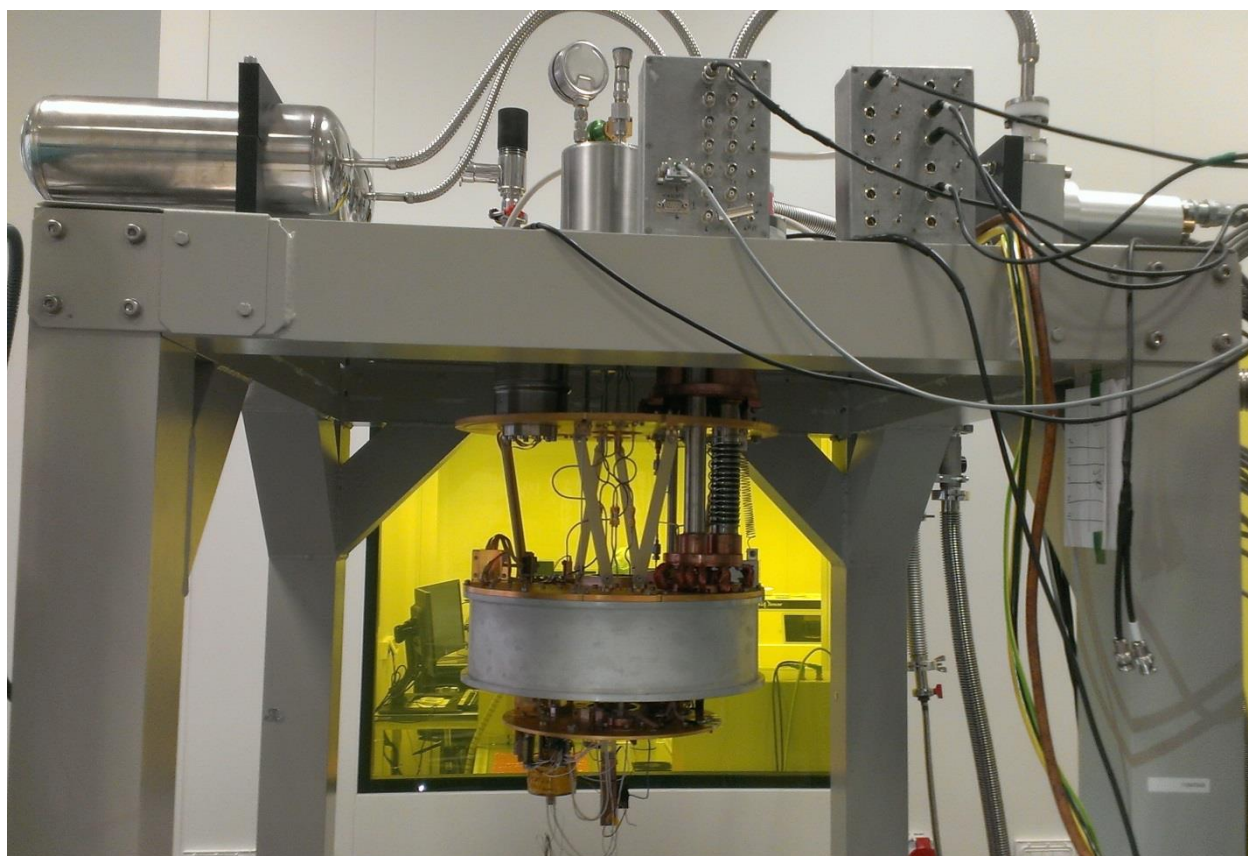


Рисунок 4 – Общий вид верхней части криостата замкнутого цикла. Слева вверху видны два горизонтально расположенных цилиндра – буферный объем охладителя на пульсирующих трубках. Вверху по центру расположены коробки с разъемами для подведения питания к криогенным СВЧ усилителям, подачи и снятия постоянного тока (напряжения) на исследуемые образцы.

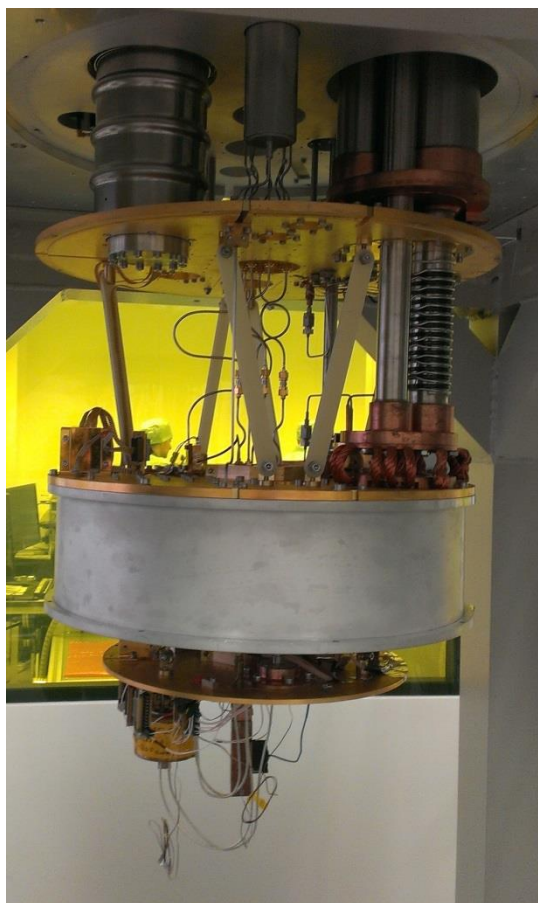


Рисунок 5 – Внутренняя часть криостата замкнутого цикла. Видны три расположенные одна под другой пластины. К нижней пластине крепится держатель образца. Коаксиальные кабели для подведения микроволновых сигналов к образцу идут от верхней (теплой) части криостата к нижней (самой холодной) пластине криостата. Также виден один из внутренних алюминиевых теплоизолирующих экранов.

Распространенным методом поиска резонансных частот разнообразных сверхпроводящих резонаторов является измерение зависимости S -параметров (элементов матрицы рассеяния) от частоты возбуждающего сигнала. СВЧ сигнал возбуждает исследуемую структуру через передающую линию, копланарную линию, возбуждающие кольца. Когда частота возбуждающего сигнала совпадает с собственной частотой резонатора, наблюдается увеличение коэффициента передачи. Для определения S -параметров используется векторный анализатор цепей. Этот прибор измеряет комплексные коэффициенты прохождения и отражения для каждого из двух возможных направлений сигнала для систем с двумя входами. Именно потому, что он может определить и амплитуду, и фазу принимаемого сигнала (оба параметра вычисляются

относительно изначально поданного), он называется векторным, в отличие от скалярных устройств, измеряющих только относительную амплитуду.

Исследование функций распределения тока в сверхпроводящих структурах проводится при помощи низкотемпературного лазерного сканирующего микроскопа. Метод лазерного зондирования успешно используется для исследования пространственного распределения сверхпроводящих параметров тонких металлических пленок [42, 43, 44]. Лазерный сканирующий микроскоп состоит из заливного криостата с оптическим окном, лазерного диода, модулятора напряжения, подаваемого на лазерный диод, оптической системы, x-y сканеров, позиционирующих лазерный луч, микроволнового источника, теплого и холодного усилителей, диода и синхронного детектора, передающего данные на персональный компьютер. Исследуемый образец, плоская сверхпроводящая структура, помещается в криостат на охлаждаемый держатель, через образец передается СВЧ сигнал. Резонатор освещается лазерным лучом, действующим как бесконтактный оптический зонд. Лазерный луч нагревает сверхпроводник в некоторой малой области, подавляет сверхпроводимость и уменьшает переменный ток через нагретую область, т.е. вносит дополнительные потери в систему передачи СВЧ сигнала. Синхронный детектор фиксирует изменение коэффициента пропускания (S-параметр) сигнала через образец, как функцию положения лазерного луча на поверхности образца. Коэффициент пропускания изменяется пропорционально квадрату поверхностного тока, подавляемого лазерным лучом в данной области исследуемого образца. Регистрируя потери, вызванные лазерным лучом, получается двумерное изображение плотности токов, каждый пиксель которого соответствует изменению коэффициента пропускания системы при воздействии лазера на соответствующую точку образца.

Так ЛСМ изображение формируется в результате взаимодействия лазерного облучения с исследуемой структурой. Любое изменяющееся в течение этого взаимодействия свойство сверхпроводника или лазерного луча может служить сигналом фотоотклика $PR(x, y)$. При исследовании различных свойств образцов для создания ЛСМ изображений используется более десяти различных режимов обнаружения сигнала фотоотклика. Использование определенного режима (или комбинирование нескольких) диктуется поставленной задачей. Ниже остановимся на описании наиболее типичных режимов, которые, в частности, использовали мы, чтобы получить результаты, описанные в этой работе.

Оптический режим предназначен для визуализации оптически разрешаемых неровностей на поверхности структуры. Для такой визуализации регистрируется мощность и (или) угол деполяризации отраженного лазерного луча в процессе сканирования. Оптический режим помогает в поиске поверхностных микродефектов, границ зерен, областей, отличных по содержанию кислорода в материале и в сравнении с изображениями, полученными в других режимах, установить корреляцию между различными визуализируемыми свойствами. Кроме того, этот режим полезен для калибровки интенсивности луча, размера раstra и оценки искажения раstra. Режим постоянного напряжения позволяет исследовать пространственную структуру резистивного состояния сверхпроводника. Чтобы построить ЛСМ изображение в этом режиме, через образец пропускается постоянный транспортный ток I_B , что, совместно с воздействием лазерного зонда, переводит образец в резистивное, несверхпроводящее состояние. Изменение напряжения, генерируемого в образце из-за его локального освещения лазером, служит сигналом отклика, создающего ЛСМ изображение. Феноменологически общее изменение напряжения, индуцированного в небольшой области сверхпроводника, может быть выражено как

$$dV = \frac{\partial V}{\partial T} dT + \frac{\partial V}{\partial I} dI, \quad (11)$$

где V – измеряемое напряжение,

T – температура,

I – ток.

Здесь первое слагаемое описывает режим теплового отклика, т.н. болометрический режим, второе слагаемое описывает неболометрический режим. Для демонстрации зависимости напряжения от падающего излучения P , сопротивления образца R , тока смещения I_b , эффективной теплопроводности $G(T)$, сверхпроводящей щели Δ и критического тока I_c в более явном виде предыдущее выражение можно переписать следующим образом [45]:

$$\frac{dV}{dP} = I_b \frac{\partial R}{\partial T} \frac{1}{G(T)} + \frac{\partial V}{\partial I_c} \frac{\partial I_c}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial P}. \quad (12)$$

Болометрическая часть, представленная здесь также первым слагаемым, широко известна и хорошо изучена, включая случай модулированной мощности лазера: $P = P_0 \sin(2\pi f_M t)$. В большинстве экспериментов по ЛСМ визуализации зависящих от температуры параметров сверхпроводников модуляция лазерной мощности играет главную роль. Принимая во внимание, что болометрический отклик уменьшается обратно пропорционально частоте модуляции, можно варьировать его вклад в общий отклик, меняя частоту модуляции от чисто болометрического режима вплоть до момента, когда второй член начинает преобладать. Кроме того, пространственная область осциллирующей (из-за модуляции мощности лазерного луча) температуры уменьшается с ростом частоты модуляции [46]. Неболометрический режим интересен при изучении специфических точечных эффектов от воздействия оптического излучения на сверхпроводимость, также неболометрический режим позволяет повысить пространственное разрешение до величины оптического зонда. Обратим внимание, что данные механизмы прямого изменения сверхпроводимости оптическим воздействием описываются третьим сомножителем в неболометрическом слагаемом выражения (12). Первый и второй сомножители здесь относятся к типу сопротивления материала и могут быть оценены из модельных соображений. В термоэлектрическом (как амплитудном, так и фазовом) режиме образец электрически не накачивается. Лазерный луч разогревает поверхность пленки образца, и при переходе образца в несверхпроводящее состояние возникает поток тепла сквозь толщу пленки [47, 48, 49]. В случае преимущественно ортогональной диффузии тепла в подложку периодический нагрев поверхности пленки лазерным датчиком создает разность температур ΔT между верхней и нижней поверхностями пленки, которая может вызвать термоэлектрическое напряжение. Было показано, что благодаря эффекту Зеебека [50] фотоотклик в данном режиме пропорционален углу α между кристаллографической осью c пленки и нормалью к его поверхности:

$$\delta V_S(x, y) = \Delta T \Delta S \frac{l_T}{d_f} \sin 2\alpha, \quad (13)$$

где l_T – радиус теплового пятна, совпадающий с длиной тепловой диффузии в пленке,

d_f – толщина пленки,

$\Delta S = S_{ab} - S_c$ – разница значений термо-эдс вдоль кристаллографической оси c и в плоскости (a, b) [50].

Термоэлектрический режим полезен для идентификации отдельных зерен различной кристаллографической ориентации, которые неравномерно распределены в пленке ВТСП [51]. Множество режимов ЛСМ съемки используются для бесконтактного исследования пространственно неоднородного ВЧ транспорта в пассивных микроволновых устройствах. Чаще всего используются методы исследования линейной плотности ВЧ тока, нелинейной плотности тока (нелинейные искажения), а также визуализации доминирующих источников омических потерь, которые неравномерно возникают в местах с малым поперечным сечением. Для болометрического исследования всех термочувствительных ВЧ свойств пленок сверхпроводников внешним сигналом генератора, работающего в СВЧ полосе, возбуждается резонанс устройства. Как правило, зависимость передаваемой СВЧ мощности $P_{out}(f)$ от частоты возбуждения f может быть примерно в пределе слабой связи описана лоренцевской кривой [52]:

$$P_{out}(f) = \frac{P_{in}}{\left(1 - \frac{f_0}{f}\right)^2 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}, \quad (14)$$

где P_{in} – подаваемая мощность,

f_0 – резонансная частота,

Q – добротность.

И добротность, и резонансная частота зависят от температуры (т.к. определяются поверхностным сопротивлением и поверхностным реактансом структуры):

$$R_s = \frac{1}{2} \mu_0^2 \omega^2 \lambda_L^3(T) \sigma_1(T, \omega), \quad (15)$$

$$X_s(T, \omega) = \mu_0 \omega \lambda_L(T, \omega), \quad (16)$$

где $\omega = 2\pi f$ – угловая частота,

μ_0 – магнитная постоянная,

σ_1 – действительная часть комплексной проводимости,

$\lambda_L(T) = \lambda_L(T=0) / \sqrt{1 - (T/T_c)^m}$ – лондоновская длина и $m=2-4$ [77, 78].

На любой микроволновой частоте оптическое поглощение модулированной лазерной энергии периодически нагревает исследуемую пленку в области размером порядка длины тепловой волны l_T , что приводит к болометрическому смещению $\delta \|S_{12}(f)\|^2$ пропускания микроволнового сигнала через исследуемое устройство. Этот эффект приводит к возникновению термоиндуцированной модуляции передаваемой мощности

$$\delta P_{out}(f) \propto \frac{\partial \|S_{12}(f)\|^2}{\partial T} \delta T, \quad (17)$$

которая фиксируется анализатором спектра и является сигналом фотоотклика для формирования ЛСМ изображений. Важно помнить, что в общее смещение $\delta \|S_{12}(f)\|^2$ дают вклад и смещения собственной резонансной частоты δf_0 , и уширение спектра Δf_{3dB} . Как правило, смещение собственной резонансной частоты δf_0 связано с изменением кинетической индуктивности $L_k = \frac{\mu_0 l}{2w_s} \lambda_{eff}(T)$ под тепловым воздействием зонда. В свою очередь, уширение спектра $\Delta f_{3dB} \propto \Delta \frac{1}{2Q}$ непосредственно связано с фотоиндуцированной модуляцией обратной добротности (обратная добротность возрастает при локальном увеличении омических потерь). В этом случае вызванное лазером искажение $P_{out}(f)$ формы

резонансной кривой может быть представлено в виде суммы резистивной $\delta V_{HF}^{RES}(x, y)$ и индуктивной $\delta V_{HF}^{IND}(x, y)$ компонент $P_{out}(f)$, которые могут быть получены с помощью частных производных выражения (17).

$$\delta V_{HF}^{RES}(x, y) \propto P_{IN} \frac{\partial \|S_{12}(f)\|^2}{\partial (1/2Q)} \delta(1/2Q), \quad (18)$$

$$\delta V_{HF}^{IND}(x, y) \propto P_{IN} \frac{\partial \|S_{12}(f)\|^2}{\partial f_0} \delta f_0. \quad (19)$$

При температурах значительно ниже критической резистивной составляющей ЛСМ фотоотклика можно пренебречь. Тогда в формировании ЛСМ изображений играет роль только индуктивная составляющая $\delta V_{HF}^{IND}(x, y)$ [53, 54, 55, 56]:

$$\delta V_{HF}^{IND}(x, y) \propto -\frac{\partial P_{HF}}{\partial f} f \frac{\mu_0}{2} \frac{[\lambda_{eff}(x, y) J_{RF}(x, y)]^2}{W} A d_f \left(\frac{\delta \lambda_{eff}(x, y)}{\lambda_{eff}(x, y)} \right), \quad (20)$$

где $\delta \lambda_{eff}$ – фотоиндуцированное изменение эффективной глубины проникновения
 $\lambda_{eff} = 2\lambda_L^2 / d_f$,

A – площадь теплового пятна (диаметром порядка l_T).

Т.о. появляется возможность измерить величину, пропорциональную квадрату плотности тока $J_{RF}^2(x, y)$ [54]. В нелинейном (интермодуляционном) режиме визуализации ЛСМ на резонатор подается сигнал на двух фиксированных частотах (f_1 и f_2). Сигналы на частотах f_1 и f_2 расположены на кривой $|S_{12}(f)|$ на расстоянии Δf и имеют одинаковую амплитуду. Для визуализации свойств резонатора снимаются изменения в значениях P_{f1} или P_{2f1-f2} как функция положения (x, y) лазерного луча на образце. Анализатор спектра используется

для измерения мощности сигнала (P_f) на этих интермодуляционных частотах, чтобы увидеть, где именно в устройстве эти сигналы генерируются. Изменение в передаваемой мощности $P_{2f_1-f_2}$ описывается следующим образом:

$$\frac{\delta P_{2f_1-f_2}}{P_{2f_1-f_2}} \propto \frac{\delta \lambda}{\lambda} - \frac{\delta J_{IMD}}{J_{IMD}} - \frac{\int \delta \lambda R_s J_{RF}^2 dS + \int \delta R_s \lambda J_{RF}^2 dS}{\int \lambda R_s J_{RF}^2 dS}, \quad (21)$$

где R_s – поверхностное сопротивление,

J_{IMD} – нелинейный ток [57],

δJ_{IMD} – изменение нелинейного тока, вызванное нагревом лазерного луча.

Следовательно, фотоотклик в нелинейном (интермодуляционном) режиме визуализации ЛСМ связан с изменениями в локальном нелинейном токе, а также изменением глубины проникновения и поверхностного сопротивления в месте возмущения.

1.5 Теоретические методы описания спиральных резонаторов.

Спираль является одной из наиболее распространенных замедляющих систем. Простейшая спираль образуется при сворачивании провода по винтовой линии. Изгибая провод в спираль, мы удлиняем путь волны и тем самым уменьшаем скорость ее распространения в осевом направлении. Эта простая идея была использована еще Герцем в его классических опытах по исследованию распространения электромагнитных волн. В настоящее время спиральные линии широко применяются как линии задержки в метровом диапазоне, как замедляющие системы в сантиметровом диапазоне и как волноводные системы в миллиметровом диапазоне. Спиральные линии применяются также для конструирования антенн. Строгий расчет характеристик спирали связан с большими математическими трудностями. Эти трудности обусловлены тем, что нет подходящей системы координат, в которой поверхность проводника спирали совпала бы с координатными поверхностями и при этом разделились бы переменные в уравнениях Максвелла. В связи с этим было предложено большое число различных приближенных методов. Наибольшее значение имеют метод спирально-проводящего цилиндра, метод векторного потенциала и метод Фурье [6].

Модель спирально-проводящего цилиндра является естественным обобщением модели анизотропно-проводящего цилиндра, которая широко применялась ранее для расчета полей однослойной катушки при протекании по ней постоянного тока. Сущность модели состоит в том, что реальная однослойная плотно навитая катушка заменяется системой проводящих колец с тем же радиусом, что и радиус катушки. Эти кольца плотно прилегают друг к другу, однако электрически изолированы друг от друга. При бесконечном увеличении числа таких колец на единицу длины при соответствующем уменьшении до нуля диаметра проводников в пределе образуется сплошной цилиндр, обладающий анизотропной проводимостью. Действительно, по такому цилиндру ток не может протекать в осевом направлении, так как кольца изолированы друг от друга, и в то же время по окружности цилиндра ток может протекать свободно. Исследование свойств катушки в приближении анизотропно-проводящего цилиндра подробно проведено, например, в работе [58]. Аналогичная идея о замене реальной спирали спирально-проводящим цилиндром была успешно применена различными авторами в разное время [59, 60] для исследования свойств спиральных замедляющих систем. Спирально-проводящий цилиндр представляет собой поверхность, которая обладает бесконечной

проводимостью в направлении, совпадающем с направлением витков спирали, и не проводит в перпендикулярном к нему направлении. Такая поверхность может быть, например, образована путем намотки спирали из большого числа проволок, количество которых стремится к бесконечности, а диаметр — к нулю. При этом проводники электрически изолированы друг от друга. При замене спирали спирально-проводящим цилиндром периодичность спирали не сохраняется. Такой цилиндр не является периодической системой, так как в двух сечениях, отстоящих одно от другого на произвольном расстоянии, геометрическая структура одинакова, в то время как в реальной спирали этого нет. Таким образом, спирально-проводящий цилиндр с геометрической точки зрения представляет собой однородную вдоль оси систему, такую же, например, как цилиндрический волновод, коаксиальная линия и т. д. Так же как в однородном волноводе, в спирально-проводящем цилиндре могут распространяться лишь отдельные дискретные нормальные виды волн и никаких пространственных гармоник нет. Трудно заранее утверждать, что свойства спирально-проводящего цилиндра могут достаточно хорошо отображать свойства реальной спирали. Эксперимент, однако, показывает, что в определенных пределах такая замена возможна. С физической точки зрения этот факт объясняется наличием в спирали явления «пространственного резонанса», о котором речь будет идти далее. Расчет в приближении спирально-проводящего цилиндра широко применяется для анализа свойств различного типа спиральных замедляющих систем. Получающиеся при этом результаты можно назвать «нулевым приближением» или приближением «одной волны», так как пространственные гармоники в спирально-проводящем цилиндре, как уже отмечалось, отсутствуют, и распространяются лишь отдельные виды волн. В задачу более строгих методов расчета входит выяснение границ применения этого метода и введение соответствующих поправок, учитывающих дискретность структуры и периодичность спирали [6].

Рассмотрим сначала наиболее простой случай — бесконечно длинную спиральную катушку в свободном пространстве. Обозначим средний радиус катушки a , диаметр проволоки δ , шаг спирали d , угол подъема витков спирали α . В соответствии с вышеизложенными рассуждениями, заменим реальную спираль бесконечно длинным спирально-проводящим цилиндром. Радиус цилиндра обычно принимается равным среднему радиусу катушки a , но, вообще говоря, это не обязательно. В тех случаях, когда радиус проволоки $\delta/2$ сравним по величине с радиусом катушки, можно радиус цилиндра брать равным $a + \delta/2$ или $a - \delta/2$. Толщина стенок цилиндра принимается бесконечно малой. Для расчета полей удобно использовать цилиндрическую систему координат. Ток,

протекающий по спиральному направлению, можно представить в виде суммы кругового тока I_θ и осевого тока I_z . Круговой ток соответствует продольному магнитному полю H_z , а осевой ток соответствует поперечному полю H_θ . Т.к. спирально-проводящий цилиндр не проводит ток перпендикулярно виткам, перпендикулярная виткам компонента напряженности электрического поля на поверхности такого цилиндра должна быть отлична от нуля. Эта составляющая поля также может быть представлена в виде суммы кругового E_θ и осевого E_z полей, т.е. в спирально-проводящем цилиндре должны присутствовать как продольная, так и поперечная составляющие электрического поля. Т.о., в отличие от цилиндрического волновода поле в спирально-проводящем цилиндре представляется суммой Е- и Н-волн. В отличие от цилиндрического волновода в спиральном волноводе эти типы волн не могут существовать порознь. В цилиндрической системе координат они могут быть записаны в терминах составляющих вектора Герца Π следующим образом. Е-волны [6]:

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z \partial r}, \quad (22)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_m}{\partial z \partial \theta}, \quad (23)$$

$$E_z = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \theta} \right) \right], \quad (24)$$

$$H_r = i\omega \varepsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_m}{\partial \theta}, \quad (25)$$

$$H_\theta = -i\omega \varepsilon_0 \frac{\partial \Pi_m}{\partial r}, \quad (26)$$

$$H_z = 0. \quad (27)$$

Н-волны [6]:

$$E_r = -i\omega\mu_0 \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta}, \quad (28)$$

$$E_\theta = i\omega\mu_0 \frac{\partial \Pi_e}{\partial r}, \quad (29)$$

$$E_z = 0, \quad (30)$$

$$H_r = \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z \partial r}, \quad (31)$$

$$H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_e}{\partial z \partial \theta}, \quad (32)$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_e}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (33)$$

В самом общем случае векторный потенциал выражается через составляющие вектора Герца следующим образом. Е-волны:

$$\vec{A} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t}, \quad (34)$$

Н-волны:

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}_m. \quad (35)$$

Вектор Герца удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0. \quad (36)$$

Если представить вектор Герца в виде произведения трех функций, зависящих только от одной переменной $\Pi(r, \theta, z) = R(r)Z(z)\Theta(\theta)$, то в волновом уравнении разделятся переменные, и оно преобразуется в систему из трех уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[(k^2 - \beta^2) r^2 - m^2 \right] R = 0, \quad (37)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \beta^2 Z = 0, \quad (38)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0, \quad (39)$$

где β – волновое число вдоль оси z ,

m – число волн, укладываемых вдоль окружности поперечного сечения спирали.

Модель спирально-проводящего цилиндра может использоваться для описания свойств разнообразных спиральных систем. Например, для описания свойств спирали в анизотропном диэлектрике [61–63], в феррите [64–66] и в плазме [67, 68]. Модель анизотропно-проводящей поверхности применима не только для описания цилиндрической катушки, но и для спиральных систем других форм: эллиптической [69], конической, плоской. Остановимся подробнее на плоских спиралях. Плоская спираль образуется проводником, изогнутым в форме архимедовой или логарифмической спирали. Для нахождения полей и получения закона дисперсии будем рассматривать плоскую спираль как анизотропно-проводящую плоскость, которая проводит ток в направлении витков спирали и не проводит в перпендикулярном к нему направлении. В полярной системе координат уравнение спирали в самом общем виде имеет вид $r = f(\theta)$. В частности, для спирали Архимеда $r = R_e(1 - \alpha\theta)$, для логарифмической спирали $r = ae^{m(\theta + \theta_0)} + b$, где R_e , α , a , b , m , θ_0 – константы. Плоская спираль описывается следующими параметрами: начальные (внутренние) значения радиуса и угла, шаг спирали d и угол между касательной к спирали и нормалью к радиусу ϕ . Шагом спирали мы называем расстояние между двумя ближайшими точками спирали, лежащими на одном

радиусе (линию спирали считаем не имеющей толщины). У спирали Архимеда шаг постоянен и равен $2\pi\alpha R_e$, у логарифмической спирали шаг возрастает с увеличением радиуса и равен $r(e^{2\pi m} - 1)$. Угол ϕ определяется следующим образом:

$$\operatorname{ctg}\phi = \frac{f(\theta)}{f'_\theta(\theta)}. \quad (40)$$

У спирали Архимеда $\operatorname{ctg}\phi_a = -\frac{r}{\alpha R_e}$, т.е. при движении от центра спирали к ее периферии, угол между касательной к спирали и нормалью к радиусу уменьшается. У логарифмической спирали, напротив, угол между касательной к спирали и нормалью к радиусу постоянен и $\operatorname{ctg}\phi_l = \frac{1}{m}$. Так же, как и в случае спирально-проводящего цилиндра, рассматривая спирально-проводящую плоскость, мы имеем дело с суммой Е и Н-волн. Рассмотрим поля с длиной волны существенно превышающей внешний радиус спирали. Такие поля будут аксиально симметричны, т.е. их производная по полярному углу равна нулю. На поверхности спирали должны выполняться следующие граничные условия: непрерывность тангенциальных составляющих электрического поля, непрерывность составляющей магнитного поля, параллельная направлению витков, равенство нулю составляющей электрического поля вдоль витков спирали. Применив эти граничные условия к уравнениям (23)–(33) и (37)–(39), получим следующий закон дисперсии:

$$p = k \operatorname{ctg}\phi, \quad (41)$$

где p – волновое число вдоль оси z .

Для логарифмической спирали закон дисперсии прост, позволяет легко найти резонансные частоты и коэффициент замедления волны в такой системе. У архимедовой спирали закон дисперсии включает в себя переменную r , что значительно усложняет дело и требует в конечном итоге дальнейшего и более подробного исследования.

Глава 2 Электродинамика кольцевого спирального резонатора

2.1. Построение аналитической модели кольцевого спирального резонатора.

В данном разделе пойдет речь о теоретическом изучении плоского сверхпроводящего резонатора в форме спирали Архимеда без центральной части. В работах [71, 72] было экспериментально показано, что плоские спиральные резонаторы в форме спирали Архимеда без центральной части демонстрируют от пяти до семи резонансных пиков, первый из которых наблюдается при 74 МГц. В этих работах исследовалась плоская спираль с большим числом плотноупакованных витков. В ходе дальнейшего исследования подобных структур нами была обнаружена необычная зависимость резонансной частоты от числа осцилляций тока в спирали. Измеренные резонансные частоты соотносились как нечетные числа, что нехарактерно для резонатора с холостым ходом на обоих концах. Для количественного анализа необычной зависимости резонансных частот от числа осцилляций тока в спирали n , возникла необходимость тщательно выполнить теоретический анализ электродинамики спирального резонатора.

При построении модели электродинамики плоского спирального резонатора мы полагаем спираль кольцевой, т.е. имеющей внутренний радиус близким к внешнему, и плотноупакованной, т.е. имеющей большое количество витков. Ток внутри проволоки, образующей спираль, считаем однородным по поперечному сечению.

Рассмотрим однозаходную спираль – спираль Архимеда – конечной длины с большим количеством плотноупакованных витков. Электрический ток $\vec{j}(\vec{\rho}, t)$ течет по спирали. Вектор $\vec{\rho}$ определяет координату точки на спирали. Уравнение спирали Архимеда можно записать в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\rho(\varphi) = R_e (1 - \alpha\varphi), \quad (42)$$

где φ – полярный угол, изменяющийся от 0 до $2\pi N$;

α – параметр, характеризующий плотность навивки спирали и равный

$$\frac{d}{2\pi R_e} = \frac{R_e - R_i}{2\pi N R_e} \ll 1;$$

R_e и R_i – соответственно внешний и внутренний радиусы спирали;

N – количество витков в спирали;

d – расстояние между соседними витками спирали.

Схематически данная спираль изображена на рисунке 6.

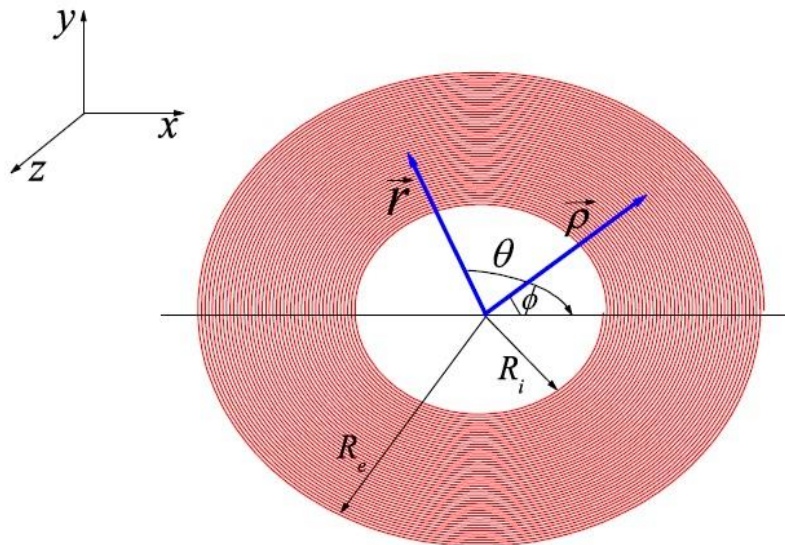


Рисунок 6 – Эскиз спирального резонатора с большим количеством витков, внешним радиусом R_e и внутренним радиусом R_i . Радиус-вектор $\vec{\rho}$ и полярный угол ϕ задают точку на спирали. Радиус-вектор \vec{r} и полярный угол θ задают некоторую точку на плоскости спирали.

Метод, которым мы воспользуемся для изучения электродинамики спирали, аналогичен тому, что используется для описания бесконечной спиральной катушки [6]. Пренебрегая неоднородностью распределения тока внутри проволоки, образующей спираль, следующим образом представим вектор-потенциал, зависящий от координаты и времени, в цилиндрических координатах:

$$\vec{A}(t, z, r, \theta) = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \int_0^r \frac{e^{-ikR}}{R} \psi(s) \vec{ds}, \quad (43)$$

где k – волновой вектор, равный $\frac{\omega}{c}$;

\vec{ds} – вектор вдоль спирали;

$\psi(s)$ – функция распределения тока по длине спирали;

R – расстояние между точкой с координатами (z, r, θ) и точкой на спирали с координатами $(0, \rho, \varphi)$;

Электрические и магнитные поля связаны с вектор-потенциалом в цилиндрических координатах следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\mu_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - i\omega\vec{A}, \quad (44)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} [\vec{\nabla} \times \vec{A}]. \quad (45)$$

Для того, чтобы найти координатную зависимость вектор-потенциала, перейдем от координаты вдоль спирали s к радиус-вектору ρ и полярному углу φ :

$$s_r = \rho(\varphi) \cos(\theta - \varphi), \quad (46)$$

$$s_\varphi = -\rho(\varphi) \sin(\theta - \varphi). \quad (47)$$

Взяв производную по полярному углу, получим выражения для перехода от координаты вдоль спирали s к радиус-вектору ρ и полярному углу φ . Для этого вспомним, что $\rho(\varphi) = R_e - \frac{\varphi d}{2\pi} = R_e(1 - \alpha\varphi)$.

$$ds_r = d\varphi [\rho \sin(\theta - \varphi) - R_e \alpha \cos(\theta - \varphi)], \quad (48)$$

$$ds_\theta = d\varphi [\rho \cos(\theta - \varphi) - R_e \alpha \sin(\theta - \varphi)]. \quad (49)$$

С другой стороны, расстояние R между точкой с координатами (z, r, θ) и точкой на спирали с координатами $(0, \rho, \varphi)$ может быть выражено так:

$$R = \sqrt{z^2 + D^2} = \sqrt{z^2 + r^2 + R_e^2(1 - \alpha\varphi)^2 - 2rR_e(1 - \alpha\varphi)\cos(\varphi - \theta)}. \quad (50)$$

Также, для упрощения выражения (43), используем известное представление [71]:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \int_0^\infty \frac{xdx}{4\pi\sqrt{x^2 - k^2}} J_0(Dx) e^{-\sqrt{x^2 - k^2}|z|}, \quad (51)$$

где $J_0(Dx)$ – функция Бесселя первого рода.

Используем также выражение для разложения в ряд функции Бесселя первого рода [70]:

$$J_0(Dx) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\theta)} J_m(xr) J_m[xR_e(1-\alpha\varphi)], \quad (52)$$

и получим тогда компоненты вектор-потенциала в следующем виде:

$$A_r = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi N} d\varphi \psi(s) \frac{ds_r}{d\varphi} e^{im(\varphi-\theta)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\sqrt{x^2-k^2}|z|} dx}{4\pi\sqrt{x^2-k^2}} J_m(xr) J_m[xR_e(1-\alpha\varphi)], \quad (53)$$

$$A_\theta = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi N} d\varphi \psi(s) \frac{ds_\theta}{d\varphi} e^{im(\varphi-\theta)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\sqrt{x^2-k^2}|z|} dx}{4\pi\sqrt{x^2-k^2}} J_m(xr) J_m[xR_e(1-\alpha\varphi)]. \quad (54)$$

Принимая во внимание, что наибольший вклад дают слагаемые с $m=\pm 1$, упростим выражения (53) и (54):

$$A_r = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\infty} d\rho \psi(\rho) \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\sqrt{x^2-k^2}|z|} dx}{4\pi\sqrt{x^2-k^2}} J_1(xr) J_1(x\rho), \quad (55)$$

$$A_\theta = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\infty} d\rho \frac{\rho \psi(\rho)}{R_e \alpha} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\sqrt{x^2-k^2}|z|} dx}{4\pi\sqrt{x^2-k^2}} J_1(xr) J_1(x\rho), \quad (56)$$

Для того, чтобы получить резонансные частоты, используем граничные условия, характерные для проводника, т.е. положим равной нулю тангенциальную компоненту электрического поля на поверхности спирали. Это условие может быть записано следующим образом:

$$R_e \alpha E_r + r E_\theta \Big|_{z=0} = 0. \quad (57)$$

Используя выражение (44), получим:

$$E_r = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rA_r) \right], \quad (58)$$

$$E_\theta = -i\omega A_\theta. \quad (59)$$

Мы рассматриваем плотноупакованную спираль с достаточно большим количеством витков, что позволяет нам положить волновой вектор k гораздо меньшим обратного характерного размера неоднородности распределения тока $\psi(\rho)$, т.е. $k \ll \frac{1}{R_e - R_i} \ll \frac{1}{R_e}$. Т.к. r слабо меняется из-за узости спирали, выносим r из-под знака производной в формуле (58):

$$E_r = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0} \frac{d^2}{dr^2} A_r. \quad (60)$$

В плоскости спирали уравнения (55) и (56) можно упростить благодаря тому, что ρ велико в сравнении с изменением r из-за узости спирали:

$$A_r(z=0) = \alpha A_\theta(z=0) = \frac{\mu_0 I e^{i\omega t}}{(4\pi)^2} \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \ln \frac{R_e}{|\rho - r|} \quad (61)$$

Более того, принимая во внимание (57), (58) и (59), получаем, что зависимость вектор-потенциала от координаты (внутри области, занятой спиралью) имеет простой периодический вид:

$$A_r(z=0) = \frac{\mu_0 I e^{i\omega t}}{(4\pi)^2} F(r), \quad (62)$$

$$F(r) = A \cos(pr + \phi), \quad (63)$$

где: A – амплитуда вектор-потенциала,

p – волновой вектор.

Параметры p и ϕ и распределение тока находятся из следующего интегрального уравнения:

$$\int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \ln \frac{R_e}{|\rho - r|} = F(r). \quad (64)$$

Решение такого сингулярного интегрального уравнения Карлеманового типа может быть записано следующим образом:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2} F'(y) dy}{y-x} - \frac{1}{\ln \frac{2R_e}{w}} \int_{-1}^1 \frac{F(y) dy}{\sqrt{1-y^2}} \right], \quad (65)$$

где $2w = R_e - R_i$ – ширина спирали,

x – координата, отсчитываемая от середины спирали и меняющаяся в интервале от -1 до 1.

Подставив выражение (63) в формулу (65), получим:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} \left[pw \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-y^2} \sin(pwy + \phi) dy}{y-x} + \frac{\pi J_0(pw) \cos(\phi)}{\ln \frac{2R_e}{w}} \right] \quad (66)$$

Распределение тока $\psi(x)$ должно удовлетворять естественным граничным условиям $\psi(-1)=\psi(1)=0$, т.е. обращаться в ноль на концах спирали. Это возможно только для определенных значений волнового вектора p_n и, соответственно, частот $\omega_n = c\alpha p_n$. Более того, мы получаем четные решения для $\psi(x)$ при $\sin(x)=0$, а нечетные – при $\cos(x)=0$. Для четных решений имеем трансцендентное уравнение, задающее p_n и резонансные частоты:

$$\ln \frac{2R_e}{w} pw J_1(pw) = J_0(pw) \quad (67)$$

Для нечетных решений имеем другое трансцендентное уравнение, задающее p_n и резонансные частоты:

$$J_0(pw) = 0 \quad (68)$$

Наконец, решив уравнения (67) и (68), получаем резонансные частоты в виде:

$$\omega_n = \frac{c\alpha}{w} \gamma_n \quad (69)$$

Параметр γ_n может быть найден из уравнений (67) и (68). Индекс n соответствует количеству полувольт в распределении тока внутри спирали.

В частности, значения параметра γ_n для спирали с параметрами $R_e = 3\text{мм}$ и $R_i = 2.2\text{мм}$ представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметр γ_n для первых восьми мод. Именно коэффициенты γ_n определяют в формуле (69) характер зависимости резонансных частот кольцевого спирального резонатора от номера резонансной моды.

γ_1	0,82
γ_2	2,4
γ_3	3,93
γ_4	5,5
γ_5	7,05
γ_6	8,65
γ_7	10,2
γ_8	11,79

Заметим, что коэффициенты γ_n с хорошей точностью удовлетворяют эмпирическому уравнению $\gamma_n = \frac{\pi}{2}(n + \beta)$, где параметр β имеет значение порядка 0,5 и слабо растет при увеличении плотности витков спирали. Т.о. нам удалось аналитически описать экспериментально замеченную особенность спектра резонансных частот кольцевого спирального резонатора. Сравнение значений, рассчитанных по формуле (69), с измеренными резонансными частотами представлено в таблице 2, откуда видно, что аналитическая модель с высокой точностью описывает поведение исследуемого образца. Большое отклонение экспериментального значения на первой моде вызвано тем, что именно эта мода сильнее всего связывается с окружающими образец частями экспериментальной установки, выходя за рамки аналитической модели для резонатора слабо связанного с окружающей средой.

Перейдем теперь к описанию численного моделирования вышеприведенных результатов.

На первом этапе была построена функция распределения тока поперек спирали, представленная выражением (25). Для выполнения этой задачи использовался пакет символьной математики Wolfram Mathematica 8.0. Для построения функции распределения тока на четных модах использовался скрипт:

```
Clear[gamma,temp,x,f]
gamma:=0.822
temp:=BesselJ[0,gamma]/Log[15.]
func1[x_, f_]:=NIntegrate[gamma/Sqrt[1-x^2] *(Sqrt[1-y^2] *Sin[gamma*y+f])/(y-x), {y,-1,x-0.00001} ]
func2[x_, f_]:=NIntegrate[gamma/Sqrt[1-x^2] *(Sqrt[1-y^2] *Sin[gamma*y+f])/(y-x), {y,x+0.00001,1} ]
f:=0
Plot [0.5*func1 [x,f]+0.5*func2[x, f]+0.5*□*temp*Cos[f]/Sqrt[1-x^2] ,{x,-1,1}]
```

Для нечетных мод использовался скрипт:

```
Clear[gamma,temp,x,f]
gamma:=2.41
temp:=BesselJ[0,gamma]/Log[15.]
func1[x_, f_]:=NIntegrate[gamma/Sqrt[1-x^2] *(Sqrt[1-y^2] *Sin[gamma*y+f])/(y-x), {y,-1,x-0.0001} ]
func2[x_, f_]:=NIntegrate[gamma/Sqrt[1-x^2] *(Sqrt[1-y^2] *Sin[gamma*y+f])/(y-x), {y,x+0.0001,1} ]
f:=1/2
Plot [func1 [x,f]+func2[x, f]+□*temp*Cos[f]/Sqrt[1-x^2] ,{x,-1,1}]
```

Интеграл по y в формуле (65) был взят численно и в смысле главного значения. Это было сделано для того, чтобы обойти неустранимый разрыв вдоль линии $x=y$. Вид подынтегральной функции представлен на рисунке 7.

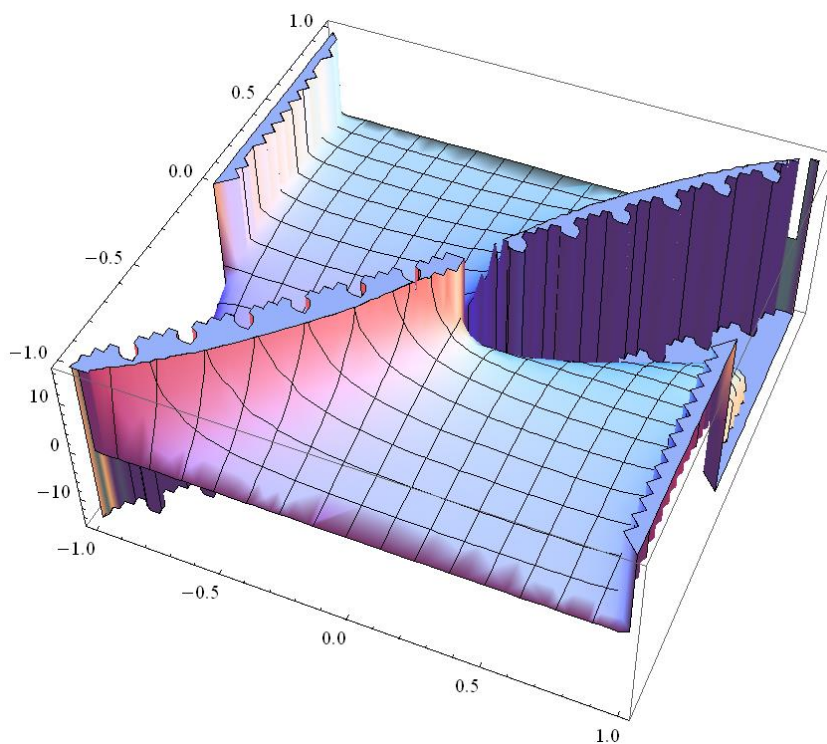


Рисунок 7 – Вид подынтегральной функции выражения (65) в зависимости от координат x и y . Координаты x и y отсчитываются от середины спирали и принимают значения от -1 на внутреннем радиусе спирали до 1 на внешнем радиусе спирали.

Для того чтобы компенсировать неточности такого численного вычисления, были уточнены коэффициенты γ_n :

$$\gamma_0 = 0.822$$

$$\gamma_1 = 2.41$$

$$\gamma_2 = 3.935$$

$$\gamma_3 = 5.53$$

$$\gamma_4 = 7.08$$

$$\gamma_5 = 8.67$$

$$\gamma_6 = 10.225$$

$$\gamma_7 = 11.89$$

Уточнение производилось исходя из очевидного утверждения о том, что ток на краях спирали должен равняться нулю.

Т.о. были получены графики функции распределения тока для первых пяти мод, представленные на рисунках 8–12.

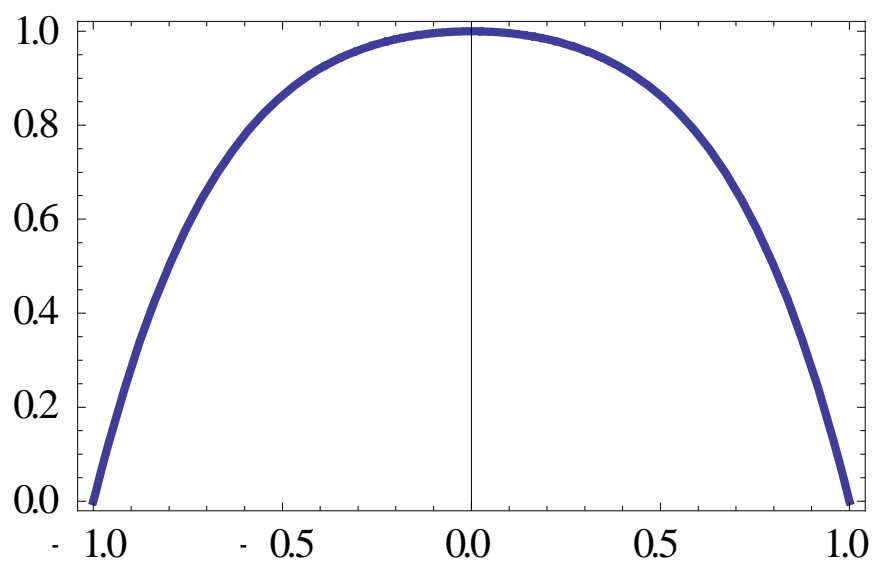


Рисунок 8 – Функция распределения тока для первой моды кольцевого резонатора в зависимости от координаты w , обращающейся в -1 на внутреннем радиусе и в 1 на внешнем радиусе спирали.

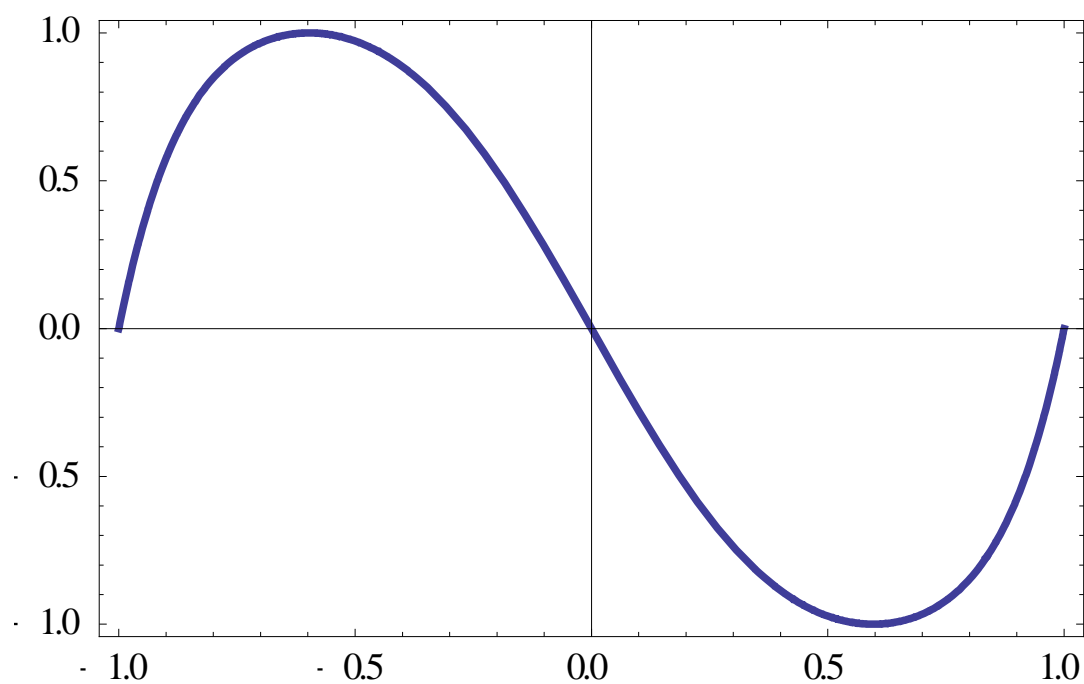


Рисунок 9 – Функция распределения тока для второй моды кольцевого резонатора в зависимости от координаты w , обращающейся в -1 на внутреннем радиусе и в 1 на внешнем радиусе спирали.

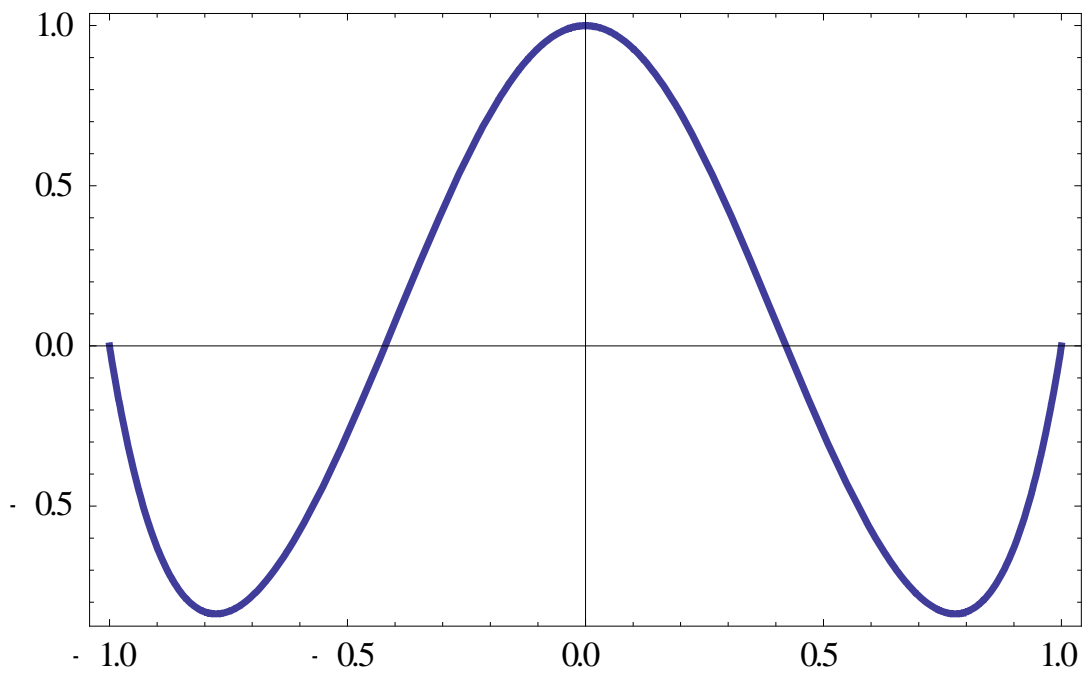


Рисунок 10 – Функция распределения тока для третьей моды кольцевого резонатора в зависимости от координаты w , обращающейся в -1 на внутреннем радиусе и в 1 на внешнем радиусе спирали.

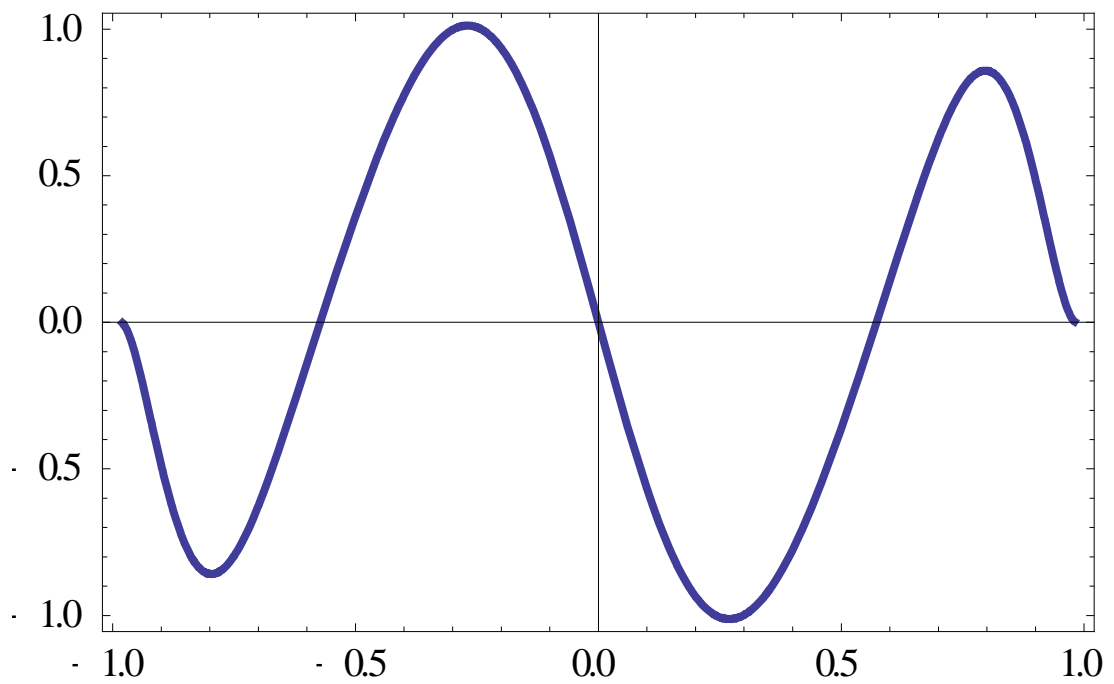


Рисунок 11 – Функция распределения тока для четвертой моды кольцевого резонатора в зависимости от координаты w , обращающейся в -1 на внутреннем радиусе и в 1 на внешнем радиусе спирали.

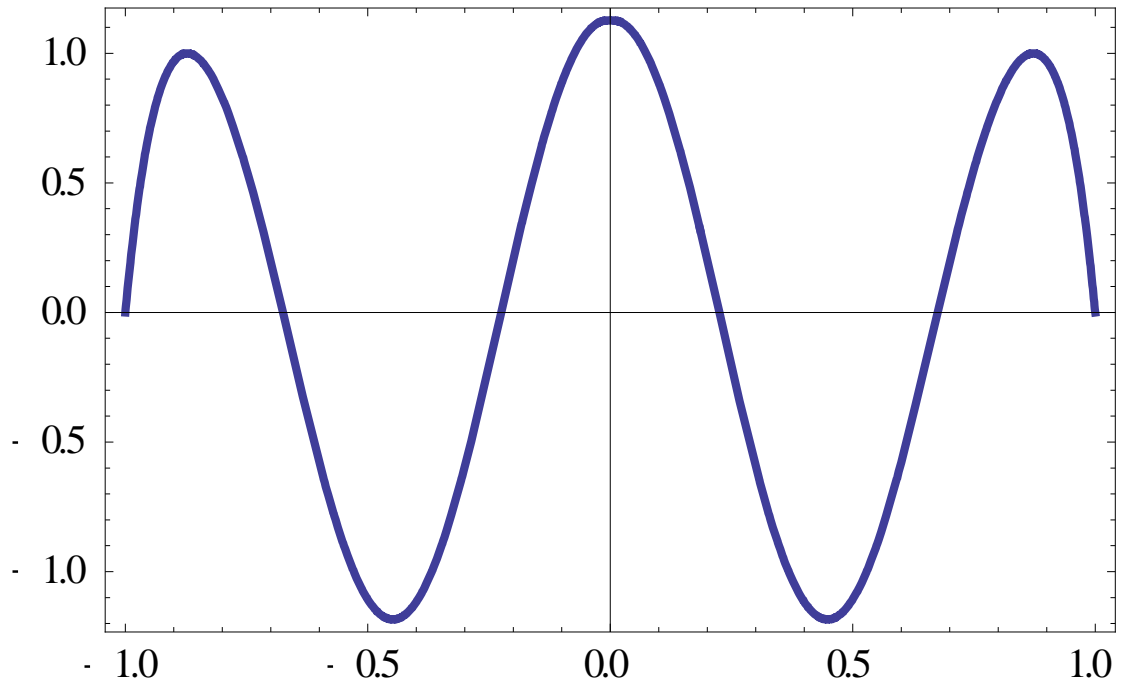


Рисунок 12 – Функция распределения тока для пятой моды кольцевого резонатора в зависимости от координаты w , обращаемой в -1 на внутреннем радиусе и в 1 на внешнем радиусе спирали.

Обратим внимание на то, что амплитуда крайних полуволн меньше, чем амплитуды внутренних полуволн. Это связано с тем, что фазовая скорость на краях спирали отлична от фазовой скорости в середине.

2.2. Магнитное поле кольцевого спирального резонатора

После построения распределения тока возникает вопрос о магнитном поле, создаваемом этим током. Взаимодействие спиральных резонаторов с окружающей средой и/или между собой происходит именно по магнитному полю. Т.о. для дальнейшего понимания физики метаматериала, составленного из спиральных мета-атомов, необходимо продолжить аналитическую модель для описания магнитного поля резонаторов.

Для построения магнитного поля функция распределения тока аппроксимировалась гладкой функцией. Для начала найдем магнитное поле одного кругового тока. Векторный потенциал для такого тока имеет только компоненту

$$A_{\varphi} = \frac{J}{c} \int \frac{\cos \varphi dl}{R} = \frac{2J}{c} \int_0^{\pi} \frac{a \cos \varphi d\varphi}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \varphi)^{0.5}} \quad (70)$$

где I – ток в витке,

a – радиус витка,

R – расстояние от точки в пространстве до точке на кольце,

r, φ, z – цилиндрические координаты.

Введем новую переменную согласно $\varphi = \pi + 2\theta$, тогда формула (59) примет вид[3]:

$$A_{\varphi} = \frac{4I}{ck} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \right] \quad (71)$$

где $k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$.

Найдем теперь компоненты индукции:

$$B_{\varphi} = 0 \quad (72)$$

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{J}{c} \frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \right] \quad (73)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = \frac{J}{c} \frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \right] \quad (74)$$

Для того чтобы обобщить полученный результат для нашего случая, проинтегрируем полученные выражения по a от внутреннего до внешнего радиуса. Обратим внимание, что ток в спирали также зависит от a . Для построения распределения магнитного поля в пакете символьной математики Wolfram Mathematica 8.0 использовался скрипт, в котором интегрирование по радиусу было выполнено численно:

Clear[t,r,z, Br, Bz]

func1[r_,z_]:=NIntegrate[10*z/(z^2+(r-0.003+0.0004*t)^2)^1.5,{t,0,2}]

func2[r_,z_]:=NIntegrate[10(r-0.003+0.0004*t)/(z^2+(r-0.003+0.0004*t)^2)^1.5,{t,0,2}]

Br[r_,z_]:=NIntegrate[(2*Cos[Pi*(t-0.0026)/0.0004/2]+(((t-0.0026)/0.0004)^2-((t-0.0026)/0.0004)^4)*5/3]*z*(-

EllipticK[4t*r/(z^2+(t+r)^2)]+(t^2+r^2+z^2)*EllipticE[4t*r/(z^2+(t+r)^2)]/(z^2+(t-r)^2))/r/Sqrt[z^2+(t+r)^2],{t,0.0022,0.003}]

Bz[r_,z_]:=NIntegrate[(2Cos[Pi*(t-0.0026)/0.0004/2]+(((t-0.0026)/0.0004)^2-((t-0.0026)/0.0004)^4)*5/3](EllipticK[4t*r/(z^2+(t+r)^2)]+(t^2-r^2-

z^2)*EllipticE[4t*r/(z^2+(t+r)^2)]/(z^2+(t-r)^2))/Sqrt[z^2+(t+r)^2],{t,0.0022,0.003}]

data=Table[{Br[r,z],Bz[r,z]},{r,0.000001,0.006,0.0001},{z,0.000001,0.002,0.0001}];

ListStreamPlot[data,StreamScale->None,StreamStyle->Thick]

Т.о. были построены магнитные поля первых пяти мод, приведенные на рисунках 12 – 21. Данные, представленные на рисунках 12–21, позволяют заключить, что магнитное поле первой моды сходно с магнитным полем одиночного кольца с током; поле четных мод локализовано в ближней зоне, что приводит к быстрому падению связи резонатора с внешними источниками поля; поле нечетных мод на расстоянии порядка диаметра сходно с магнитным полем одиночного кольца с током, но по большей части оно локализовано вблизи спирали; на модах старше первой существуют точки с локальными минимумами магнитного поля.

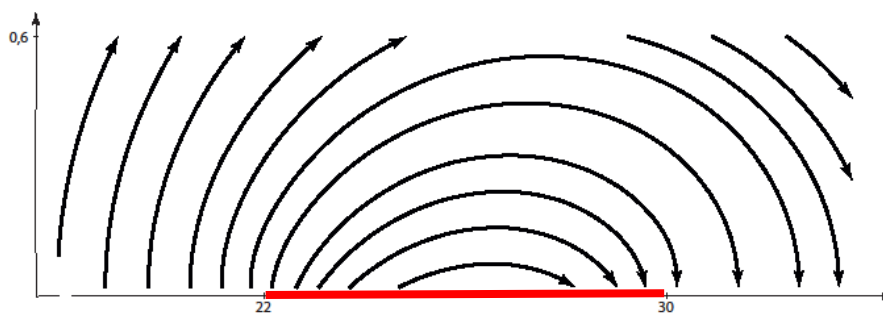


Рисунок 12 – Крупный план силовых линий магнитного поля на первом резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору, по горизонтальной оси отложено расстояние до центра спирали в миллиметрах, здесь внутренний радиус спирали равен 22 мм, а внешний радиус спирали равен 30 мм. На вертикальной оси отложено расстояние до плоскости спирали в миллиметрах. Красной линией показана область спирали в поперечном сечении.

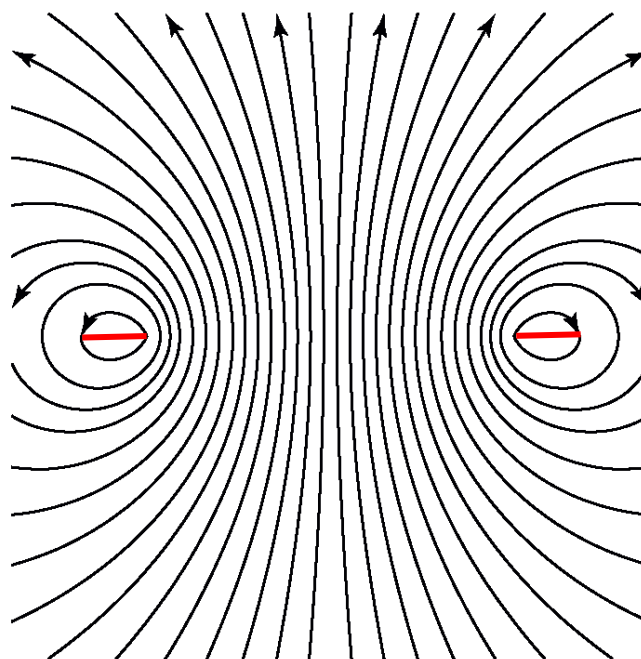


Рисунок 13 – Общий план силовых линий магнитного поля на первом резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору.

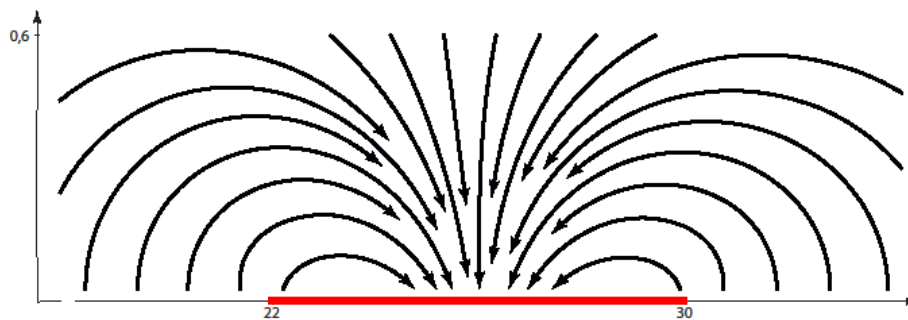


Рисунок 14 – Крупный план силовых линий магнитного поля на втором резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору, по горизонтальной оси отложено расстояние до центра спирали в миллиметрах, здесь внутренний радиус спирали равен 22 мм, а внешний радиус спирали равен 30 мм. На вертикальной оси отложено расстояние до плоскости спирали в миллиметрах. Красной линией показана область спирали в поперечном сечении.

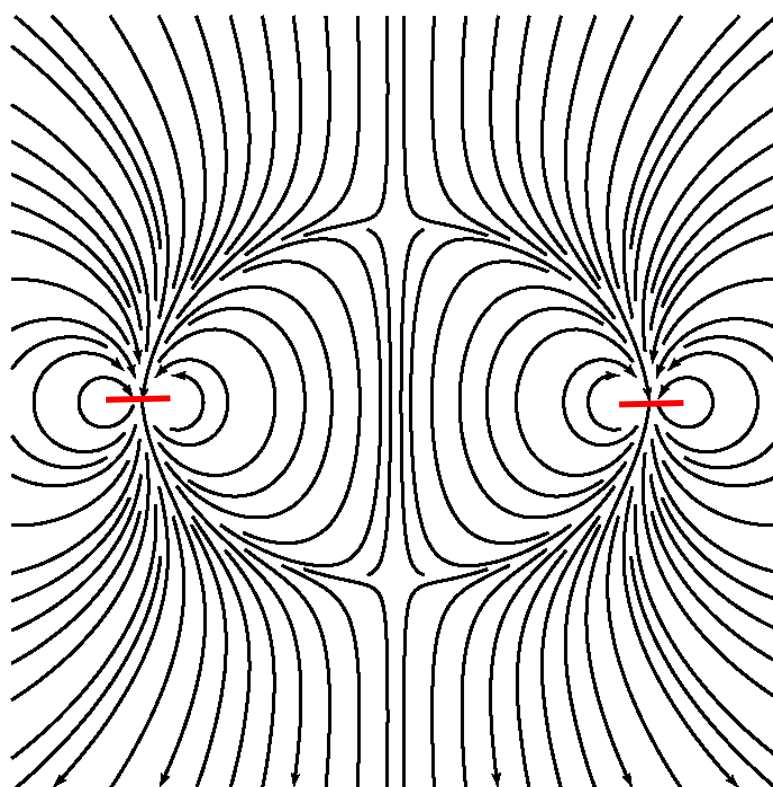


Рисунок 15 – Общий план силовых линий магнитного поля на втором резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору. Красными линиями показана область спирали в поперечном сечении.

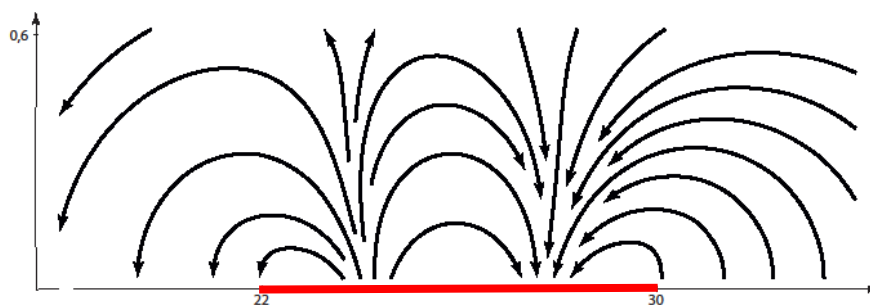


Рисунок 16 – Крупный план силовых линий магнитного поля на третьем резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору, по горизонтальной оси отложено расстояние до центра спирали в миллиметрах, здесь внутренний радиус спирали равен 22 мм, а внешний радиус спирали равен 30 мм. На вертикальной оси отложено расстояние до плоскости спирали в миллиметрах. Красной линией показана область спирали в поперечном сечении.

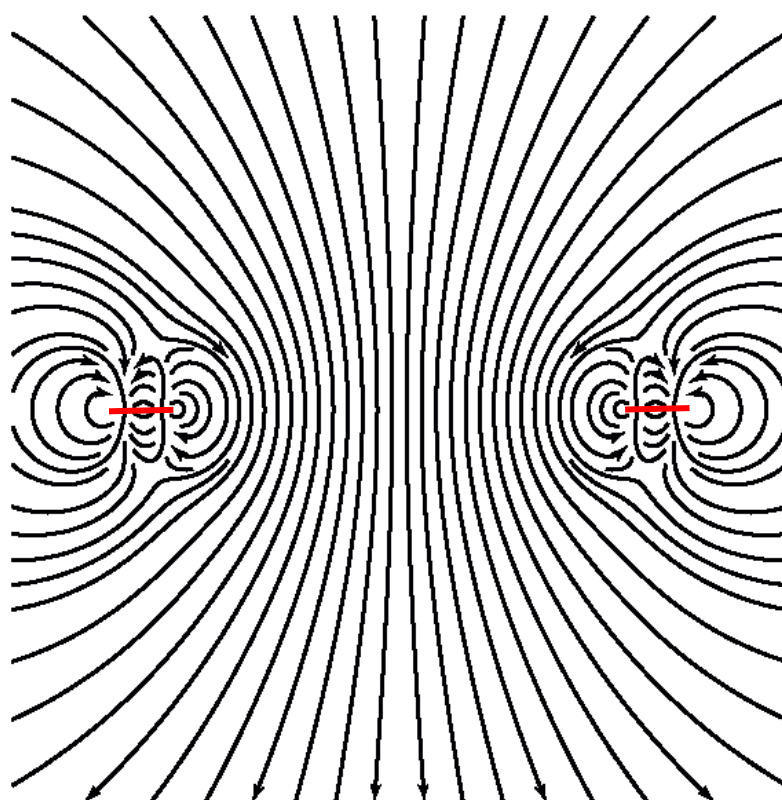


Рисунок 17 – Общий план силовых линий магнитного поля на третьем резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору. Красными линиями показана область спирали в поперечном сечении.

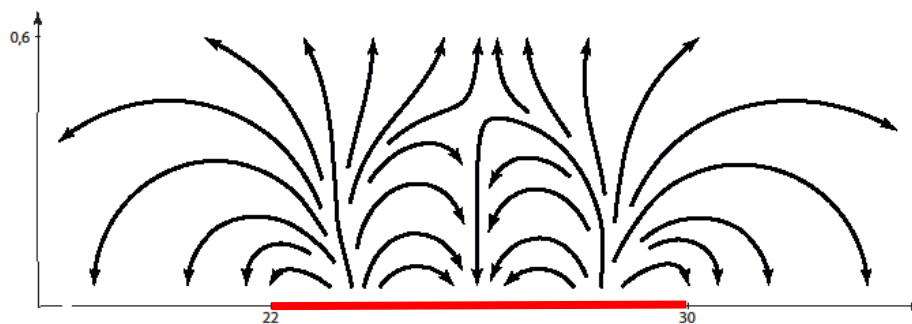


Рисунок 18 – Крупный план силовых линий магнитного поля на четвертом резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору, по горизонтальной оси отложено расстояние до центра спирали в миллиметрах, здесь внутренний радиус спирали равен 22 мм, а внешний радиус спирали равен 30 мм. На вертикальной оси отложено расстояние до плоскости спирали в миллиметрах. Красной линией показана область спирали в поперечном сечении.

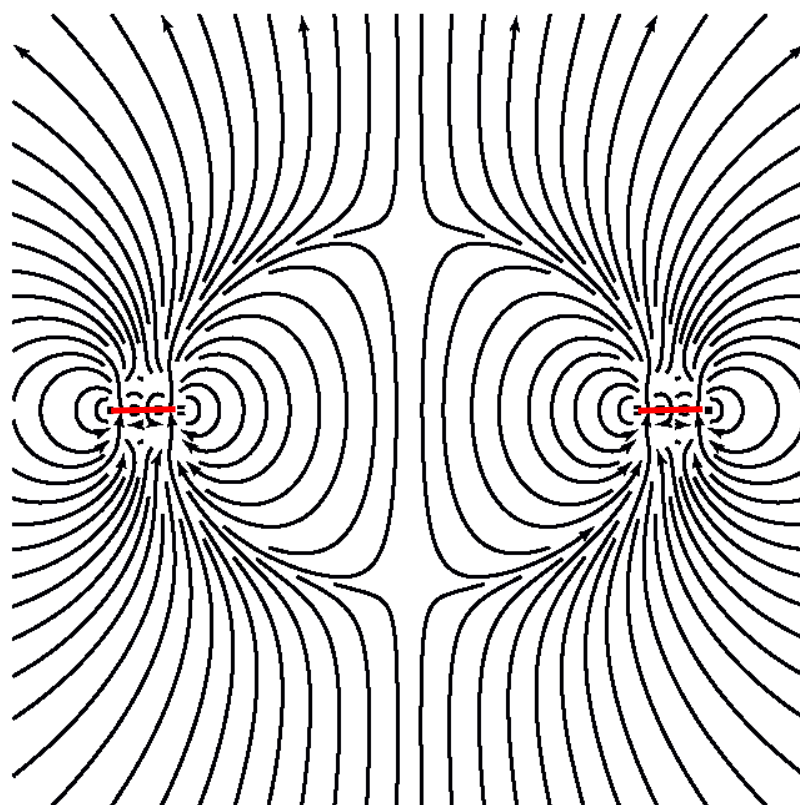


Рисунок 19 – Общий план силовых линий магнитного поля на четвертом резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору. Красными линиями показана область спирали в поперечном сечении.



Рисунок 20 – Крупный план силовых линий магнитного поля на пятом резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору, по горизонтальной оси отложено расстояние до центра спирали в миллиметрах, здесь внутренний радиус спирали равен 22 мм, а внешний радиус спирали равен 30 мм. На вертикальной оси отложено расстояние до плоскости спирали в миллиметрах. Красной линией показана область спирали в поперечном сечении.

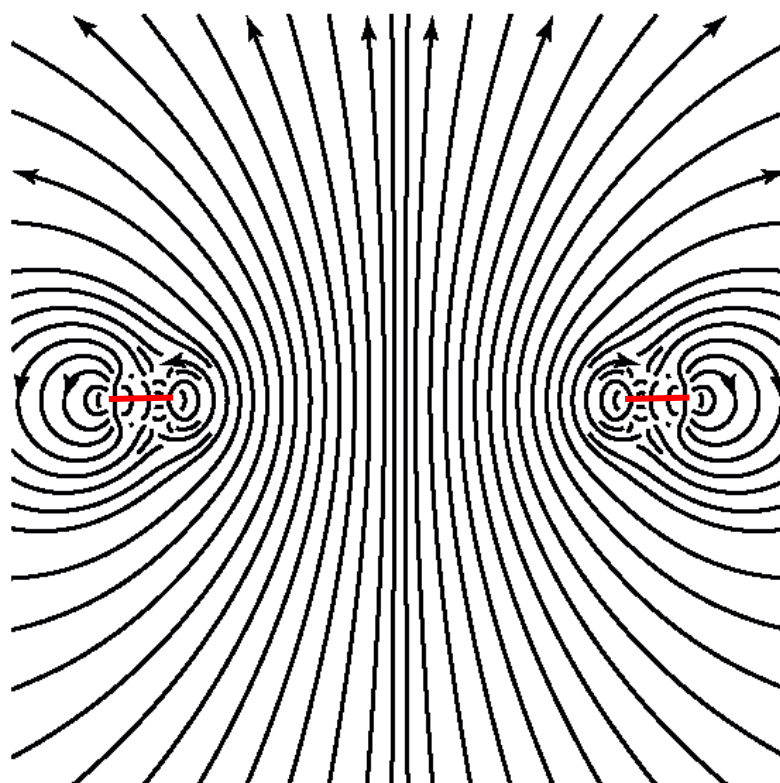


Рисунок 21 – Общий план силовых линий магнитного поля на пятом резонансе. Направления силовых линий показаны в плоскости, перпендикулярной резонатору. Красными линиями показана область спирали в поперечном сечении.

2.3. Экспериментальное исследование кольцевого спирального резонатора

Сопоставление экспериментальных и аналитических значений резонансных частот представлено в таблице 2, откуда видно, что: во-первых, отношение резонансных частот действительно близко к отношению нечетных чисел, хотя и вызвано не четвертьволновым резонансом, а сложной (не синусоидальной) структурой резонансных волн; во-вторых, аналитическая модель с высокой точностью описывает поведение исследуемого образца, большое отклонение экспериментального значения на первой моде вызвано тем, что именно эта мода сильнее всего связывается с окружающими образец частями экспериментальной установки, выходя за рамки аналитической модели для резонатора, слабо связанного с окружающей средой.

Таблица 2: Сопоставление аналитически рассчитанных и измеренных резонансных частот для ниобиевого спирального резонатора с параметрами $R_e = 3\text{мм}$ и $R_i = 2.2\text{мм}$ из 40 витков шириной 10мкм .

№	Экспериментально полученные резонансные частоты, MHz	Аналитически полученные резонансные частоты, MHz	Отношение экспериментального значения к аналитически полученному
1	195	145	1,333
2	444	424	1,047
3	709	692	1,024
4	981	973	1,009
5	1250	1246	1,003

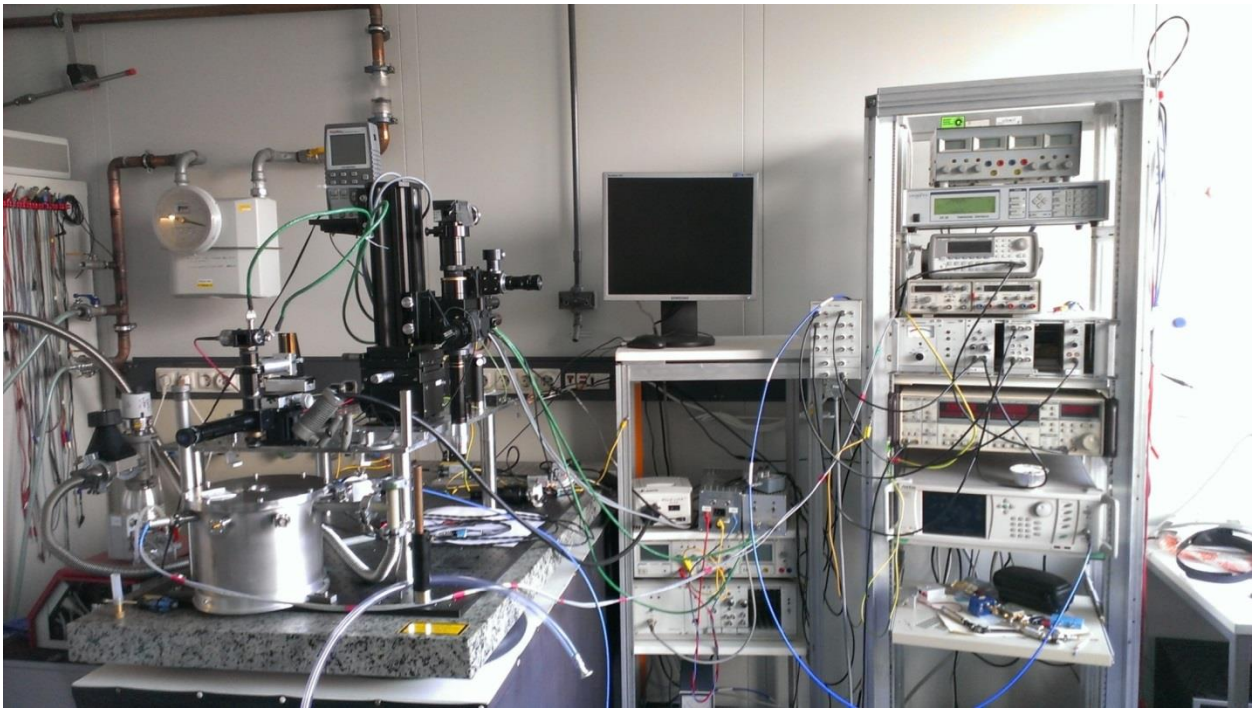


Рисунок 22 – Лазерный сканирующий микроскоп: общий вид установки. В левой части можно видеть заливной криостат и оптическую систему. Справа расположена стойка с микроволновым оборудованием.

Функции распределения тока в сверхпроводящем спиральном резонаторе были экспериментально исследованы при помощи низкотемпературного лазерного сканирующего микроскопа (рис. 22). Схема измерительной установки представлена на рисунке 23. Установка состоит из заливного криостата с оптическим окном, диодного лазера с модулятором, x-y сканеров, оптической системы; микроволновая часть установки состоит из генератора ВЧ сигнала, каскада усилителей, диода Шотки и синхронного детектора, передающего данные на персональный компьютер. Остановимся подробнее на функциях каждой из частей установки. Криостат необходим для охлаждения исследуемого образца ниже температуры сверхпроводящего перехода. Диодный лазер является источником лазерного излучения, которое с заданной частотой включается и выключается модулятором, это необходимо, чтобы синхронный детектор смог уловить слабый микроволновой сигнал, приходящий с образца. В описываемом эксперименте лазерный луч модулировался с частотой 100 кГц, максимальной из доступных для синхронного детектора. X-Y сканеры представляют собой два позиционирующих лазерный луч зеркала с автоматизированным приводом, который управляется с компьютера и позволяет поворачивать зеркала, смещая тем самым луч. Оптическая система служит для фокусировки луча в плоскости образца и позволяет выставлять луч на

образце, контролируя положение глазом или чувствительной камерой. Генератор подает сигнал заданной мощности и частоты на образец, каскад усилителей необходим, т.к. сигнала от образца очень слаб, вплоть до -60 dBm. Диод Шотки выпрямляет сигнал для синхронного детектора, а синхронный детектор, зная частоту модуляции лазера, выделяет сигнал, вызванный именно лазером.

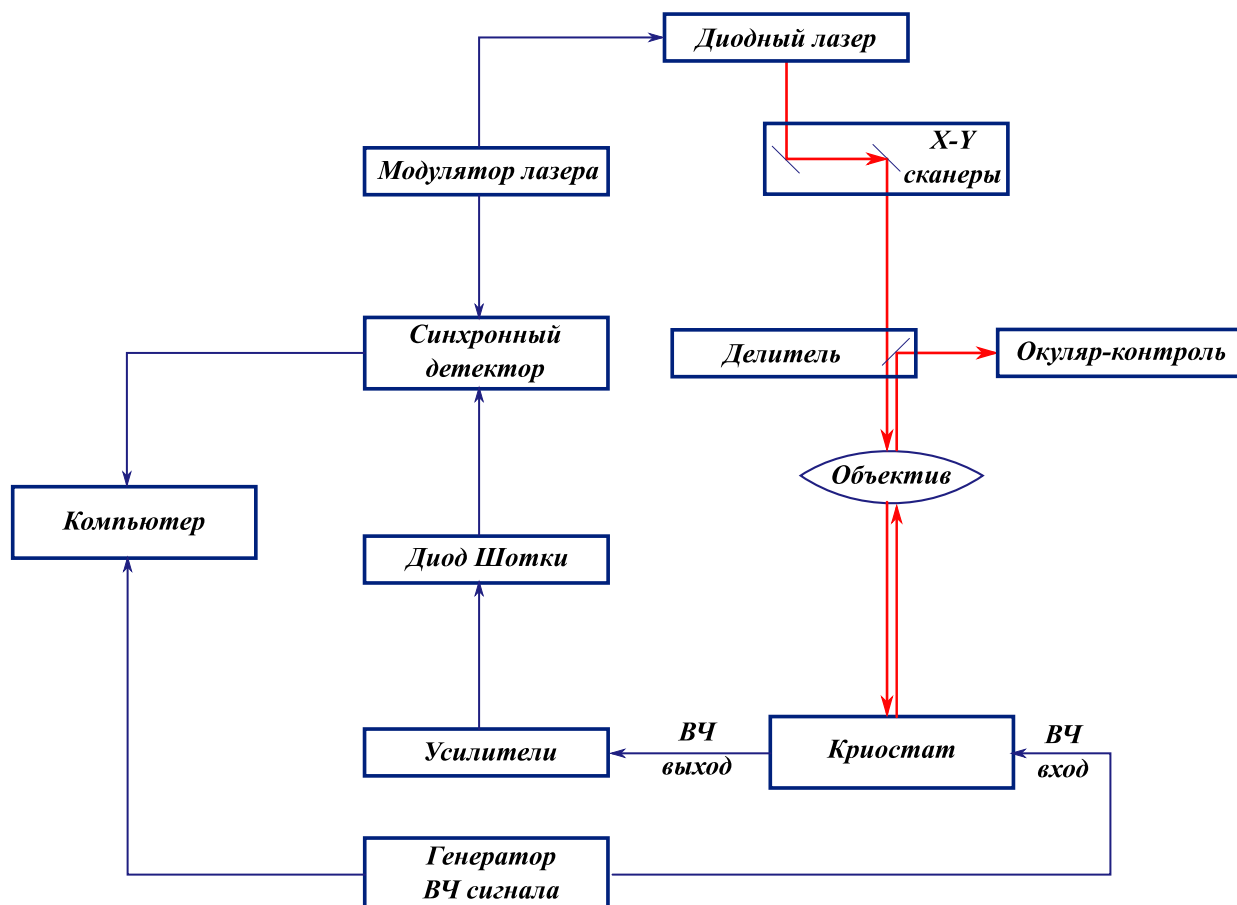


Рисунок 23 – Схема установки лазерного сканирующего микроскопа. Установка состоит из заливного криостата с оптическим окном, диодного лазера с модулятором, x-y сканеров, позиционирующих лазерный луч, оптической системы; микроволновая часть установки стоит из генератора ВЧ сигнала, каскада усилителей, диода Шотки и синхронного детектора, передающего данные на персональный компьютер.

Охлаждение сверхпроводникового образца до температуры ниже критической производится при помощи гелиевого криостата. Исследуемый образец сверхпроводящей спирали помещается в криостат на охлаждаемый парами жидкого гелия сапфировый диск. Тепло от образца отводится через медный цилиндр, один торец которого прижат к

сапфировому диску, а другой торец присоединен к холодной массе криостата. Температура держателя образца измеряется термометром вблизи сапфирового диска. Заданная рабочая температура поддерживается нагревателем, управляемым термоконтроллером. С двух противоположных сторон диска к образцу подведены коаксиальные ВЧ кабели с магнитными элементами связи (петлями) на концах. Верхняя петля используется для возбуждения ВЧ поля, а нижняя – для приёма прошедшего сигнала. Размер петель связи больше ширины образца, и наведённое магнитное ВЧ поле практически однородно в области включения исследуемого объекта. Зондирующий ВЧ сигнал генерируется анализатором цепей (Anritsu MS4640A), а сигнал, прошедший через образец и каскад усилителей, принимается диодным детектором. Данные с диодного детектора оцифровываются и обрабатываются компьютерной программой. Программа производит построение картины пропускания ВЧ сигнала, как функции положения лазерного луча. Результаты исследования ниобиевой спирали из 40 витков с $R_e = 3\text{мм}$ и $R_i = 2.2\text{мм}$ представлены на рисунке 24.

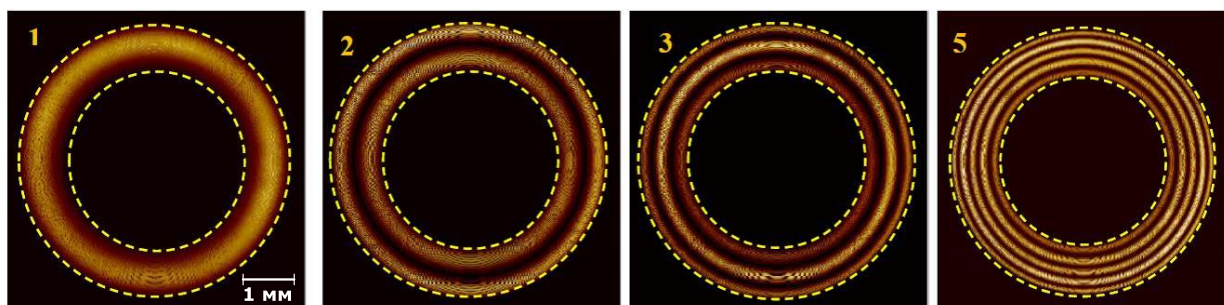


Рисунок 24 – ЛСМ изображения распределения тока в сверхпроводящей спирали для первой, второй, третьей и пятой мод. Пунктирными линиями обозначены внешний и внутренний края спирали. Яркие области соответствуют максимуму ВЧ тока. Легко видеть, что на каждом резонансе число ярких областей совпадает с номером моды.

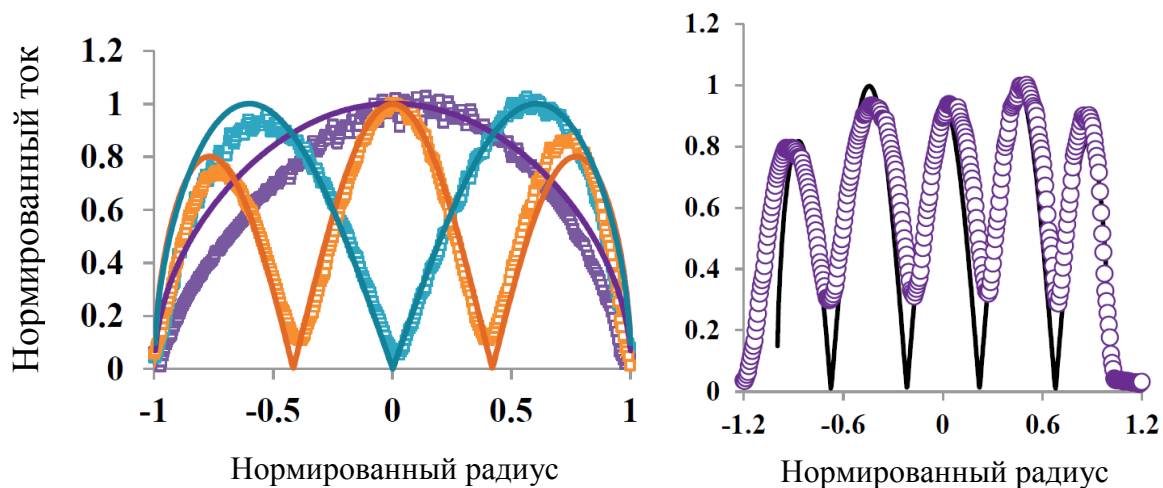


Рисунок 25 – Измеренные и аналитически рассчитанные функции распределения тока для первой, второй, третьей и пятой резонансной мод в зависимости от координаты w , обращаемой в -1 на внутреннем радиусе и в 1 на внешнем радиусе спирали. Амплитуда плотности тока вдоль радиуса ниобиевой спирали диаметром 3 мм. Данные, полученные из ЛСМ, обозначены маркерами, аналитические данные обозначены сплошной линией.

Все результаты нормированы на единицу.

Глава 3 Электродинамика резонатора на спирали Архимеда

3.1. Аналитическая модель спирального резонатора

В данном разделе пойдет речь о теоретическом изучении плоского спирального сверхпроводящего резонатора в виде однозаходной спирали Архимеда конечной длины. Схематически данная спираль изображена на рисунке 26. Спираль содержит N плотноупакованных витков. В полярных координатах уравнение спирали Архимеда можно записать следующим образом:

$$\rho(\varphi) = R_e(1 - \alpha\varphi), \quad (75)$$

где φ – полярный угол, изменяющийся от 0 до $2\pi N$;

α – параметр, равный $\frac{d}{2\pi R_e} = \frac{1}{2\pi N} \ll 1$;

R_e – внешний радиус спирали;

d – расстояние между соседними витками спирали.

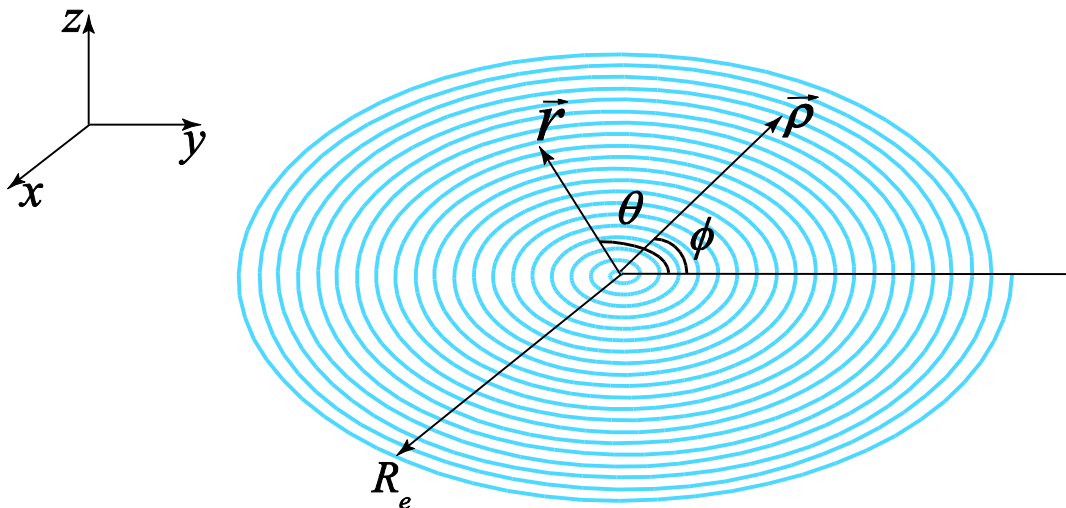


Рисунок 26 – Эскиз спирального резонатора с большим количеством витков внешним радиусом R_e . Радиус-вектор $\vec{\rho}$ и полярный угол φ задают точку на спирали. Радиус-вектор \vec{r} и полярный угол θ задают некоторую точку на плоскости спирали.

Перейдем теперь к изучению электродинамики тонкопленочного спирального резонатора. Воспользуемся методом анизотропной плоскости. Пренебрежем неоднородностью распределения тока внутри проволоки, образующей спираль, и следующим образом представим вектор-потенциал, зависящий от координаты и времени, в цилиндрических координатах $\vec{A}(z, r, \theta) = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^r \frac{e^{-ikR}}{R} \psi(\rho) \vec{d}\rho$

Электрические и магнитные поля связаны с вектор-потенциалом следующим образом:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\mu_0} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - i\omega\vec{A}, \quad (76)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} [\vec{\nabla} \times \vec{A}], \quad (77)$$

В данном случае компоненты вектор-потенциала имеют следующий вид:

$$A_r = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{R_c} d\rho \psi(\rho) \int_0^\infty \frac{x e^{-\sqrt{x^2 - k^2}|z|}}{4\pi \sqrt{x^2 - k^2}} dx J_1(xr) J_1(x\rho), \quad (78)$$

$$A_\theta = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{R_c} d\rho \frac{\rho \psi(\rho)}{R_c \alpha} \int_0^\infty \frac{x e^{-\sqrt{x^2 - k^2}|z|}}{4\pi \sqrt{x^2 - k^2}} dx J_1(xr) J_1(x\rho). \quad (79)$$

Чтобы получить резонансные частоты, снова используем граничные условия, характерные для спирали, т.е. положим равной нулю тангенциальную компоненту электрического поля на поверхности спирали: $R_c \alpha E_r + r E_\theta|_{z=0} = 0$. Используя (78) и (79), получим:

$$E_r = \frac{1}{i\omega\epsilon_0\mu_0} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_r) \right], \quad (80)$$

$$E_\theta = -i\omega A_\theta. \quad (81)$$

Обратим внимание, что теперь уже нельзя полагать r слабо меняющимся из-за узости спирали, и вынести r из-под знака производной в формуле (80) невозможно. Это существенно осложняет математические преобразования. Однако, по-прежнему можно воспользоваться тем, что волновой вектор k гораздо меньше обратного характерного размера неоднородности распределения тока $\psi(\rho)$, т.е. $k \ll \frac{1}{R_e - R_i} \ll \frac{1}{R_e}$. В этом приближении компоненты вектор-потенциала в плоскости спирали можно записать следующим образом:

$$A_r|_{z=0} = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dz \int_0^{R_e} d\rho \psi(\rho) \frac{1}{r^2} \int_0^\infty dx e^{-\frac{zx}{r}} x J_1(x) J_1\left(x \frac{\rho}{r}\right), \quad (82)$$

$$A_\theta|_{z=0} = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{(4\pi)^2 R_e \alpha} \int_0^\infty dz \int_0^{R_e} d\rho \psi(\rho) \frac{\rho}{r^2} \int_0^\infty dx e^{-\frac{zx}{r}} x J_1(x) J_1\left(x \frac{\rho}{r}\right). \quad (83)$$

Введем новые переменные τ и ξ т.о. что $\rho = R_e e^{-\tau}$ и $r = R_e e^{-\xi}$. Тогда компоненты вектор-потенциала примут вид:

$$A_r|_{z=0} = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{(4\pi)^2 R_e} \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) e^\xi K(\xi - \tau), \quad (84)$$

$$A_\theta|_{z=0} = e^{i\omega t} \frac{\mu_0 I}{(4\pi)^2 R_e \alpha} \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) e^{\xi - \tau} K(\xi - \tau), \quad (85)$$

где через $K(\xi - \tau) = e^{-(\tau - \xi)} \int_0^\infty dx e^{-\frac{zx}{r}} x J_1(x) J_1\left(x e^{-(\tau - \xi)}\right)$ обозначено ядро. В свою очередь, в

новых обозначениях компоненты электрического поля примут вид

$$E_r = \frac{Ie^{i\omega t}}{i\omega\varepsilon_0(4\pi)^2 R_e^3} \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) e^{3\xi} \left(K_\xi''(\xi - \tau) + 2K_\xi'(\xi - \tau) \right), \quad (86)$$

$$E_\theta = -\frac{i\omega\mu_0 Ie^{i\omega t}}{(4\pi)^2 R_e \alpha} \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) e^{\xi - \tau} K(\xi - \tau), \quad (87)$$

Обратим внимание, что ядро имеет форму дельта-функции. Т.о. в локальном приближении граничное условие (57) может быть записано как

$$\int_0^\infty dz \left[\psi'(0) e^{3\xi} K(\xi) + \int_{-\xi}^\infty du K(u) \left(e^{3\xi} \psi_\xi''(\xi) + 2e^{3\xi} \psi_\xi'(\xi) + \frac{\omega^2 R_e^2}{c^2 \alpha^2} e^{-u} e^{-\xi} \psi(\xi) \right) \right] = 0. \quad (88)$$

Введем новую переменную, равную квадрату нормированного радиуса спирали,

$v = \frac{r^2}{R_e^2} = e^{-2\xi}$, в новых обозначениях граничное условие (88) примет вид

$$-2 \frac{K(v)}{g_1(v)} \psi_v'(1) v^{-2} + 4\psi_v''(v) + \frac{\omega^2 R_e^2}{c^2 \alpha^2} \frac{g_2(v)}{g_1(v)} \psi(v) = 0, \quad (89)$$

где в новых обозначениях $K(v) = R_e v \int_0^\infty dx J_1[\sqrt{v}x] J_1[x]$, $g_1(v) = R_e v^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{v}}^\infty du \int_0^\infty dx J_1[ux] J_1[x]$ и

$g_2(v) = R_e v^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{v}}^\infty du u^{-1} \int_0^\infty dx J_1[ux] J_1[x]$. Отношение функций $\frac{g_2(v)}{g_1(v)}$ графически представлено

на рисунке 27.

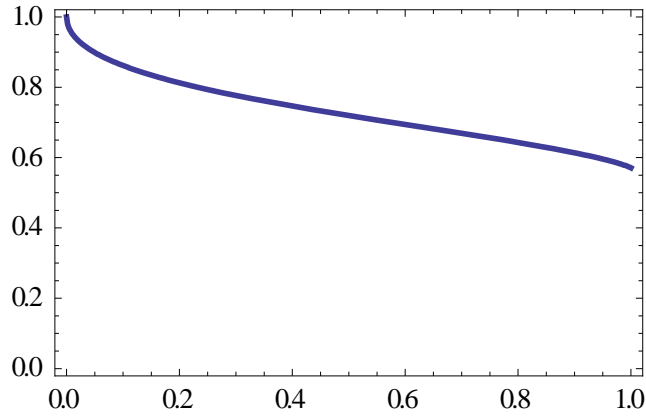


Рисунок 27 – Отношение функций $\frac{g_2(v)}{g_1(v)}$ в зависимости от координаты v , равной квадрату нормированного радиуса спирали.

С хорошей точностью отношение $\frac{g_2(v)}{g_1(v)}$ может быть принято равным единице. Решение уравнения (89) может быть получено следующим образом: в первом приближении мы можем пренебречь отношением $\frac{K(v)}{g_1(v)}$. В этом случае, уравнение (89) сильно упростится, и решением его будет $\psi(v) = \sin\left(\frac{\omega R_e}{2c\alpha} v\right)$. В связи с этим в дальнейшем приближении будем искать решение уравнения (89) в виде

$$\psi(v) = \sum_n A_n \sin(\pi n v). \quad (90)$$

Нахождение функций распределения резонансных токов превращается, т.о., в поиск коэффициентов A_n в разложении (90). Подставив выражение (90) в уравнение (89), получим

$$-2\pi\beta_m \sum_n A_n n (-1)^n - 2\pi^2 A_m m^2 + \frac{\omega^2 R_e^2}{2c^2 \alpha^2} A_m = 0, \quad (91)$$

где $\beta_m = \int_0^1 dv \frac{K(v)}{g_1(v)} v^{-2} \sin \pi m v$.

Отсюда коэффициенты разложения (90) задаются следующим образом:

$$A_n = \frac{2\pi\beta_n}{-2\pi^2 n^2 + \frac{\omega^2 R_e^2}{2c^2 \alpha^2}} \sum_m (-1)^m A_m m. \quad (92)$$

Для оценки вклада каждого из слагаемых в разложении (90), по формуле (92) был оценен вес коэффициентов A_n на первой, второй, третьей и шестой резонансных модах. Эта оценка представлена графически на рисунке 28. Из рисунка 28 видно, что основной вклад дает коэффициент с номером, совпадающим с номером резонансной моды. Для сравнения положения максимумов и минимумов тока на разных резонансных модах, на рисунке 29 представлены модули нормированных функций распределения тока для первых четырех резонансных мод.

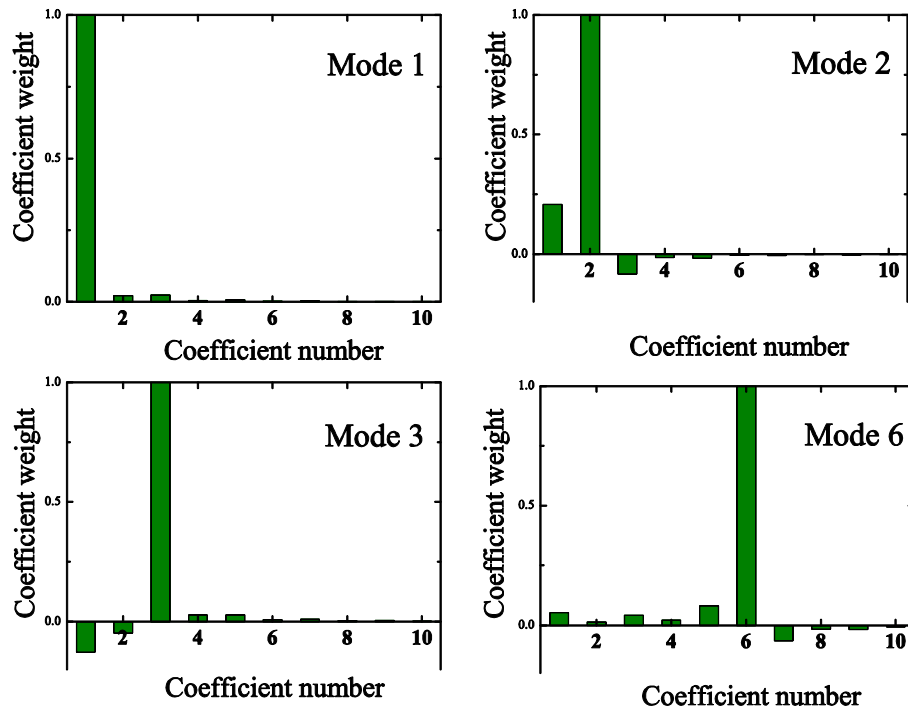


Рисунок 28 – Коэффициенты A_n разложения (90) для первой, второй, третьей и шестой резонансных мод. Коэффициенты нормированы на величину максимального коэффициента для данной моды.

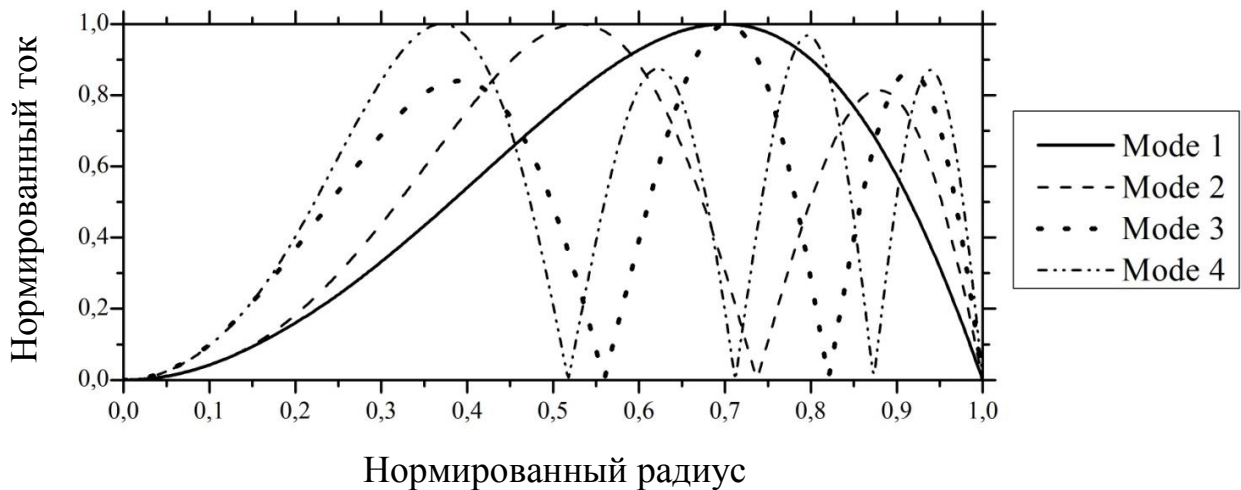


Рисунок 29 – Форма стоячих волн ВЧ тока на резонансных частотах спирали. Здесь представлен модуль нормированной функции распределения тока (I/I_{max}) для первых четырех резонансных мод, т.е. решение уравнения (89), найденное в виде ряда (90).

Резонансные частоты определяются следующим трансцендентным уравнением:

$$\pi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \beta_m}{-m^2 + \frac{\omega^2 R_e^2}{c^2 \alpha^2}}. \quad (93)$$

Решение этого уравнения для медного резонатора, изготовленного как печатная плата на подложке RO4350B, и ниобиевого резонатора, изготовленного взрывной фотолитографией на кремниевой подложке, представлены в таблице 3. Медная спираль состоит из 23 витков с шагом 0,7 мм и внешним диаметром 32 мм. Ниобиевая спираль имеет 75 витков с шагом 20 мкм и внешним диаметром 3 мм.

Таблица 3. Вычисленные резонансные частоты для двух спиральных резонаторов: медного и ниобиевого. Медная спираль состоит из 23 витков с шагом 0,7 мм и, соответственно, внешним диаметром 32 мм. Ниобиевая спираль имеет 75 витков с шагом 20 мкм и внешним диаметром 3 мм.

	Nb	Cu
1	276.5 MHz	90.2 MHz
2	845.9 MHz	276.1 MHz
3	1.1 GHz	365.2 MHz
4	1.6 GHz	537.8 MHz
5	1.9 GHz	629.3 MHz
6	2.4 GHz	799.4 MHz
7	2.7 GHz	891.8 MHz
8	3.3 GHz	1.1 GHz
9	3.5 GHz	1.2 GHz
10	4.1 GHz	1.3 GHz

Для того, чтобы найти магнитное поле, создаваемое резонансными токами, аппроксимируем спираль совокупностью колец с током, радиус которых меняется от нуля до R_e . Ток в каждом кольце считаем однородным и равным значению функции распределения тока спирали для данного радиуса. Тогда радиальная компонента поля одного кольца может быть записана следующим образом [8]:

$$B_r(r, z) = \int_0^{R_e} da \frac{\psi(a)}{c} \frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[-K \left(\frac{\sqrt{4ar}}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \right) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \left(\frac{\sqrt{4ar}}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \right) \right] \quad (94)$$

где $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ и $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ – полные

эллиптические интегралы.

Для того, чтобы найти магнитное поле, создаваемое всей системой колец, необходимо выражение (94) проинтегрировать по всей области спирали. Полученная таким образом интегральная радиальная компонента магнитного поля приведена на рисунках 3–8 в сравнении с экспериментом.

3.2. Измерение магнитного поля спирального резонатора

Благодаря измерительной установке, разработанной Н.Н. Абрамовым в лаборатории «Сверхпроводящие метаматериалы», была экспериментально исследована структура собственных мод спирального резонатора в форме спирали Архимеда. Получен спектр собственных мод резонатора, на котором уверенно различается 16-й мод. Экспериментально получено пространственное распределение радиальной компоненты магнитного поля вблизи витков спирали на первых шести резонансных модах.

Схема эксперимента представлена на рисунке 30 (а); фотография экспериментальной установки, разработанной для реализации данной схемы, представлена на рисунке 31. Спиральный резонатор представлял собой печатную плату из материала Rogers RO4350В с диэлектрической проницаемостью 3.48 со структурой из меди в виде спирали Архимеда из 23-х витков с шагом 0.7 мм, шириной дорожки 0.35 мм и максимальным радиусом 16.45 мм. Фотография спирального резонатора представлена на рисунке 30 (б). Для возбуждения резонатора за печатной платой на расстоянии 38 мм от плоскости спиральной структуры была помещена петля возбуждения диаметром 32 мм, изготовленная из 50-омного полужёсткого коаксиального кабеля толщиной 2 мм. Благодаря удалению петли от резонатора на расстояние порядка его диаметра достигается слабая магнитная связь. Для измерения радиальной компоненты магнитного поля вблизи поверхности спирального резонатора была использована малая петля – пробник. Эта петля диаметром около 0.5 мм, сформированная на конце 50-омного коаксиального кабеля диаметром 0.5 мм, помещалась на расстоянии около 50 мкм от поверхности спиральной структуры, и была ориентирована перпендикулярно её радиусу. Пробник был присоединён к приводу линейного перемещения, позволявшему перемещать его вдоль радиуса с шагом 0.135 мм, что давало возможность разрешать отдельные витки спирали. В качестве источника возбуждающего сигнала, а также в качестве приёмника магнитного отклика пробника был использован анализатор цепей Rhode&Schwarz ZVB20. В ходе эксперимента измерялся параметр S21 (прохождение сигнала), когда петля возбуждения подсоединена к порту 1, а пробник – к порту 2. Для управления шаговым двигателем линейного привода была использована плата сбора данных NI USB6229BNC. Синхронизация работы привода и анализатора цепей осуществлялась посредством ПК.

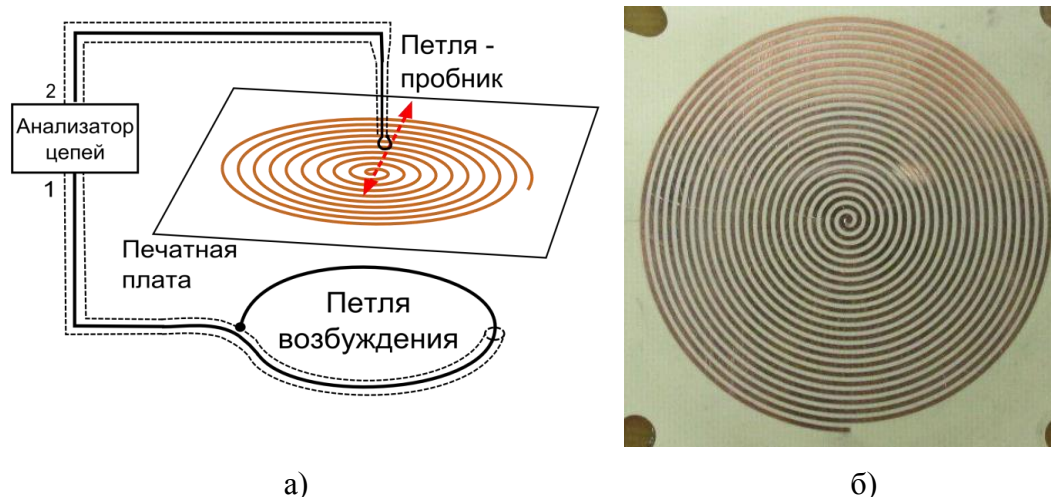


Рисунок 30 – (а) Схема экспериментальной установки. При помощи линейного привода петля-пробник перемещается вдоль красной пунктирной линии. Анализатор цепей генерирует возбуждающий сигнал, он же принимает сигнал магнитного отклика пробника. (б) Фотография исследуемого спирального резонатора. Резонатор представлял собой печатную плату со структурой из меди в виде спирали из 23-х витков с шагом 0.7 мм, шириной дорожки 0.35 мм и максимальным радиусом 16.45 мм.

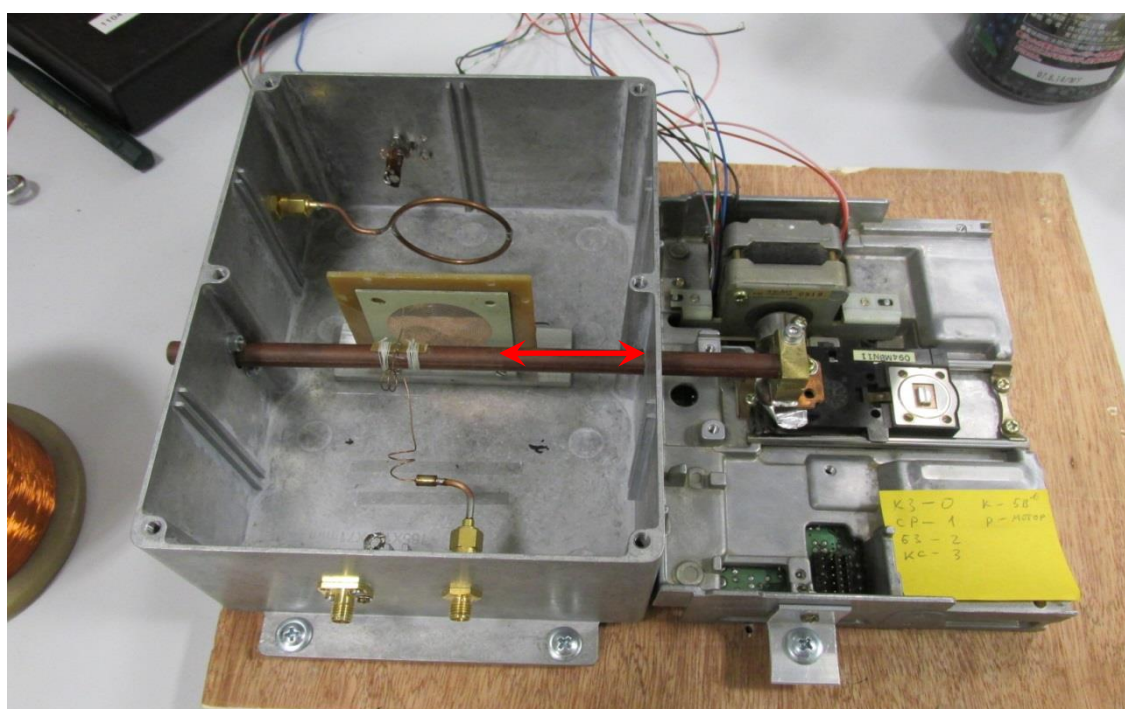


Рисунок 31 – Фотография экспериментальной установки, разработанной Н.Н. Абрамовым в лаборатории «Сверхпроводящие метаматериалы». Виден исследуемый спиральный резонатор, петля возбуждения, расположенная за ним, и петля-пробник перед резонатором. Пробник перемещается линейным приводом, расположенным справа. Направление перемещения привода обозначено красной стрелкой.

Таблица 4 – Частоты резонансов спирального медного резонатора из 23-х витков с шагом 0.7 мм, шириной дорожки 0.35 мм и максимальным радиусом 16.45 мм. Частоты измерены при комнатной температуре на установке, разработанной Н.Н. Абрамовым в лаборатории «Сверхпроводящие метаматериалы».

Номер резонанса	Измеренная частота f_{exp} , МГц
1	80,39
2	179,61
3	267,52
4	353,08
5	437,17
6	521,98
7	606,75
8	692,51
9	778,82
10	866
11	951,91
12	1039,33
13	1127
14	1211,53
15	1292,29
16	1384

Для измерения спектра собственных мод спирального резонатора пробник был помещён вблизи внешнего витка спирали, т.к. все моды здесь имеют ненулевую радиальную компоненту магнитного поля и могут быть зарегистрированы. Полученный спектр представлен красной кривой на рисунке 32 (а). На спектре отчётливо видны 16 резонансных пиков. Синей кривой показан фоновый сигнал, измеренный, когда пробник находился вне спирали на расстоянии 3 мм от внешнего витка. Здесь можно видеть два паразитных максимума в районе 500-700 МГц, относящихся в деталям измерительной установки. На частотах свыше 1.4 ГГц эффекты паразитного прохождения сигнала практически полностью маскируют отклик спирального резонатора. При повышении частот добротность резонансов снижается из-за скин-эффекта, что ухудшает

разрешимость пиков. На рисунке 32 (б) показано распределение частот резонансов по номерам мод. Частоты распределены достаточно равномерно со средним шагом 86.51 МГц, которому соответствует наклон пунктирной прямой на рисунке 32 (б). В таблице 4 приведены измеренные значения резонансных частот.

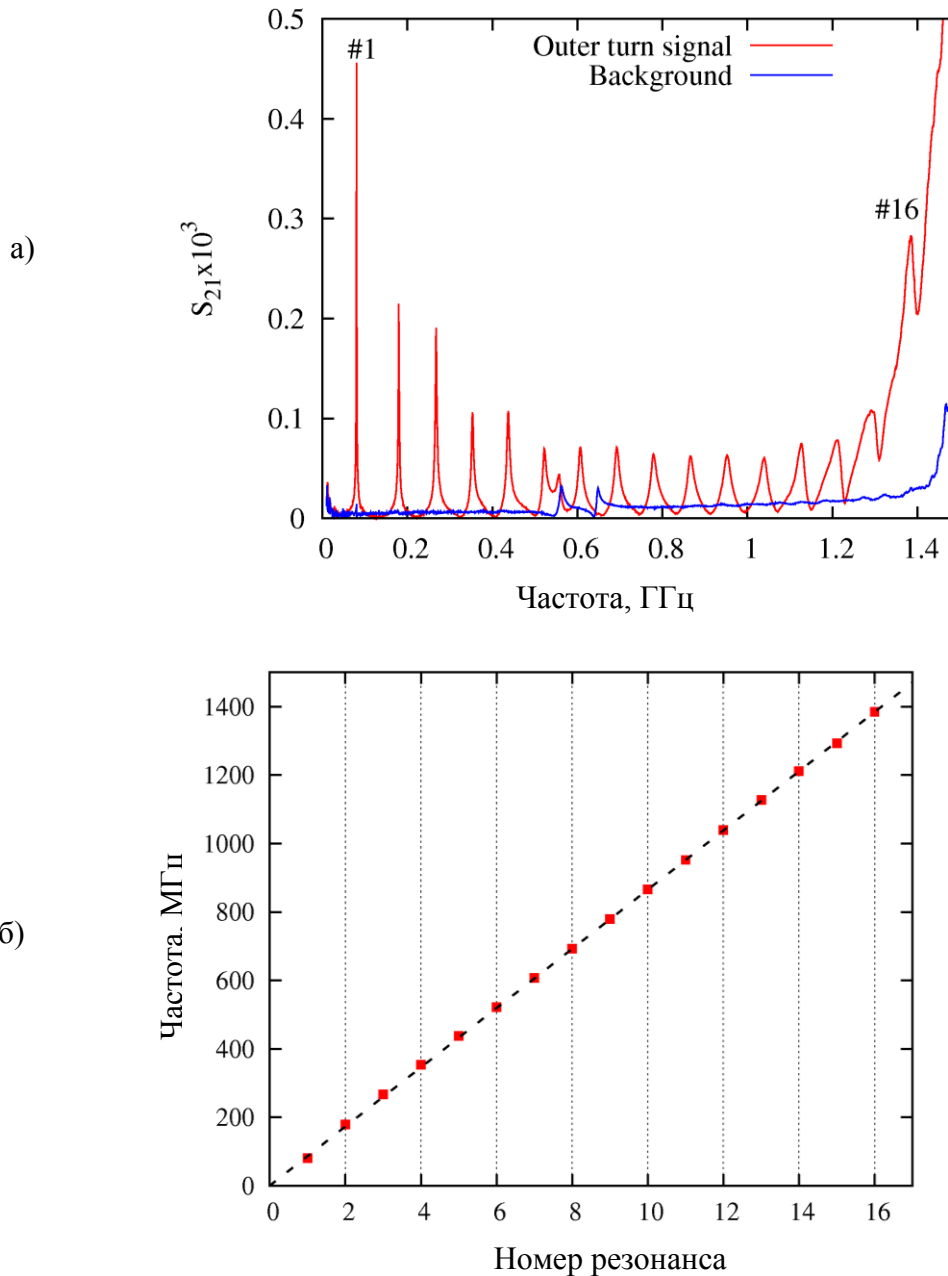


Рисунок 32 – а) Спектр собственных мод медного спирального резонатора, измеренный при комнатной температуре. Красной кривой показан спектр, измеренный вблизи внешнего витка спирали, синей кривой – фон, измеренный вне спирали на расстоянии 3 мм от внешнего витка. б) Частоты резонансных мод в зависимости от номера резонанса (красные квадраты).

Структура собственных мод спирального резонатора была измерена путём перемещения петли-пробника вдоль радиуса спирали и измерения S_{21} на резонансных частотах в 100 точках вдоль одного радиуса. При этом полученная зависимость отражает структуру радиальной компоненты магнитного поля вблизи поверхности спирали. На рисунке 33 в качестве примера представлена зависимость S_{21} от координаты вдоль радиуса для первой и третьей мод. Измерения проводились при перемещении пробника вдоль радиуса, проходящего через конец последнего витка спирали. Координата выражена в витках. Ненулевой отклик за пределами 23-го витка (больше чем витков в спирали) вызван “дальним” полем и связан с конечными размерами петли-пробника и неизбежным смещением центра петли от плоскости спирали. На кривой, представленной на рисунке 33, хорошо разрешаются отдельные витки спирали, что видно в виде волнистости – положения локальных максимумов соответствуют максимумам плотности тока в витках спирали. Таким образом, взяв только лишь значения отклика на максимумах, можно получить зависимость, отражающую структуру плотности тока. Это и было сделано для измерений вдоль 4-х радиусов, повёрнутых на 90 градусов относительно друг друга. Измерения вдоль этих направлений проводились простым поворотом печатной платы резонатора с последующим измерением зависимости S_{21} от координаты для нескольких резонансных мод одновременно. Данные этих 4-х измерений были объединены в один массив, что дало в 4 раза большее разрешение по координате, чем можно получить, фиксируя максимумы только для одного радиуса. Это позволило визуализировать структуру первых резонансных мод. Результаты измерений представлены на рисунке 34 в сравнении с аналитической моделью и значениями, полученными из численного моделирования. Численное моделирование выполнено А.С. Аверкиным в лаборатории «Сверхпроводящие метаматериалы» при помощи пакета HFSS [73]. Такое сравнение позволяет увидеть хорошее согласие в форме кривых и совпадение положений максимумов и минимумов магнитного поля.

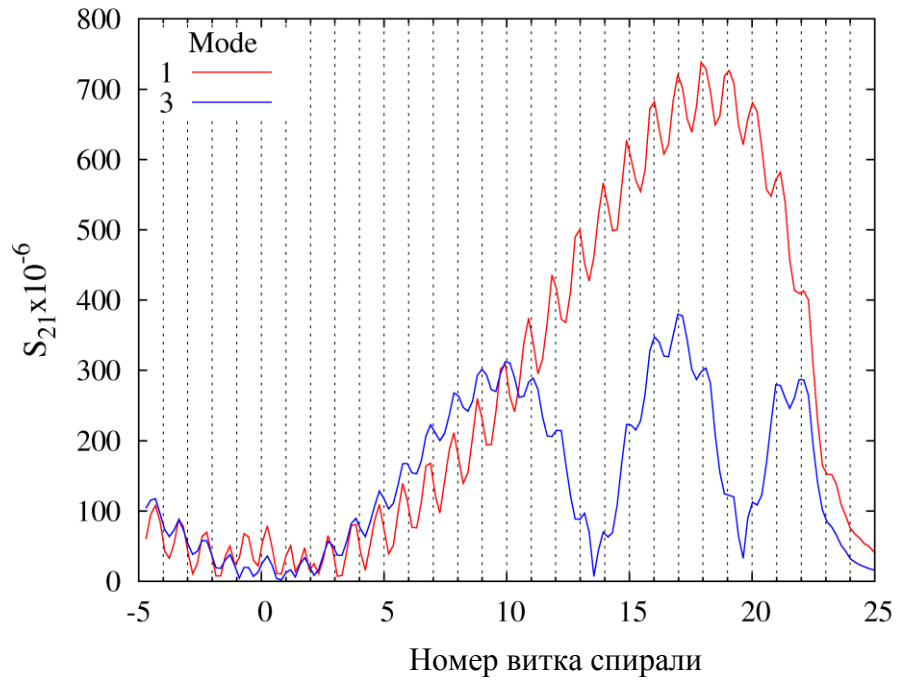


Рисунок 33 – Зависимость S_{21} от положения пробника, снятая вдоль радиуса, проходящего конец последнего витка спирали, для первой (красная кивая) и третьей (синяя кивая) резонансной моды. Координата вдоль радиуса выражена в витках спирали. Данное измерение позволяет разрешить отдельные витки спирали.

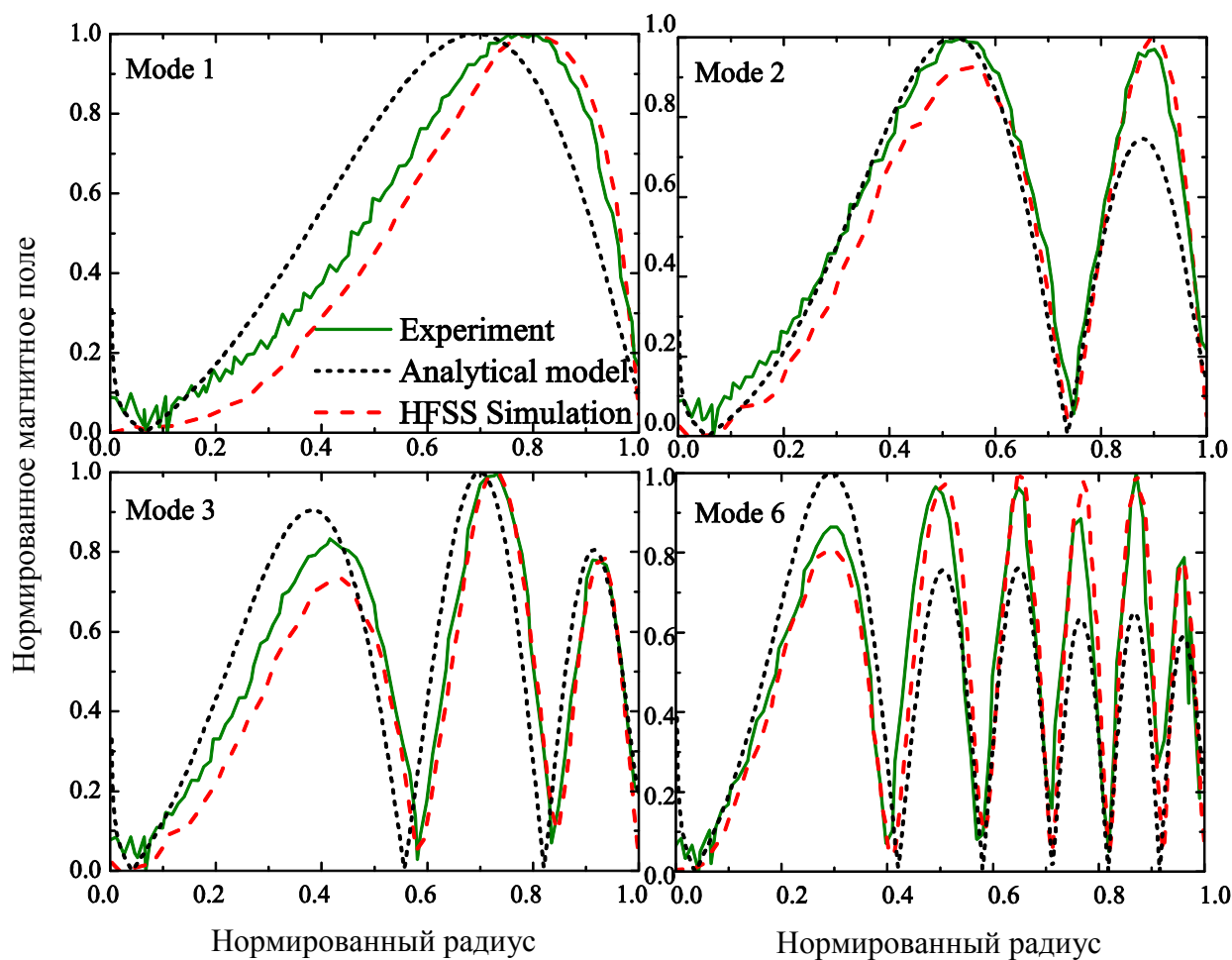


Рисунок 34 – Магнитное поле на расстоянии 0,3 мм от поверхности медной спирали диаметром 32 мм на первой, второй, третьей и шестой резонансных модах. Зеленая линия показывает экспериментально полученный результат, красная – результат численного моделирования, черная – магнитное поле, рассчитанное по формуле (94). Все результаты нормированы на единицу.

3.3. Измерение функций распределения тока спирального резонатора

Функции распределения тока в сверхпроводящем спиральном резонаторе были экспериментально исследованы при помощи низкотемпературного лазерного сканирующего микроскопа (рис. 22). Схема измерительной установки представлена на рисунке 23. Как уже упоминалось в разделе 2.3, установка состоит из заливного криостата с оптическим окном в крышке, диодного лазера с модулятором мощности, x-y сканеров, оптической системы; микроволновая часть установки состоит из генератора ВЧ сигнала, каскада усилителей, диода Шоттки и синхронного детектора, передающего данные на компьютер. Криостат необходим для охлаждения исследуемого образца ниже температуры сверхпроводящего перехода. Диодный лазер является источником лазерного излучения, которое с заданной частотой включается и выключается модулятором, это необходимо, чтобы синхронный детектор смог уловить слабый микроволновой сигнал, приходящий с образца. Кроме того, модулирование мощности лазерного воздействия помогает уменьшить область теплового возбуждения обратно пропорционально квадратному корню из частоты модуляции [76]. В описываемом эксперименте лазерный луч модулировался с частотой 100 кГц, максимальной из доступных для используемого синхронного детектора. X-Y сканеры представляют собой два позиционирующих лазерный луч зеркала с автоматизированным приводом, который управляется с компьютера и позволяет поворачивать зеркала, смещая тем самым луч. Оптическая система служит для фокусировки луча в плоскости образца и позволяет выставлять луч на образце, контролируя положение глазом или чувствительной камерой. Генератор подает сигнал заданной мощности и частоты на образец, каскад усилителей необходим, т.к. сигнала от образца очень слаб, вплоть до -60 dBm. Диод Шоттки выпрямляет сигнал для синхронного детектора, а синхронный детектор, зная частоту модуляции лазера, выделяет сигнал, вызванный именно лазером.

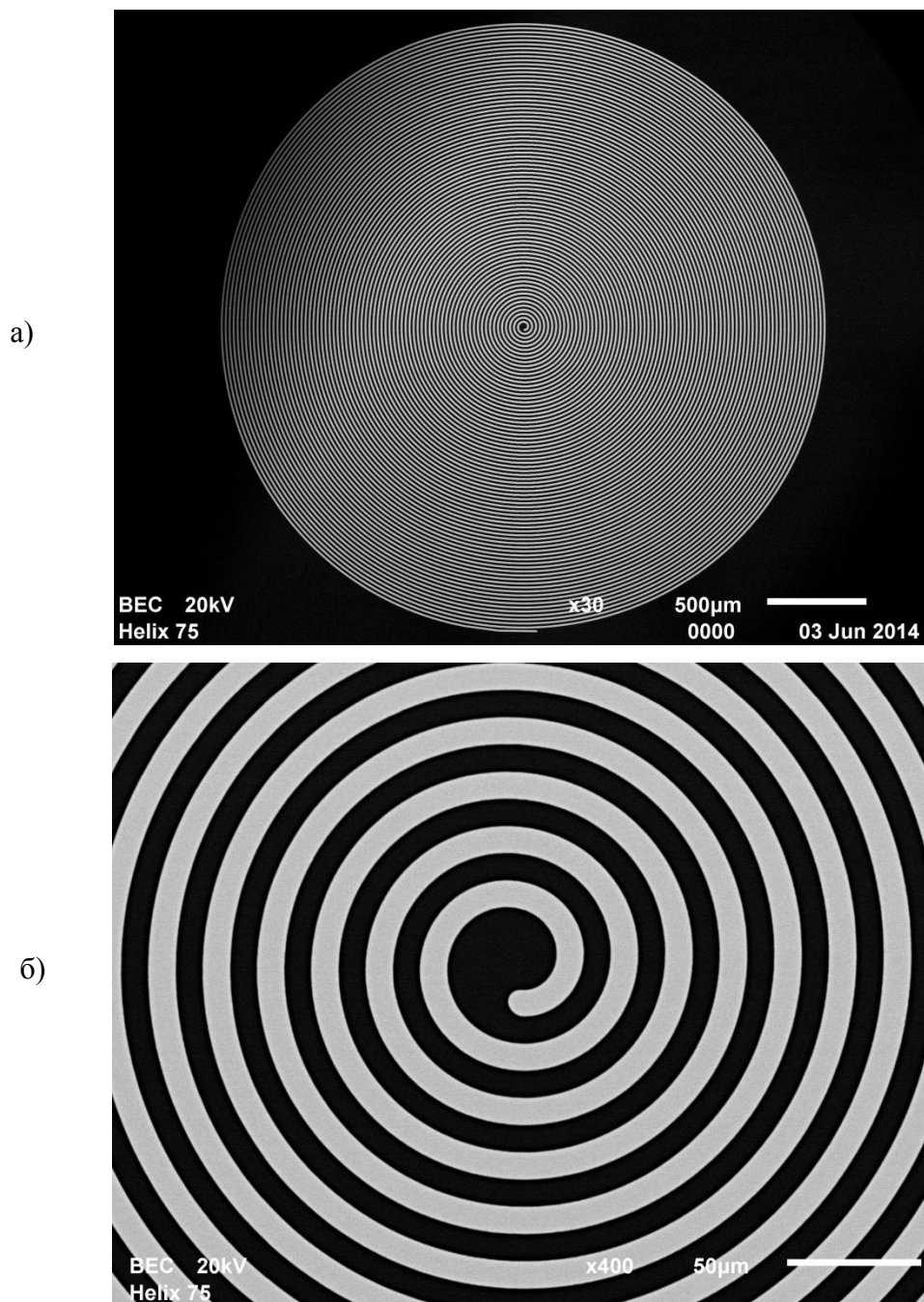


Рисунок 35 – Фотография исследуемого образца, ниобиевого резонатора на кремниевой подложке, спираль имеет 75 витков с шагом 20 мкм и внешним диаметром 3 мм. Изображения получены про помощи электронного сканирующего микроскопа с тридцатикратным увеличением (а) и четырехсоткратным увеличением (б).

С помощью ЛСМ был исследован ниобиевый резонатор на кремниевой подложке, спираль имеет 75 витков с шагом 20 мкм и внешним диаметром 3 мм (рис. 35). Первым шагом было измерение резонансных частот. Для этого возбуждающее и принимающее кольца подключаются к анализатору цепей, который снимает коэффициент прохождения

сигнала между кольцами в зависимости от частоты, на резонансных частотах наблюдается усиление сигнала. Лазер при этом выключен. Результат такого измерения представлен на рисунке 36.

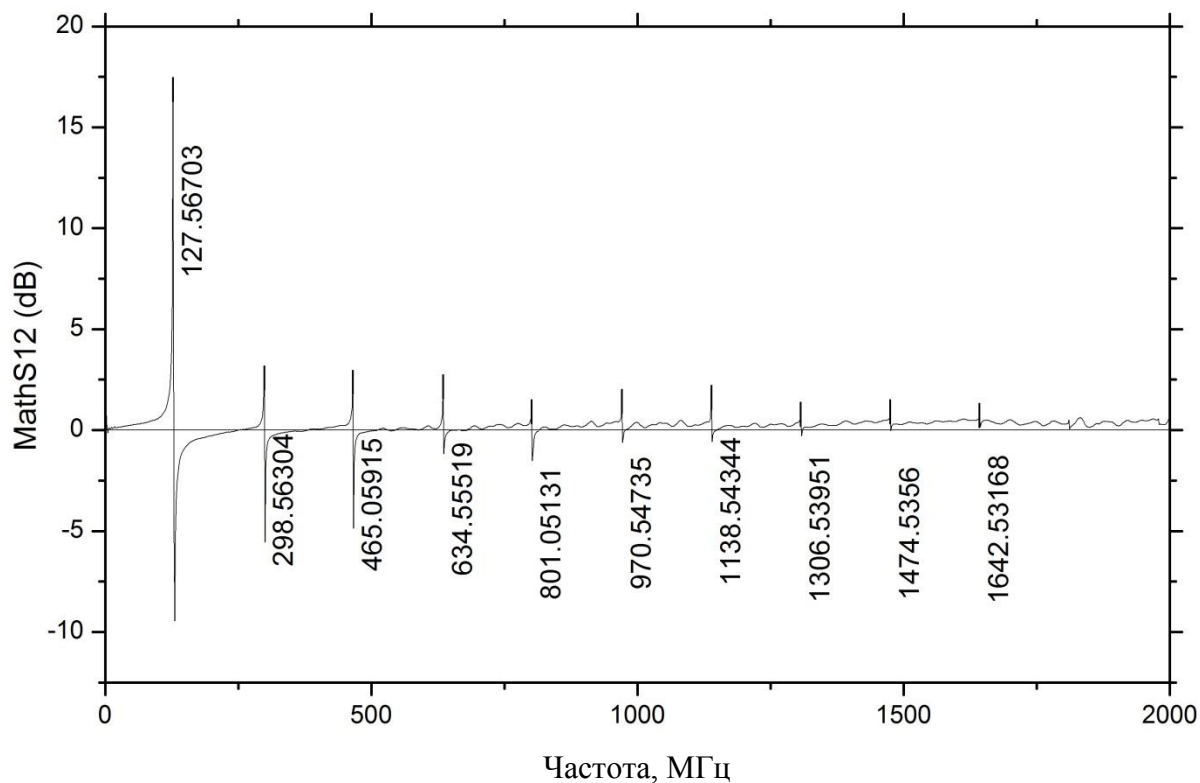


Рисунок 36 – График зависимости коэффициента прохождения от частоты возбуждающего сигнала. Коэффициент прохождения взят как разность коэффициентов прохождения выше и ниже температуры сверхпроводящего перехода образца.

Далее включается лазер и в болометрическом режиме снимается двумерное изображение распределения тока. Нами использовался красный лазер с длиной волны 670 нм, мощность лазера варьировалась около 10 нВт. Полученные таким образом изображения ниобиевой спирали на первых десяти модах показаны на рисунке 37. Разрешение ЛСМ определяется объективной линзой, фокусирующей оптический луч. Экспериментальные данные двумерных изображений ЛСМ усреднены по полярному углу и представлены на рисунке 38 в сравнении с аналитикой и численным моделированием.

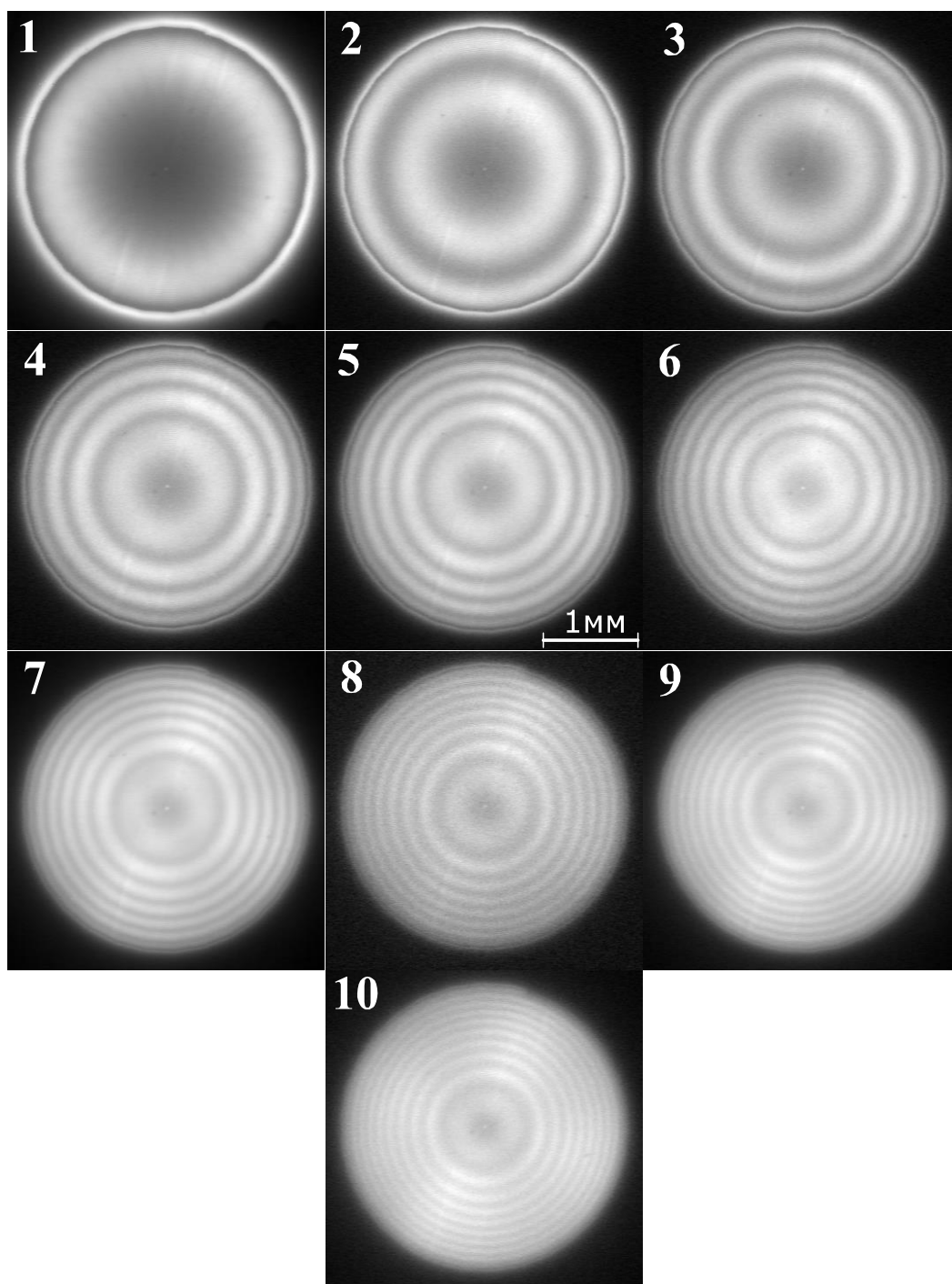


Рисунок 37 – Двумерные изображения образца, полученные с помощью лазерного сканирующего микроскопа. Более яркие области соответствуют большему значению тока. Данные сняты на десяти первых резонансных частотах.

Ненулевое экспериментальное значение тока между максимумами вызвано разогревом спирали через подложку в связи с большой теплопроводностью кремния. Действительно, коэффициент поглощения кремния на длине волны 670 нм порядка 65 процентов. Т.о., при температуре 4 К и частоте модуляции лазера 100 кГц размер теплового пятна в кремниевой подложке не менее 20 мкм. Следовательно, попадая в межвитковую область, лазер нагревает 2-3 соседних витка, генерируя тем самым дополнительный фототок.

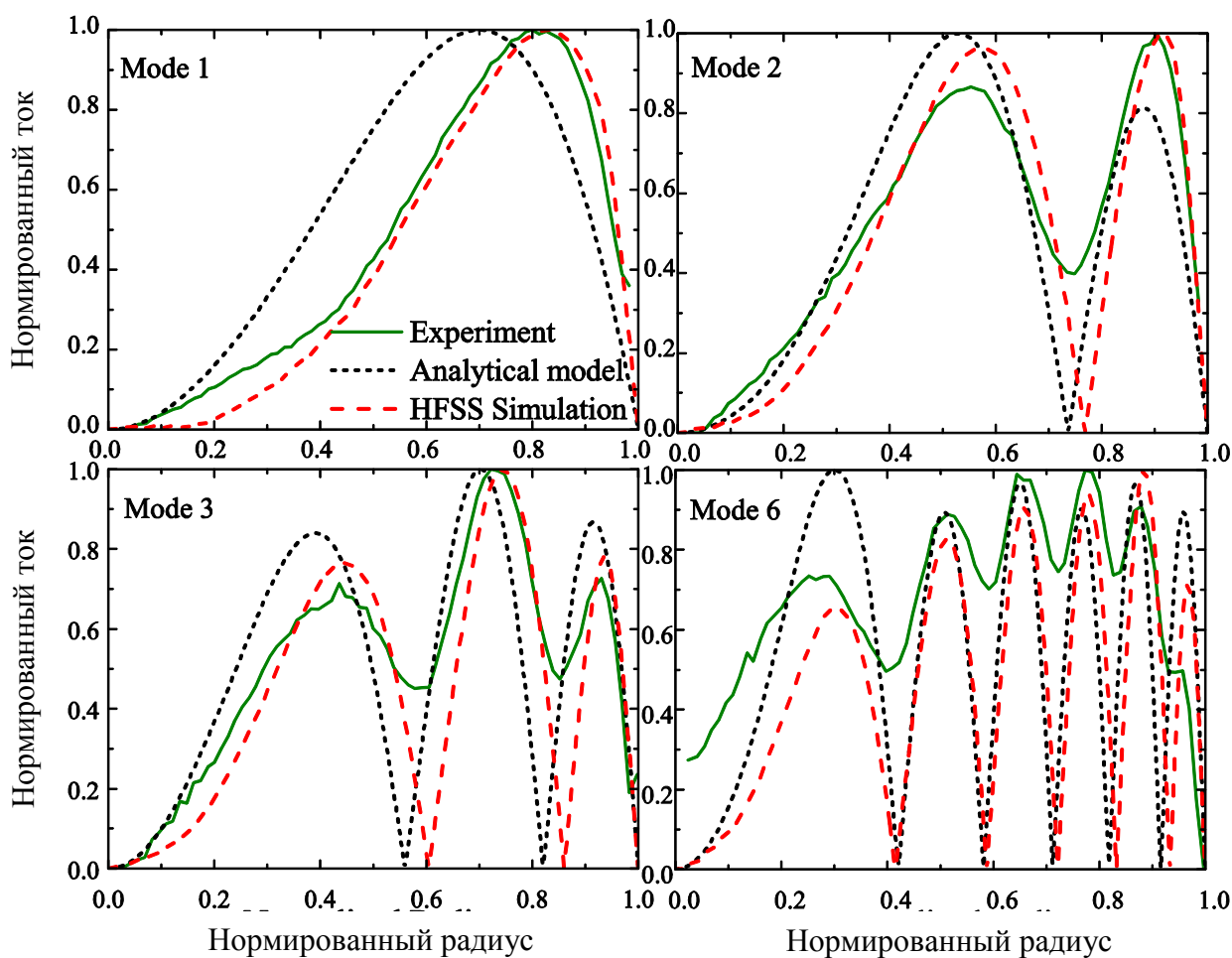


Рисунок 38 – Амплитуда плотности тока вдоль радиуса ниобиевой спирали диаметром 3 мм. Зеленая линия показывает экспериментально полученный результат, красная – результат численного моделирования, черная – функцию тока, рассчитанную по формуле (90). Все результаты нормированы на единицу.

Глава 4 Электромагнитный отклик метаматериала на основе плоских спиральных резонаторов

4.1. Взаимодействие спиралей

Рассмотрим взаимодействие двух идентичных спиралей, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Пусть они расположены на расстоянии D , как показано на рисунке 39. В качестве системы отсчета возьмем полярные координаты (r, θ) , связанные с центром одной из спиралей.

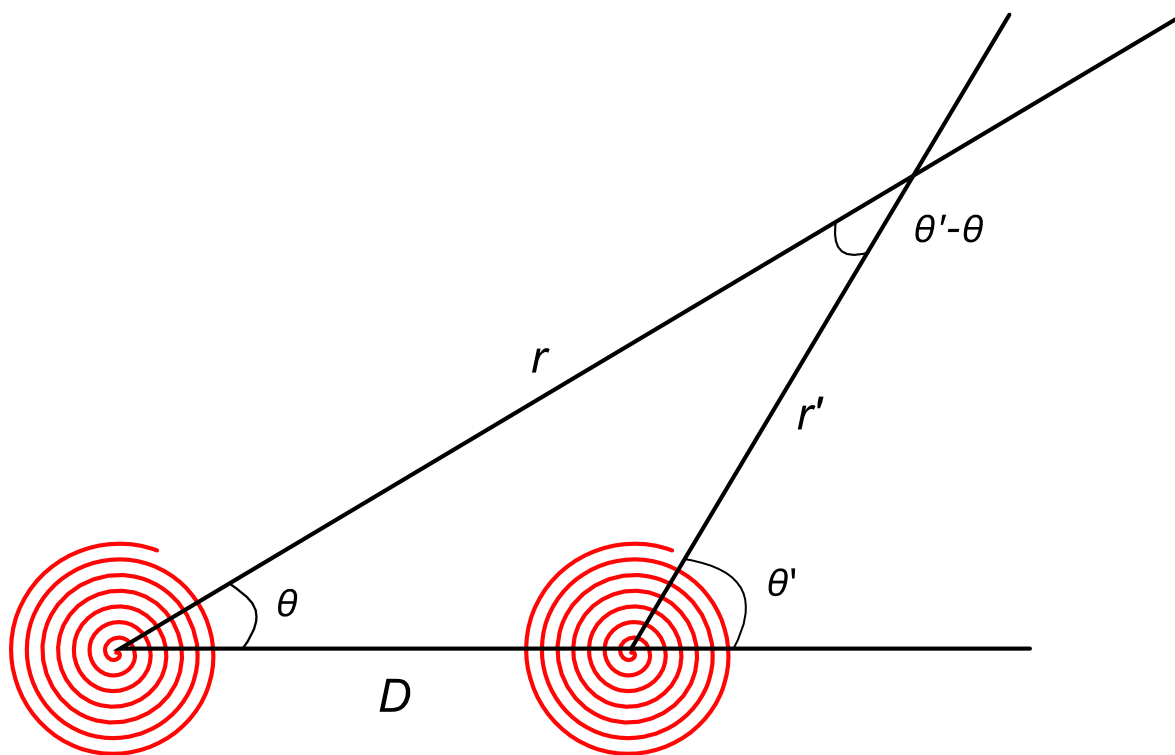


Рисунок 39 – Две идентичные спирали, расположенные на расстоянии D . Система отсчета связана с центром левой спирали, выбрана система полярных координат (r, θ) . Введены также вспомогательные координаты (r', θ') , связанные с центром правой спирали.

Энергия взаимодействия двух токов может быть записана следующим образом:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{c} \int \vec{j}_1 \vec{A}_2 dV. \quad (95)$$

Тогда ток в первой спирали j_1 будет зависеть от (r, θ) , а векторный потенциал правой спирали A_2 будет зависеть от координат (r', θ') , которые должно будет выразить через (r, θ) :

$$r'^2 = r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta. \quad (96)$$

Запишем компоненты тока j_1 , для этого вспомним, что $j_r^2 + j_\theta^2 = I_1(t)\psi^2$. Угол между направлением тока и направлением, перпендикулярным радиусу, так мал, что его синус и тангенс может быть заменен на значение самого угла α . Т.о. компоненты тока могут быть записаны в следующем виде:

$$j_r = \frac{\alpha I_1(t)\psi(r)}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad (97)$$

$$j_\theta = \frac{I_1(t)\psi(r)}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \quad (98)$$

Компоненты векторного потенциала относительно координат (r', θ') можно записать следующим образом:

$$A_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_2(t) e^{i\omega t}}{(4\pi)^2} \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \int_0^\infty dx J_1[\rho x] J_1 \left[\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta} x \right], \quad (99)$$

$$A_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_2(t) e^{i\omega t}}{(4\pi)^2 R_e \alpha} \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \rho \int_0^\infty dx J_1[\rho x] J_1 \left[\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta} x \right]. \quad (100)$$

Соотношение между проекциями в координатах (r', θ') и координатах (r, θ) таково:

$$A_\theta = A_{\theta'} \cos(\theta' - \theta) + A_r \sin(\theta' - \theta), \quad (101)$$

$$A_r = -A_{\theta'} \sin(\theta' - \theta) + A_{r'} \cos(\theta' - \theta). \quad (102)$$

Для того, чтобы воспользоваться ими, необходимо записать тригонометрические соотношения:

$$\cos(\theta' - \theta) = \frac{r - D \cos \theta}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}}, \quad (103)$$

$$\sin(\theta' - \theta) = \frac{D \sin \theta}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}}. \quad (104)$$

Воспользовавшись уравнениями (97)–(98), уравнение (95) можем переписать иначе:

$$\varepsilon_{12} = \frac{2\pi I_1(t)}{c\sqrt{1+\alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) \int_0^{2\pi} d\theta [\alpha A_r + A_\theta]. \quad (105)$$

Распишем компоненты векторного потенциала в подынтегральном выражении, используя соотношения (99)–(104):

$$\alpha A_r + A_\theta = A_{\theta'} \frac{r - D \cos \theta - \alpha \sin \theta}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} + A_{r'} \frac{\alpha r - \alpha D \cos \theta + D \sin \theta}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}}. \quad (106)$$

Подставим выражение (106) в выражение для энергии взаимодействия двух спиралей (105). Обратим внимание, что мы рассматриваем спирали с большим количеством плотно навитых витков, а значит, параметр α мал и выражение для энергии можно дополнительно упростить:

$$\varepsilon_{12} = \frac{2\pi\mu_0 I_1(t) I_2(t)}{(4\pi)^2 c \sqrt{1+\alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r - D \cos \theta}{R_e \alpha \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} \cdot \int_0^\infty dx J_1[\rho x] J_1\left[\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta} x\right] \quad (107)$$

Введем новое обозначение $u = r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta$. Это добавит еще один интеграл от дельта-функции, обеспечивающий равенство $u = r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta$, но позволит упростить выражение (107)

$$\varepsilon_{12} = \frac{2\pi\mu_0 I_1(t)I_2(t)}{(4\pi)^2 R_e \alpha c \sqrt{1+\alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} du \delta(u - (r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta)) \cdot \frac{r - D \cos \theta}{\sqrt{u}} \int_0^{\infty} dx J_1[\rho x] J_1[\sqrt{u} x] \quad (108)$$

Вспользуемся экспоненциальной записью дельта-функции, а также известными значениями интегралов произведения экспоненты и функции Бесселя [74]:

$$\varepsilon_{12} = \frac{2\pi\mu_0 I_1(t)I_2(t)}{(4\pi)^2 R_e \alpha c \sqrt{1+\alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{is(u-r^2-D^2)} (rJ_0[2rDs] - iDJ_1[2rDs]) \int_0^{\infty} dx J_1[\rho x] J_1[\sqrt{u} x] \quad (109)$$

Для дальнейших расчетов положим центры спирали удаленными друг от друга. Действительно, мы хотим рассмотреть метаматериал, состоящий из слабозаимодействующих мета-атомов, а это возможно только при достаточном удалении спиралей друг от друга. Итак, $D \gg r$ т.е. $\sqrt{u} \approx D$. Тогда энергия взаимодействия спиралей будет выглядеть следующим образом

$$\varepsilon_{12} = \frac{2\pi\mu_0 I_1(t)I_2(t)}{(4\pi)^2 R_e \alpha c \sqrt{1+\alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \int_{(r-D)^2}^{(r+D)^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \cdot \frac{r^2 - D^2 + u}{\sqrt{4r^2 D^2 - (r^2 - D^2 + u)^2}} \int_0^{\infty} dx J_1[\rho x] J_1[\sqrt{u} x] \quad (110)$$

Благодаря такому упрощению, появляется возможность взять интеграл по u :

$$\varepsilon_{12} = \frac{\mu_0 I_1(t)I_2(t)}{4DR_e \alpha c \sqrt{1+\alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) r^2 \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \rho \int_0^{\infty} dx J_1[\rho x] J_1[Dx]. \quad (111)$$

Вспомним, что мы положили $D \gg r$ и, следовательно, $\rho/D < 1$. Приняв это во внимание, становится возможным взять последний интеграл в выражении (111). Он будет выражен через эллиптические интегралы K и E , получим тогда следующее выражение для энергии:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\mu_0 I_1(t) I_2(t)}{2\pi D R_e \alpha c \sqrt{1 + \alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) r^2 \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \left(K\left(\frac{\rho}{D}\right) - E\left(\frac{\rho}{D}\right) \right). \quad (112)$$

Приняв во внимание, что в нашем случае аргумент эллиптических интегралов мал, они могут быть разложены в ряд т.о.:

$$K\left(\frac{\rho}{D}\right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{D^2} \right), \quad (113)$$

$$E\left(\frac{\rho}{D}\right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{D^2} \right). \quad (114)$$

Тогда выражение для энергии взаимодействия двух спиралей примет компактный вид

$$\varepsilon_{12} = \frac{\mu_0 I_1(t) I_2(t)}{8D^3 R_e \alpha c \sqrt{1 + \alpha^2}} \int_{R_i}^{R_e} dr \psi(r) r^2 \int_{R_i}^{R_e} d\rho \psi(\rho) \rho^2. \quad (115)$$

Отсюда видно, что энергия взаимодействия спадает как куб расстояния между центрами спиралей, так же энергия тем больше, чем плотнее навивка спирали.

4.2. Магнитная проницаемость метаматериала на основе плоских спиральных резонаторов

Рассмотрим теперь метаматериал, составленный из спиральных резонаторов. Возьмем примитивную кубическую решетку с периодом a и поместим в ее узлы вместо атомов спиральные мета-атомы (рис. 40).

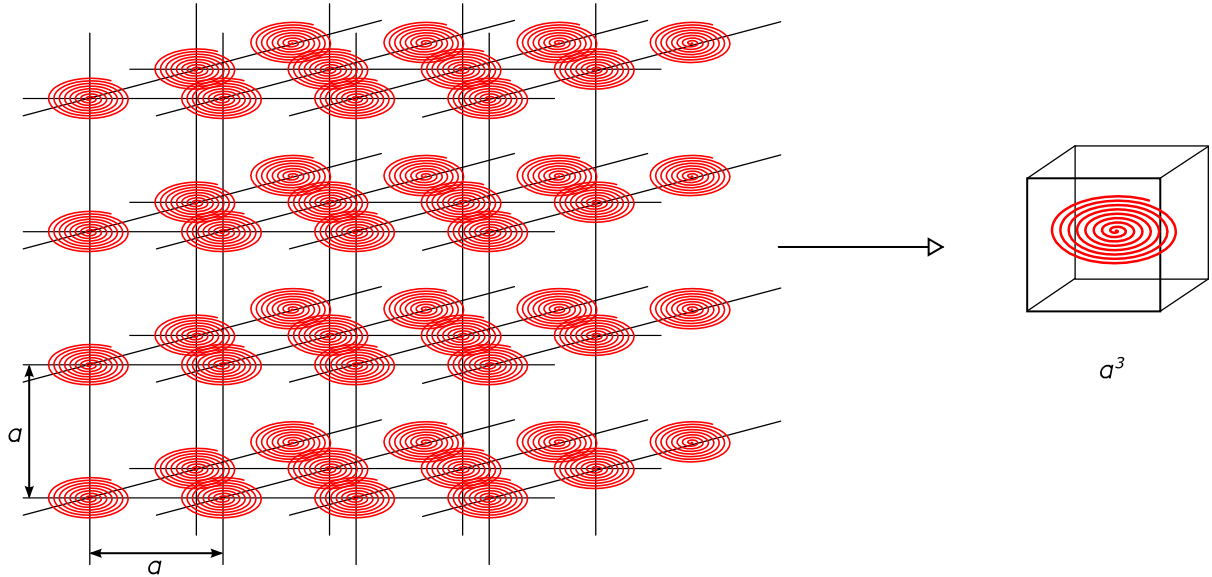


Рисунок 40 – Схема метаматериала, в виде примитивной кубической решетки с периодом a , в узлах которой вместо атомов спиральные мета-атомы. Т.о. на каждый мета-атом приходится элементарная ячейка a^3 .

Для того чтобы вычислить магнитную проницаемость такого метаматериала, положим, что токи в спиральных резонаторах возбуждены однородным магнитным полем, направленным перпендикулярно плоскостям спиралей (вдоль одной из кристаллографических осей), т.е. $H_z = H e^{i\omega t}$. Такое магнитное поле приводит к тому, что компонента электрического поля вдоль спирали уже не равна нулю. Записав четвертое уравнение Максвелла и взяв единственную его ненулевую проекцию на ось z , получим уравнение, аналогичное граничному условию для одиночной спирали в свободном пространстве:

$$R_e \alpha E_r \Big|_{z=0} + r E_\theta \Big|_{z=0} = -i\omega H e^{i\omega t} \frac{r^2}{2}. \quad (116)$$

Для мета-атомов в форме спирали Архимеда мы уже знаем выражения для компонент электрического поля и можем переписать уравнение (116) следующим образом:

$$\int_0^\infty dz \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) e^{3\xi} \left(K_\xi''(\xi - \tau) + 2K_\xi'(\xi - \tau) \right) + \frac{\omega^2 R_e^2}{c^2 \alpha^2} \int_0^\infty dz \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) e^{-\tau} K(\xi - \tau) = \frac{\varepsilon_0 \omega^2 (4\pi)^2 R_e^4 H}{\alpha} \frac{e^{-2\xi}}{2} \quad (117)$$

Как и в главе 3, здесь мы можем воспользоваться локальным приближением и получим т.о. уравнение для нахождения функций тока в каждой из спиралей:

$$-2 \frac{K(v)}{g_1(v)} \psi_v'(v) v^{-2} + 4\psi_v''(v) + \frac{\omega^2 R_e^2}{c^2 \alpha^2} \frac{g_2(v)}{g_1(v)} \psi(v) = \frac{\varepsilon_0 \omega^2 (4\pi)^2 R_e^4 H}{2\alpha} \frac{v}{g_1(v)} g_1(v). \quad (118)$$

С хорошей точностью отношение $\frac{g_2(v)}{g_1(v)}$ может быть положено равным единице, также

отношение $\frac{K(v)}{g_1(v)}$ может быть положено равным нулю. Тогда уравнение (118) примет вид:

$$\psi_v''(v) + \frac{\omega^2 R_e^2}{4c^2 \alpha^2} \psi(v) = \frac{\omega^2 (4\pi)^2 R_e^4 H}{8\mu_0 \alpha c^2} \frac{v}{g_1(v)}. \quad (119)$$

Решение, по-прежнему, будем искать в виде $\psi(v) = \sum_n A_n \sin(\pi n v)$, таким образом, мы получим следующее уравнение для нахождения коэффициентов разложения

$$c \frac{\omega^2 R_e^4 H}{\mu_0 \alpha c^2} = \frac{A_m \left(\frac{\omega^2 R_e^2}{4\pi^2 c^2 \alpha^2} - m^2 \right)}{\gamma_m}, \quad (120)$$

где коэффициент $\gamma_n = \int_0^1 dx \frac{x}{g_1(x)} \sin \pi n x$. Коэффициенты A_m могут быть найдены следующим образом:

$$A_m = H \frac{\omega^2 R_e^4}{\mu_0 \alpha c^2} \frac{\gamma_m}{\frac{\omega^2 R_e^2}{4\pi^2 c^2 \alpha^2} - m^2}. \quad (121)$$

Так, зная функции тока каждого из резонаторов, находим магнитный момент мета-атомов, а, следовательно, и намагниченность метаматериала:

$$\mu = 1 - C \omega^2 \sum_n \frac{\gamma_n}{(2n+1) \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - n^2 \right)} \quad (122)$$

где введены обозначения: константа связи спирали с магнитным полем

$$C = \frac{\pi R_e^5}{\mu_0 \alpha a^3 c^2 \sqrt{1+\alpha^2}} \text{ и характеристическая резонансная частота } \omega_0 = \frac{2\pi c \alpha}{R_e}. \text{ Графически}$$

выражение (122) представлено на рисунке 41. Из рисунка видно, что магнитная проницаемость демонстрирует резонансное поведение вблизи резонансных частот одиночного резонатора и принимает отрицательные значения. Обратим внимание, что четные и нечетные резонансные моды по-разному откликаются на внешнее магнитное поле: на нечетных модах спиральный резонатор аналогичен магнитному диполю. Действительно, представленный во второй и третьей главах, анализ магнитного поля показывает, что поле четных мод локализовано в ближней зоне, что приводит к быстрому падению связи резонатора с окружающими полями. Поле нечетных мод, на расстоянии порядка диаметра, по структуре сходно с магнитным полем одиночного кольца с током, но по большей части оно локализовано вблизи спирали.

Т.к. не учтены потери энергии при взаимодействии внешнего поля с мета-атомами, на резонансах магнитная проницаемость обращается в бесконечность. В данной работе мы говорим о сверхпроводящих резонаторах при температурах ниже критической, т.о., в отсутствие омических потерь, на первое место выходят потери мета-атома на излучение. В связи с этим рассмотрим влияние радиационных потерь мета-атома на магнитную проницаемость метаматериала. Для этого, во-первых, находится мощность излучения одиночного резонатора на первой моде [75]:

$$P = \frac{R_0 \pi}{6} \frac{\omega_1^4 R_e^4}{c^4} I(t)^2 A_1^2 \int_0^1 r^4 \sin^2 \pi r^2 dr \quad (123)$$

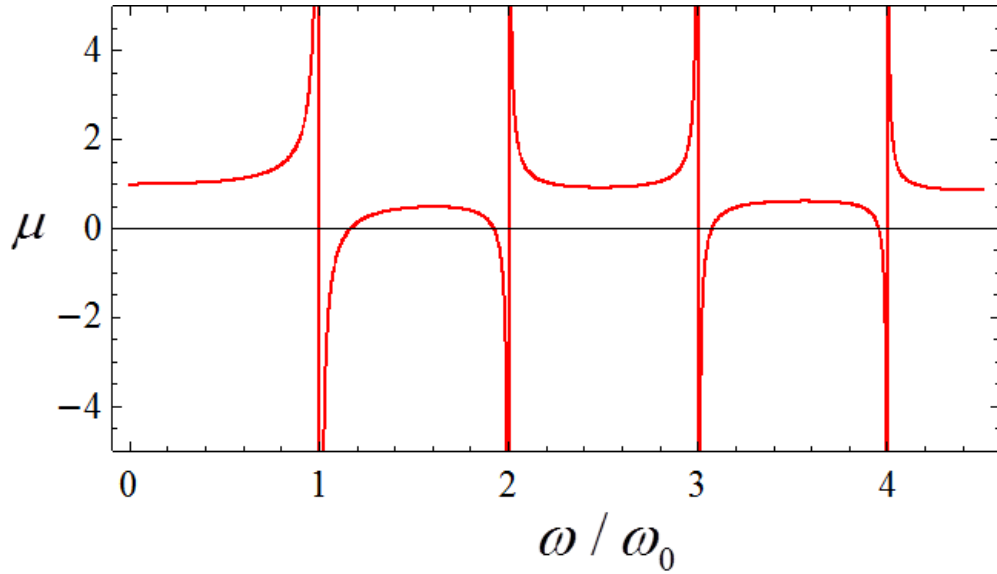


Рисунок 41 – Электромагнитный отклик метаматериала на однородное возбуждение внешним магнитным полем. Визуализация выражения (122).

где R_0 – радиационное сопротивление вакуума. Далее записывается энергия, запасенная в резонаторе на первой моде:

$$W = R_e I(t)^2 A_1^2 \int_0^1 \left[\mu_0 r \left(\ln \frac{16R_e r}{w} - 2 \right) + \frac{\pi m}{2e^2 n_s^2} \right] \sin^2 \pi r^2 dr \quad (124)$$

где первое слагаемое соответствует геометрической индуктивности резонатора, а второе – кинетической индуктивности. В этих терминах добротность резонатора на первой моде будет

$$Q = \frac{\omega W}{P}. \quad (125)$$

Далее вводим в выражение для магнитной проницаемости коэффициент потерь

$$\kappa = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (126)$$

Тогда магнитная проницаемость метаматериала (122) примет вид

$$\mu = 1 - C\omega^2 \sum_n \frac{\gamma_n}{(2n+1) \left(\frac{(\omega + i\kappa)^2}{\omega_0^2} - n^2 \right)}. \quad (127)$$

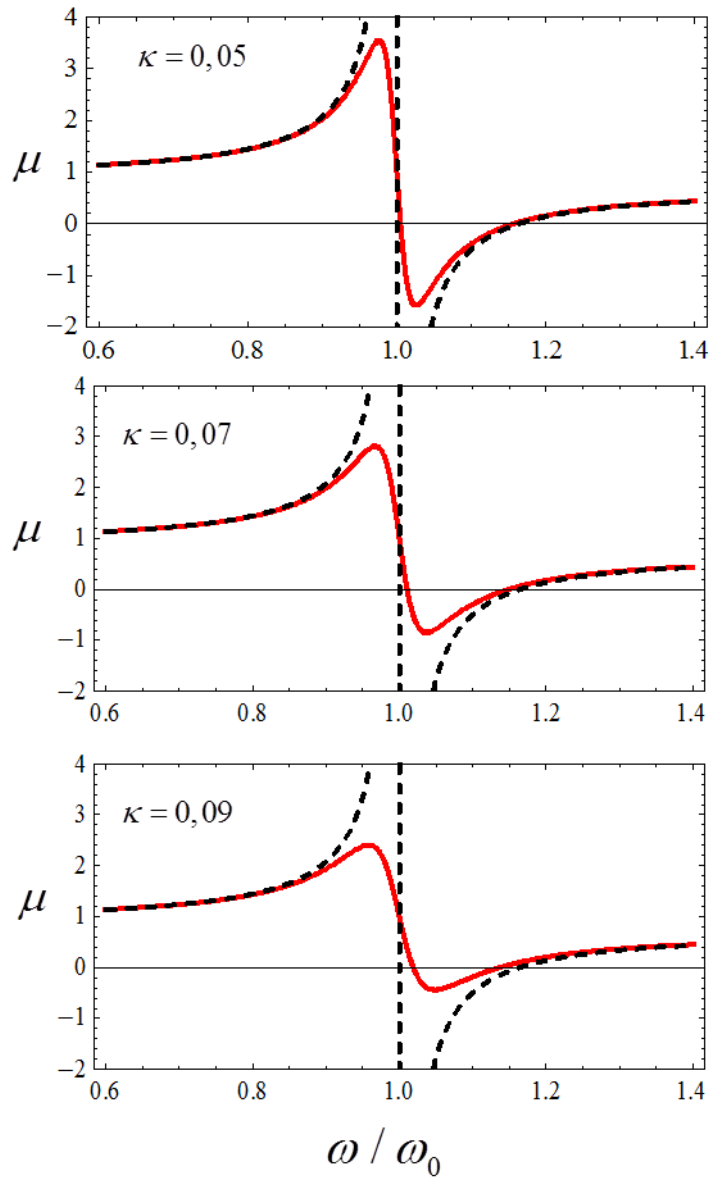


Рисунок 42 – Электромагнитный отклик метаматериала на возбуждение магнитным полем. Визуализация выражения (127) при трех значениях κ .

Для иллюстрации построенной модели рассмотрим теперь метаматериал с ниобиевыми спиралями из 75 витков и диаметром 3 мм в качестве мета-атомов. Электродинамика

таких резонаторов подробно рассмотрена в главе 3. Период решетки метаматериала примем равным 9 мм. Из экспериментальных данных и результатов численного моделирования, представленных в разделе 3.3, можно оценить добротность данного резонатора на первой моде. Тогда согласно формуле (125) коэффициент потерь такой спирали принимает значение порядка 10^{-1} – 10^{-2} . На рисунке 42 показана магнитная проницаемость метаматериала на первой моде для трех значений коэффициента потерь в сравнении с магнитной проницаемостью без учета потерь, формула (122). Из рисунка видно, что магнитная проницаемость сохраняет резонансное поведение вблизи резонансной частоты одиночного резонатора, однако ее амплитуда уже не обращается в бесконечность, а принимает конечные значения (тем меньшие, чем больше коэффициент κ). Сохраняется также частотная область, где магнитная проницаемость отрицательна, ширина области порядка 10–15 процентов от резонансной частоты.

Заключение

В данной работе дано теоретическое обоснование возможности создания метаматериала с отрицательной магнитной проницаемостью с использованием плоских спиральных резонаторов как мета-атомов.

Определен электромагнитный отклик метаматериала на внешнее магнитное поле. Учтено влияние радиационных потерь мета-атомов на магнитную проницаемость метаматериала.

Представлено обобщение метода спирально проводящей цилиндрической поверхности, известного для описания электродинамики цилиндрической спирали, на случай плоской проводящей спирали конечной длины: аналитически решена задача о собственных модах двух типов плоских резонаторов в форме спирали Архимеда – мета-атомов исследуемого метаматериала.

Экспериментально установлены и объяснены теоретически особенности спектра резонансных частот двух типов спиральных резонаторов: спирали Архимеда и спирали Архимеда без центральной части (кольцевого спирального резонатора). Продемонстрировано хорошее соответствие теории, эксперимента и численного моделирования потенциальных мета-атомов метаматериала.

Результаты данной работы применимы для создания на основе метаматериалов новых инструментов управления распространением ВЧ сигналов. Построенная модель электродинамики спиральных резонаторов может также применяться для разработки систем беспроводной передачи электроэнергии.

Список публикаций

1. Electrodynamics of an ultra-compact ring-shaped spiral resonator / N. Maleeva, M. V. Fistul, A. Karpov, A. P. Zhuravel, A. Averkin, P. Jung and A. V. Ustinov, // J. Appl. Phys. 115, 064910 (2014).
2. Electrodynamics of a planar Archimedean spiral resonator / N. Maleeva, N. N. Abramov, A. S. Averkin, M. V. Fistul, A. Karpov, A. P. Zhuravel, and A. V. Ustinov // J. Appl. Phys. 118, 048526 (2015).
3. Electrodynamics of a spiral resonator as a suitable magnetic component of metamaterials / N. Maleeva, M. Fistul, A. Averkin, A. Karpov, and A. V. Ustinov // Proceeding of The Metamaterials'2013 Conference.
4. Inner modes of a compact spiral resonator suitable for metamaterial applications / N. Maleeva, M. Fistul, N.N. Abramov, A. Averkin, A. P. Zhuravel, A. Karpov, and A. V. Ustinov // Proceeding of The Metamaterials'2014 Conference.
5. Математическая модель плоского спирального резонатора конечной длины / Малеева Н.А., Фистуль М.В., Абрамов Н.Н., Аверкин А.С., Карпов А.В., Журавель А.П., Устинов А.В. // Тезисы Второй Московской Микроволновой Недели, 26-28 ноября, Москва (2014).
6. Negative Permeability In 3D Superconducting Metamaterial / N. Maleeva, M. Fistul, A. Karpov, and A. V. Ustinov // Proceeding of The Metamaterials'2015 Conference.

Список литературы

- [1] J. B. 1, A. J. Holden, D. J. Robbins and W. J. Stewart, Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena, *IEEE Trans. Microw. Theory* 47 2075–84 1999
- [2] В. Г. Веселаго // УФН. — 1967. — Т. 92. — С. 517
- [3] Guenneau, S. B.; Movchan, A.; Pétursson, G.; Anantha Ramakrishna, S. (2007). "Acoustic metamaterials for sound focusing and confinement". *New Journal of Physics* 9 (11): 399.
- [4] Page, J (2011). "Metamaterials: Neither solid nor liquid". *Nature Materials* 10 (8): 565–6.
- [5] N. I. Zheludev, "The Road Ahead for Metamaterials," *Science* 328 (5978), 582-583 (2010).
- [6] Р.А. Силин, В.П. Сазонов, Замедляющие системы, Советское радио, М. – 1966.
- [7] Hurd C.M. Varieties of Magnetic Order in Solids.—*Contemp. Phys.*, 1982, v. 23, No. 5 pp. 469-493.
- [8] Л.Д. Ландау Е.М. Лифшиц Курс теоретической физики т.8 Электродинамика сплошных сред. М.Физматлит 2005.
- [9] N.Engheta *Metamaterials Physics and Engineering Explorations* Wiley & Sons, 2006
- [10] E. Plum, V. A. Fedotov, P. Kuo, D. P. Tsai, N. I. Zheludev, Towards the lasing spaser: controlling metamaterial optical response with semiconductor quantum dots *Opt. Express* 17, 8548 (2009).
- [11] M. A. Noginov, G. Zhu, M. Mayy, B. A. Ritzo, N. Noginova, and V. A. Podolskiy Stimulated Emission of Surface Plasmon Polaritons *Phys. Rev. Lett.* 101, 226806 (2008).
- [12] N. I. Zheludev, S. L. Prosvirnin, N. Papasimakis, and V. A. Fedotov Lasing spaser, *Nature Photonics* 2, 351 - 354 (2008)
- [13] A. Ahmadi and H. Mosallaei, Physical configuration and performance modeling of all-dielectric metamaterials, *Phys. Rev. B* 77, 045104
- [14] K. F. MacDonald, Z. L. Sámson, M. I. Stockman, and N. I. Zheludev, Ultrafast active plasmonics, *Nature Photonics* 3, 55 (2008)

- [15] A. E. Nikolaenko, F. De Angelis, S. A. Boden, N. Papasimakis, P. Ashburn, E. Di Fabrizio, and N. I. Zheludev, Carbon nanotubes in a photonic metamaterial, *Phys. Rev. Lett.* 104, 153902 (2010)
- [16] W. J. Padilla, D. N. Basov, D. R. Smith, Negative refractive index metamaterials, *Phys. Rev. Lett.* 96, 107401 (2006)
- [17] Z. L. Samson, K. F. MacDonald, F. De Angelis, B. Gholipour, K. Knight, C. C. Huang, E. Di Fabrizio, D. W. Hewak and N. I. Zheludev, Metamaterial electrooptic switch of nanoscale thickness, *Appl. Phys. Lett.* 96, 143105 (2010)
- [18] M. J. Dicken, K. Aydin, I. M. Pryce¹, L. A. Sweatlock, E.M. Boyd, S. Walavalkar, J. Ma, and H. A. Atwater Frequency tunable near-infrared metamaterials based on VO₂ phase transition, *Opt. Express* 17, 18330 (2009)
- [19] T. Driscoll, Hyun-Tak Kim, Byung-Gyu Chae, Bong-Jun Kim, Yong-Wook Lee, N. M. Jokerst, S. Palit, D. R. Smith, M. Di Ventra, D. N. Basov, Memory metamaterials, *Science* 325, 1518 (2009)
- [20] F. Wang, Y. Zhang, C. Tian, C. Girit, A. Zettl, M. Crommie, Y. R. Shen, Gate-Variable Optical Transitions in Graphene, *Science* 320, 206 (2008)
- [21] V. V. Temnov, G. Armelles, U. Woggon, D. Guzatov, A. Cebollada, A. Garcia-Martin, J. Garcia-Martin, T. Thomay, A. Leitenstorfer, Rudolf Bratschitsch, Active magneto-plasmonics in hybrid metal–ferromagnet structures, *Nat. Photon.* 4, 107 (2010)
- [22] N. Papasimakis, Zhiqiang Luo, Ze Xiang Shen, F. De Angelis, E. Di Fabrizio, A. E. Nikolaenko, and N. I. Zheludev, Graphene in a photonic metamaterial, *Opt. Express* 18, 8353 (2010)
- [23] А.А. Абрикосов, Основы теории металлов, Наука Москва 1987
- [24] В.В. Шмидт, Введение в физику сверхпроводников, МЦНМО Москва-2000
- [25] S.M Anlage, The physics and applications of superconducting metamaterials, *J Opt-Uk* 13 (2), 024001 (2011).
- [26] R.W. Ziolkowski and A D Kipple, Application of double negative materials to increase the power radiated by electrically small antennas, *IEEE Trans. Antennas Propag.* 51 2626–40 (2003)

- [27] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. C. Nemat-Nasser and S. Schultz, Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial, *Appl. Phys. Lett.* 78 489–91 2001
- [28] J. Knobloch, H. Padamsee and T Hays, *RFSuperconductivity for Accelerators* (New York: Wiley) 1998
- [29] V. V. Talanov, L. V. Mercaldo, S. M. Anlage and J. H. Claassen, Measurement of the absolute penetration depth and surface resistance of superconductors and normal metals with the variable spacing parallel plate resonator, *Rev. Sci. Instrum.* 71 2136–46 2000
- [30] V. A. Fedotov, M. Rose, S. L. Prosvirnin, N. Papasimakis, and N. I. Zheludev, "Sharp Trapped-Mode Resonances in Planar Metamaterials with a Broken Structural Symmetry," *Phys Rev Lett* 99, 147401 (2007).
- [31] N. Papasimakis, V. A. Fedotov, N. I. Zheludev, and S. L. Prosvirnin, "Metamaterial Analog of Electromagnetically Induced Transparency," *Phys Rev Lett* 101 (25), 253903 (2008).
- [32] P. Tassin, L. Zhang, T. Koschny, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis, "Low-Loss Metamaterials Based on Classical Electromagnetically Induced Transparency," *Phys Rev Lett* 102 (5), 053901 (2009).
- [33] N. Papasimakis, Y. H. Fu, V. A. Fedotov, S. L. Prosvirnin, D. P. Tsai, and N. I. Zheludev, "Metamaterial with polarization and direction insensitive resonant transmission response mimicking electromagnetically induced transparency," *Appl Phys Lett* 94 (21), 211902 (2009).
- [34] C. Kurter, Philippe Tassin, Lei Zhang, Thomas Koschny, Alexander P. Zhuravel, Alexey V. Ustinov, Steven M. Anlage, and Costas M. Soukoulis, "Classical Analogue of Electromagnetically Induced Transparency with a Metal-Superconductor Hybrid Metamaterial," *Phys Rev Lett* 107 (4), 043901 (2011)
- [35] V. Savinov, V. A. Fedotov, S. M. Anlage, P. A. J. de Groot, and N. I. Zheludev, "Modulating Sub-THz Radiation with Current in Superconducting Metamaterial," *Phys Rev Lett* 109 (24), 243904 (2012).
- [36] S. Kivshar Yuri, "Tunable and nonlinear metamaterials: toward functional metadevices," *Advances in Natural Sciences: Nanoscience and Nanotechnology* 5 (1), 013001 (2014).

- [37] Hou-Tong Chen, Hao Yang, Ranjan Singh, John F. O'Hara, Abul K. Azad, Stuart A. Trugman, Q. X. Jia, and Antoinette J. Taylor, "Tuning the Resonance in High-Temperature Superconducting Terahertz Metamaterials," *Phys Rev Lett* 105 (24), 247402 (2010).
- [38] Jingbo Wu, Biaobing Jin, Yuhua Xue, Caihong Zhang, Hao Dai, Labao Zhang, Chunhai Cao, Lin Kang, Weiwei Xu, Jian Chen, and Peiheng Wu, "Tuning of superconducting niobium nitride terahertz metamaterials," *Opt. Express* 19 (13), 12021-12026 (2011).
- [39] R. Singh, D. R. Chowdhury, J. Xiong, H. Yang, A. K. Azad, A. J. Taylor, Q. X. Jia, and H. T. Chen, "Influence of film thickness in THz active metamaterial devices: A comparison between superconductor and metal split-ring resonators," *Appl Phys Lett* 103 (6), 061117 (2013).
- [40] V. Savinov, A. Tsiatmas, A. R. Buckingham, V. A. Fedotov, P. A. de Groot, and N. I. Zheludev, "Flux Exclusion Superconducting Quantum Metamaterial: Towards Quantum-level Switching," *Scientific reports* 2, 450 (2012).
- [41] J. G. Caputo, I. Gabitov, and A. I. Maimistov, Electrodynamics of a split-ring Josephson resonator in a microwave line, *Phys Rev B* 85 (20), 205446 (2012).
- [42] C.C. Chi, M.T. Loy, D.C. Cronemeyer, Optical probing for inhomogeneous superconducting films // *J. Appl. Phys. Lett.* – 1982 – 40, N5, 1 – pp. 437–439.
- [43] V.A. Konovodchenko, A.G. Sivakov, A.P. Zhuravel et al, Visualization of resistive states of superconducting films, *Cryogenics.* – 1986 – 26, N10 – pp. 531–535.
- [44] В.П. Светлов, Г.Е. Чурилов, В.М. Дмитриев, и др., Визуализация резистивных областей и активных зон в узких каналах в режиме неджозефсоновской генерации, *ФНТ.* – 1988 – 14, №1 – с. 26–33.
- [45] B.E. Grabow, B.G. Boone, and R.M. Sova, *J. Appl. Phys.* 74, 6985 (1993).
- [46] J.R. Clem and R.P. Huebener, *J. Appl. Phys.* 51, 2764 (1980).
- [47] P.M. Shadrin and Y.Y. Divin, *Physica C* 297, 69 (1998).
- [48] S. Zeuner, H. Lengfellner, and W. Prettl, *Phys. Rev. B* 15, 11903 (1995).
- [49] S. Dilhaire, A. Salhi, S. Grauby, and W. Claeys, *Microelectr. Reliab.* 43, 1609 (2003).
- [50] H. Lengfellner, S. Zeuner, W. Prettl, and K.F. Renk, *Europhys. Lett.* 25, 375 (1995).

- [51] D. Abraimov, D.M. Feldmann, A.A. Polyanskii, A. Gurevich, G. Daniels, D.C. Larbalestier, A.P. Zhuravel, and A.V. Ustinov, *Appl. Phys. Lett.* 85, 2568 (2004).
- [52] M. Tsindlekht, M. Golosovsky, H. Chayet, D. Davidov, and S. Chocron, *Appl. Phys. Lett.* 65, 2875 (1994).
- [53] A.P. Zhuravel, A.V. Ustinov, H. Harshavardhan, and S.M. Anlage, *Appl. Phys. Lett.* 81, 4979 (2002).
- [54] H.S. Newman and J.C. Culbertson, *Microwave Opt. Tech. Lett.* 6, 725 (1993).
- [55] J.C. Culbertson, H.S. Newman, and C. Wilker, *J. Appl. Phys.* 84, 2768 (1998).
- [56] T. Kaiser, M.A. Hein, G. Muller, and M. Perpeet, *Appl. Phys. Lett.* 73, 3447 (1998).
- [57] D.E. Oates, S.-H. Park, and G. Koren, *Phys. Rev. Lett.* 93, 197001 (2004).
- [58] А.Зоммерфельд, *Электродинамика*. Пер. с нем., под ред. С. А. Элькинда, Изд-во иностранной литературы, 1958, стр. 238—247.
- [59] E. Roubine, *Etude des ondes electromagnetiques guidees par les circuits en helice*. *Ann. Telecom.*, 1952, May, t. 7. № 5, p. 206—216; Juin, t. 7, p. 262—275; July, t. 7.
- [60] S. Sensiper, *Electromagnetic wave propagation on helical structures*, *Proc. IRE*, 1955, v. 43, № 2, p. 149—161.
- [61] Шестопапов В. П., Слюсарский В. А., Андренко С. Д., Черняков Э. И. *Электромагнитные волны в спиральном волноводе с анизотропным диэлектриком*. *ЖТФ*, 1960, т. XXX, вып. 6, стр. 644.
- [62] Шестопапов В. П., Слюсарский В. А. *Исследование замедляющих систем типа спираль — анизотропный диэлектрик и спираль — ребристая структура*. *ЖТФ*, 1959, т. XXIX, вып. 11, стр. 1317.
- [63] Файнберг Я.Б., Хижняк М.А., Силенок Г. О., Березин А.Н., Некрашевич О. М. *Исследование спирального волновода с неоднородным диэлектриком, ч. I, II*. *Украинский физический журнал*, 1959, т. IV, № 4.
- [64] Булгаков Б. М., Шестопапов В. П., Шишкин Л. А., Якименко И. Г. *Симметричные поверхностные волны в спиральном волноводе, помещенном в ферритовую среду*. *«Радиотехника и электроника»*, 1960, т. V, вып. 11, стр. 1818—1827.

- [65] Cook J. S., Kompfner R. Nonreciprocal loss in travelling-wave tubes using ferrite attenuators. Proc. IRE, 1954, June, v. 42, № 6, p. 1188—1189.
- [66] Rich J. A., Weber S. E. Ferrite attenuators in helices. Proc. IRE. 1955, January, v. 43, № 1, p. 100—101.
- [67] Булгаков Б. М., Шестопалов В. М. Распространение электромагнитных волн в замедляющих системах, использующих спираль и диэлектрик. ЖТФ, 1958, т. XXVIII, вып. 1, стр. 188.
- [68] Иванова В. Д., Михалевский В. С. Дисперсионные свойства спирали, помещенной в плазму. «Радиотехника и электроника», 1959, т. 4, № 11.
- [69] Брыков В. С. Основы теории спиральной эллиптической линии задержки. «Известия вузов», Радиотехника, 1961, т. IV, № 2, стр. 185—191.
- [70] Справочник по специальным функциям, М. – Наука 1979.
- [71] C. Kurter, J. Abrahams, S. M. Anlage, Miniaturized Superconducting Metamaterials for Radio Frequencies, Appl. Phys. Lett. 96, 253504 (2010).
- [72] C. Kurter, A. P. Zhuravel, J. Abrahams, C. L. Bennett, A. V. Ustinov, S. M. Anlage, Superconducting RF Metamaterials Made with Magnetically Active Planar Spirals, IEEE Trans. Appl. Supercond. 21, 709 (2011).
- [73] ANSYS HFSS at www.ansys.com
- [74] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ФМ, Москва, 1963
- [75] H.A. Wheeler, The radian sphere around a small antenna, 1959
- [76] A. P. Zhuravel, Steven M. Anlage, and A. V. Ustinov, IEEE Trans. on Appl. Supercond., 17, Issue 2, pp. 902 – 905, 2007
- [77] M.I. Tsindlekht, E.B. Sonin, M.A. Golosovsky, D. Davidov, X. Castel, M. Guilloux-Viry, and A. Perrin, Phys. Rev. B61, 1596 (2000).
- [78] L.F. Cohen, A. Cowie, J.C. Gallop, I.S. Gosh and I.N. Goncharov, J. Supercond. 10, 85 (1997).